КАЛИБРОВОЧНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ B-СПЛАЙНОВ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

25 июня 2011 г.

1°. Пусть $N = mn$. Будем считать, что $m = 2^t$, где t — натуральное число. Положим

$$m_\nu = m/2^\nu, \quad n_\nu = 2^\nu n, \quad \nu \in 0 : t.$$

Ясно, что $m_\nu n_\nu = N$ при всех ν.

Обозначим через $Q_r^\nu(j)$ дискретный периодический B-сплайн порядка r, соответствующий параметрам m_ν, n_ν. Как известно [1, 2],

$$Q_r^\nu(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, \omega_N^{kj},$$

где

$$y_\nu(k) = \begin{cases} n_\nu^{2r} & \text{при } k = 0, \\ \left(\dfrac{\sin(\pi k/m_\nu)}{\sin(\pi k/N)}\right)^{2r} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо калибровочное соотношение*

$$Q_r^{\nu+1}(j) = \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, Q_r^\nu(j - pn_\nu), \quad \nu \in 0 : t-1. \tag{1}$$

Доказательство соотношения (1) в "разобранном" виде (разбитое на серию задач) представлено в [2, с. 62–63]. В данном докладе мы приведём каноническое доказательство.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

2°. Начнём с двух вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Имеет место формула*

$$y_{\nu+1}(k) = c_\nu(k)\, y_\nu(k), \quad k \in 0 : N-1, \tag{2}$$

где

$$c_\nu(k) = \bigl(2\cos(\pi k/m_\nu)\bigr)^{2r}. \tag{3}$$

Доказательство. Равенство (2) очевидно при $k = 0$. Действительно,

$$y_{\nu+1}(0) = n_{\nu+1}^{2r} = (2n_\nu)^{2r} = c_\nu(0)\, y_\nu(0).$$

Пусть $k \in 1 : N-1$. Учитывая, что

$$\sin(\pi k/m_{\nu+1}) = \sin(2\pi k/m_\nu) = 2\cos(\pi k/m_\nu)\sin(\pi k/m_\nu),$$

на основании определения $y_\nu(k)$ получаем (2). □

ЛЕММА 2. *Коэффициенты $c_\nu(k)$ допускают представление*

$$c_\nu(k) = \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, \omega_{m_\nu}^{-kp}. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$\omega_{m_\nu}^{-k}(\omega_{m_\nu}^{k}+1)^2 = \omega_{m_\nu}^{k} + 2 + \omega_{m_\nu}^{-k} = 2(1+\cos\tfrac{2\pi k}{m_\nu}) = (2\cos\tfrac{\pi k}{m_\nu})^2,$$

поэтому согласно (3)

$$c_\nu(k) = \omega_{m_\nu}^{-kr}(\omega_{m_\nu}^{k}+1)^{2r} = \sum_{p=0}^{2r} C_{2r}^{2r-p}\, \omega_{m_\nu}^{-k(r-p)} =$$

$$= \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, \omega_{m_\nu}^{-kp}.$$

Лемма доказана. □

3°. Обратимся к доказательству теоремы 1.

На основании (2) и (4) запишем

$$Q_r^{\nu+1}(j) = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_{\nu+1}(k)\, \omega_N^{kj} = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_\nu(k)\, y_\nu(k)\, \omega_N^{kj} =$$

$$= \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, \omega_N^{kj} \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, \omega_N^{-kpn_\nu} =$$

$$= \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\Bigl[\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, \omega_N^{k(j-pn_\nu)}\Bigr] = \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, Q_r^{\nu}(j-pn_\nu).$$

Теорема доказана. □

4°. Калибровочное соотношение существует и для дискретных ортогональных сплайнов, которые применительно к параметрам m_ν, n_ν определяются так ([3], [2, с. 38]):

$$\mu_k^\nu(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + k)\, \omega_N^{(qm_\nu+k)j}, \quad k \in 0 : m_\nu - 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *При* $k \in 0 : m_{\nu+1} - 1$ *справедливо калибровочное соотношение*

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = c_\nu(k)\, \mu_k^\nu(j) + c_\nu(m_{\nu+1} + k)\, \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j), \quad \nu \in 0 : t-1, \tag{5}$$

где $c_\nu(k)$ *имеют вид* (3).

Доказательство. Воспользуемся формулой (2) и m_ν-периодичностью коэффициентов $c_\nu(k)$. Получим

$$\begin{gathered}
\mu_k^{\nu+1}(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{2n_\nu-1} y_{\nu+1}(qm_{\nu+1} + k)\, \omega_N^{(qm_{\nu+1}+k)j} = \\
= \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_{\nu+1}(2qm_{\nu+1} + k)\, \omega_N^{(2qm_{\nu+1}+k)j} + \\
+ \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_{\nu+1}\big((2q+1)m_{\nu+1} + k\big)\, \omega_N^{((2q+1)m_{\nu+1}+k)j} = \\
= c_\nu(k) \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + k)\, \omega_N^{(qm_\nu+k)j} + \\
+ c_\nu(m_{\nu+1} + k) \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + m_{\nu+1} + k)\, \omega_N^{(qm_\nu+m_{\nu+1}+k)j} = \\
= c_\nu(k)\, \mu_k^\nu(j) + c_\nu(m_{\nu+1} + k)\, \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j).
\end{gathered}$$

Теорема доказана. $\square$

5°. Калибровочные соотношения (1) и (5) служат основой для построения вейвлетных разложений пространства дискретных периодических сплайнов (см., например, [3], [2, с. 47–52]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 3. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 88 с.

3. Кирушев В. А., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Вейвлетное разложение пространства дискретных периодических сплайнов* // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 5. С. 712–720.