ПОДСЧЁТ КОЛИЧЕСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ БПФ*

В. Н. Малозёмов

malv@gamma.math.spbu.ru

20 сентября 2005 г.

1°. Рассмотрим сначала случай $N = p\,q$. Пусть $x \in \mathbb{C}_N$. Положим

$$x_r(s) = x(r + p\,s)\,, \qquad s \in 0 : q-1\,, \quad r \in 0 : p-1\,.$$

Имеем

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\omega_N^{-kj} = \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{q-1} x(r + p\,s)\,\omega_N^{-k\,(r+p\,s)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{p-1} \omega_N^{-kr} \sum_{s=0}^{q-1} x_r(s)\,\omega_q^{-ks}\,.$$

Обозначим

$$X_r(k) = \sum_{s=0}^{q-1} x_r(s)\,\omega_q^{-ks}\,.$$

Тогда

$$X(k) = \sum_{r=0}^{p-1} \omega_N^{-kr} X_r(k)\,.$$

Представим индекс k в виде $k = \alpha + \beta\,q$. В силу q-периодичности спектров X_r получим

$$X(\alpha + \beta\,q) = \sum_{r=0}^{p-1} \omega_N^{-(\alpha+\beta\,q)\,r} X_r(\alpha + \beta\,q) = \sum_{r=0}^{p-1} \Big(\omega_N^{-\alpha r} X_r(\alpha)\Big)\,\omega_p^{-\beta r}\,,$$

$$\alpha \in 0 : q-1\,, \quad \beta \in 0 : p-1\,.$$

---

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Приходим к следующей схеме вычисления спектра X сигнала $x \in \mathbb{C}_N$.

1. Сигнал $x(j)$ разбить на p серий $x_r(s) = x(r + p\,s)$, $s \in 0 : q-1$, $r \in 0 : p-1$:

$$\begin{array}{ccccc}
x(0)\,, & x(p)\,, & x(2p)\,, & \ldots\,, & x\big((q-1)\,p\big)\,, \\
x(1)\,, & x(p+1)\,, & x(2p+1)\,, & \ldots\,, & x\big((q-1)\,p+1\big)\,, \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
x(p-1)\,, & x(2p-1)\,, & x(3p-1)\,, & \ldots\,, & x(q\,p-1)\,.
\end{array}$$

2. Вычислить спектры X_r каждой серии (длины q):

$$\begin{array}{cccc}
X_0(0)\,, & X_0(1)\,, & \ldots\,, & X_0(q-1)\,, \\
X_1(0)\,, & X_1(1)\,, & \ldots\,, & X_1(q-1)\,, \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
X_{p-1}(0)\,, & X_{p-1}(1)\,, & \ldots\,, & X_{p-1}(q-1)\,.
\end{array}$$

3. Преобразовать сформированную матрицу (по столбцам):

$$\widetilde{X}_r(\alpha) = \big(\omega_N^{-\alpha}\big)^r X_r(\alpha)\,, \qquad r \in 0 : p-1\,, \quad \alpha \in 0 : q-1\,.$$

4. Вычислить спектры q новых столбцов (каждый длины p):

$$\begin{array}{cccc}
X(0)\,, & X(1)\,, & \ldots\,, & X(q-1)\,, \\
X(q)\,, & X(q+1)\,, & \ldots\,, & X(2q-1)\,, \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
X\big((p-1)\,q\big)\,, & X\big((p-1)\,q+1\big)\,, & \ldots\,, & X(p\,q-1)\,.
\end{array}$$

5. Для получения спектра X сшить строки последней матрицы.

2°. Сколько умножений в таком алгоритме?

Для вычисления ДПФ длины p необходимо произвести $(p-1)^2$ умножений (учесть, что $\omega_p^{-\beta r} = 1$ при $\beta = 0$ и при $r = 0$). Значит, пункт 4 требует $q\,(p-1)^2$ умножений. По аналогичной причине пункт 3 требует $(q-1)(p-1)$ умножений. На пункты 3 и 4 приходится $q\,(p-1)^2 + (q-1)(p-1) = (p\,q-1)(p-1)$ умножений.

Обозначим через $\psi(N)$ количество комплексных умножений, необходимых для вычисления ДПФ длины N. Согласно описанию алгоритма получаем рекуррентное соотношение

$$\psi(p\,q) = p\,\psi(q) + (p\,q-1)(p-1)\,. \tag{1}$$

3°. Пусть теперь $N = n_1 n_2 \dots n_s$. Положим $p = n_1$, $q = n_2 n_3 \dots n_s$. Согласно (1)

$$\psi(n_1 n_2 \dots n_s) = (N-1)(n_1-1) + n_1\,\psi(n_2 n_3 \dots n_s)\,.$$

В свою очередь

$$\psi(n_2 n_3 \dots n_s) = (n_2 n_3 \dots n_s - 1)(n_2-1) + n_2\,\psi(n_3 \dots n_s)\,.$$

Значит,

$$\psi(N) = (N-1)(n_1-1) + (N-n_1)(n_2-1) + n_1 n_2\,\psi(n_3 \dots n_s)\,.$$

Сделаем ещё один шаг:

$$\psi(n_3 \dots n_s) = (n_3 \dots n_s - 1)(n_3-1) + n_3\,\psi(n_4 \dots n_s)\,;$$
$$\psi(N) = (N-1)(n_1-1) + (N-n_1)(n_2-1) + (N-n_1 n_2)(n_3-1) + {}$$
$$+ n_1 n_2 n_3\,\psi(n_4 \dots n_s)\,.$$

Окончательно

$$\psi(N) = (N-1)(n_1-1) + \sum_{k=2}^{s-2}(N - n_1 n_2 \dots n_{k-1})(n_k-1) + {}$$
$$+ n_1 n_2 \dots n_{s-2}\,\psi(n_{s-1} n_s)\,.$$

Поскольку $\psi(n_{s-1} n_s) = (n_{s-1} n_s - 1)(n_{s-1} - 1) + n_{s-1}\,(n_s-1)^2$, то

$$\psi(N) = (N-1)(n_1-1) + \sum_{k=2}^{s}(N - n_1 n_2 \dots n_{k-1})(n_k-1)\,.$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\psi(N) = \sum_{k=1}^{s}(N - n_0 n_1 n_2 \dots n_{k-1})(n_k-1)\,, \qquad (2)$$

где положено $n_0 = 1$.

При $N = 2^s$ из (2) следует, что

$$\psi(N) = \sum_{k=1}^{s}(N - 2^{k-1}) = Ns - N + 1 = N\log_2 N - N + 1\,. \qquad (3)$$

4°. Разумеется, величина $\psi(N)$ является оценкой сверху количества комплексных умножений при фиксированном правиле их подсчёта. При $N = 2^s$ оценку (3) можно улучшить. Для этого отметим, что при $p = 2$ в пункте 4 алгоритма вообще не производится умножений. Рекуррентное соотношение (1) уточняется:

$$\psi(2q) = 2\,\psi(q) + q - 1\,. \tag{4}$$

Согласно (4) получаем

$$\begin{gathered}\psi(2^s) = 2^{s-1} - 1 + 2\,\psi(2^{s-1}) = 2^{s-1} - 1 + 2\left[2^{s-2} - 1 + 2\,\psi(2^{s-2})\right] = \\ = 2 \cdot 2^{s-1} - (1+2) + 2^2\,\psi(2^{s-2})\,.\end{gathered}$$

По той же причине $\psi(2^{s-2}) = 2^{s-3} - 1 + 2\,\psi(2^{s-3})$, так что

$$\psi(2^s) = 3 \cdot 2^{s-1} - (1 + 2 + 2^2) + 2^3\,\psi(2^{s-3})\,.$$

Окончательно при $N = 2^s$

$$\begin{aligned}\psi(N) &= (s-1)\,2^{s-1} - (1 + 2 + \dots + 2^{s-2}) + 2^{s-1}\,\psi(2) = \\ &= (s-1)\,2^{s-1} - (2^{s-1} - 1) = s\,2^{s-1} - 2^s + 1 = \\ &= \tfrac{1}{2}\,N\log_2 N - N + 1\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Мы воспользовались тем, что $\psi(2) = 0$.

В [1] указаны более грубые, чем (2) и (5), оценки для $\psi(N)$.

5°. Подсчитаем количество сложений в описанном алгоритме. Для вычисления одного ДПФ длины p необходимо произвести $p\,(p-1)$ сложений. Значит, пункт 4 требует $q\,p\,(p-1)$ сложений. Обозначив через $\eta(N)$ количество комплексных сложений, необходимых для вычисления ДПФ длины N, придём к рекуррентному соотношению

$$\eta(p\,q) = p\,\eta(q) + q\,p\,(p-1)\,.$$

При $N = n_1 n_2 \dots n_s$ последовательно получаем

$$\begin{gathered}\eta(N) = N\,(n_1 - 1) + n_1\,\eta(n_2 n_3 \dots n_s) = N\,(n_1-1) + n_1\left[n_2 n_3 \dots n_s\,(n_2 - 1) + \right. \\ \left. + n_2\,\eta(n_3 \dots n_s)\right] = N\,(n_1 - 1) + N\,(n_2 - 1) + n_1 n_2\,\eta(n_3 \dots n_s)\,.\end{gathered}$$

Окончательно

$$\eta(N) = \sum_{k=1}^{s-1} N\,(n_k - 1) + n_1 n_2 \dots n_{s-1}\,\eta(n_s)\,.$$

Поскольку $\eta(n_s) = n_s\,(n_s - 1)$, то

$$\eta(N) = N \sum_{k=1}^{s} (n_k - 1)\,. \tag{6}$$

При $N = 2^s$ из (6) следует формула

$$\eta(N) = Ns = N \log_2 N\,. \tag{7}$$

6°. Строго говоря, алгоритм п. 1° приводит к таким рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} \psi(p\,q) &= p\,\psi(q) + q\,\psi(p) + (p-1)(q-1)\,,\\ \eta(p\,q) &= p\,\eta(q) + q\,\eta(p)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Нас интересует случай $p = 4$. Напомним алгоритм БПФ при $N = 4$ [2]:

$$\begin{gathered} s(1) = x(0) + x(2)\,, \quad s(3) = x(1) + x(3)\,, \quad s(5) = s(1) + s(3)\,,\\ s(2) = x(0) - x(2)\,, \quad s(4) = x(1) - x(3)\,, \quad s(6) = s(1) - s(3)\,,\\ m(1) = i\,s(4)\,,\\ s(7) = s(2) - m(1)\,, \quad s(8) = s(2) + m(1)\,,\\ X(0) = s(5)\,, \quad X(1) = s(7)\,, \quad X(2) = s(6)\,, \quad X(3) = s(8)\,. \end{gathered}$$

Умножение на i мы не будем считать арифметической операцией, поскольку это умножение сводится к пересылке вещественной части на место мнимой, а мнимой (после изменения знака) — на место вещественной. Таким образом,

$$\psi(4) = 0\,, \quad \eta(4) = 8\,. \tag{9}$$

Согласно (8) и (9)

$$\begin{aligned} \psi(4q) &= 4\,\psi(q) + 3q - 3\,,\\ \eta(4q) &= 4\,\eta(q) + 8q\,. \end{aligned} \tag{10}$$

При $N = 4^t$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} \psi(4^t) &= 3 \cdot 4^{t-1} - 3 + 4\left[3 \cdot 4^{t-2} - 3 + 4\,\psi(4^{t-2})\right] =\\ &= 2\,(3 \cdot 4^{t-1}) - 3\,(1+4) + 4^2\left[3 \cdot 4^{t-3} - 3 + 4\,\psi(4^{t-3})\right] =\\ &= 3\,(3 \cdot 4^{t-1}) - 3\,(1+4+4^2) + 4^3\,\psi(4^{t-3}) = \cdots =\\ &= (t-1)(3 \cdot 4^{t-1}) - 3\,(1+4+4^2+\cdots+4^{t-2}) + 4^{t-1}\,\psi(4) =\\ &= (3t-3)\,4^{t-1} - (4^{t-1} - 1) = 3t\,4^{t-1} - 4^t + 1\,. \end{aligned}$$

Поскольку $N = 4^t = 2^{2t}$, то $2t = \log_2 N$. Приходим к формуле

$$\psi(N) = \tfrac{3}{8}\,N \log_2 N - N + 1\,. \tag{11}$$

Сравнение (5) и (11) показывает, что при $N = 4^t = 2^{2t}$ последовательное применение алгоритма БПФ с основанием $p = 4$ более эффективно по количеству комплексных умножений, чем последовательное применение алгоритма БПФ с основанием $p = 2$.

Обратимся к подсчёту количества комплексных сложений. Согласно (10) имеем

$$\begin{aligned} \eta(4^t) &= 8 \cdot 4^{t-1} + 4\left[8 \cdot 4^{t-2} + 4\,\eta(4^{t-2})\right] = \\ &= 2\,(2 \cdot 4^t) + 4^2\left[8 \cdot 4^{t-3} + 4\,\eta(4^{t-3})\right] = 3\,(2 \cdot 4^t) + 4^3\,\eta(4^{t-3}) = \\ &= \cdots = (t-1)(2 \cdot 4^t) + 4^{t-1}\,\eta(4) = 2t\,4^t\,, \end{aligned}$$

т. е. при $N = 4^t$

$$\eta(N) = N \log_2 N\,. \tag{12}$$

Сравнивая (7) и (12), заключаем, что при $N = 4^t = 2^{2t}$ количество комплексных сложений одинаково как при последовательном применении алгоритма БПФ с основанием $p = 2$, так и при последовательном применении алгоритма БПФ с основанием $p = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Henrici P. *Fast Fourier methods in computational complex analysis* // SIAM Rev. 1979. V. 21. N. 4. P. 481–527.

2. Малоземов В. Н., Просеков О. В. *О быстром преобразовании Фурье малых порядков* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып. 1 (№ 1). С. 36–45.