ВЫЧИСЛЕНИЕ ДПФ ЛЮБОЙ ДЛИНЫ*

Г. Н. Малолеткин

1°. Возьмём матрицу Фурье F_N порядка $N \geqslant 3$ с элементами

$$F_N[k,j] = \omega_N^{kj}, \quad k,j \in 0:N-1.$$

Тогда $X = \overline{F}_N\, x$. Введём ещё две матрицы порядка N:

диагональную D_N с диагональными элементами

$$D_N[k,k] = \omega_{2N}^{-k^2}, \quad k \in 0:N-1,$$

и тёплицеву G_N с элементами

$$G_N[k,j] = \omega_{2N}^{(k-j)^2}, \quad k,j \in 0:N-1.$$

ТЕОРЕМА. *Справедливо равенство*

$$\overline{F}_N = D_N G_N D_N. \tag{1}$$

Доказательство. Имеем

$$\overline{F}_N[k,j] = \omega_N^{-kj} = \omega_{2N}^{-k^2} \omega_{2N}^{(k-j)^2} \omega_{2N}^{-j^2}.$$

Вместе с тем,

$$\bigl(D_N G_N D_N\bigr)[k,j] = \sum_{l=0}^{N-1} D_N[k,l] \cdot \bigl(G_N D_N\bigr)[l,j] =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} D_N[k,l] \sum_{l'=0}^{N-1} G_N[l,l'] D_N[l',j] = \sum_{l=0}^{N-1} D_N[k,l] G_N[l,j] \omega_{2N}^{-j^2} =$$

$$= \omega_{2N}^{-k^2} G_N[k,j]\, \omega_{N2}^{-j^2} = \omega_{2N}^{-k^2} \omega_{2N}^{(k-j)^2} \omega_{2N}^{-j^2}.$$

Сравнивая полученные формулы, приходим к (1). □

---

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Доклад прочитан 25 апреля 1987 г. на семинаре по цифровой обработке сигналов, предшествовавшем данному семинару

2°. Обозначим $a_k = \omega_{2N}^{k^2}$. Тогда строку матрицы G_N с индексом k можно записать в виде

$$G_N[k, 0:N-1] = \bigl(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-k-1}\bigr), \quad k \in 0:N-1. \tag{2}$$

Пусть $M = 2^m \geqslant 2N-1$. Введём сигнал $\widehat{h} \in \mathbb{C}_M$ со следующими значениями на основном периоде

$$\widehat{h}[0:M-1] = \bigl(a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(M-(2N-1))}, a_{N-1}, a_{N-2}, \ldots, a_1\bigr)$$

и обозначим через $\widehat{G}_M$ тёплицеву матрицу порядка M с элементами

$$\widehat{G}_M[k, j] = \widehat{h}(k-j), \quad k, j \in 0:M-1. \tag{3}$$

Отметим, что

$$\widehat{G}_M[k, j] = G_N[k, j] \quad \text{при } k, j \in 0:N-1. \tag{4}$$

Действительно, по определению

$$\widehat{h}(-j) = \widehat{h}(M-j) = a_j \quad \text{при } j \in 1:N-1.$$

При $k \in 0:N-1$ получим

$$\begin{aligned} \widehat{G}_M[k, 0:N-1] &= \bigl(\widehat{h}(k), \widehat{h}(k-1), \ldots, \widehat{h}(1), \widehat{h}(0), \widehat{h}(-1), \ldots, \widehat{h}(-N+k+1)\bigr) = \\ &= \bigl(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-k-1}\bigr). \end{aligned} \tag{5}$$

Из (2) и (5) следует (4).

Равенство (4) можно записать в матричном виде

$$G_N = \bigl[I_N, 0\bigr]\, \widehat{G}_M \begin{bmatrix} I_N \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

3°. Согласно (1) и (6) имеем

$$\begin{aligned} \overline{F}_N\, x &= D_N\, \bigl[I_N, 0\bigr]\, \widehat{G}_M \begin{bmatrix} I_N \\ 0 \end{bmatrix} D_N\, x = \\ &= \bigl[D_N, 0\bigr]\, \widehat{G}_M \begin{bmatrix} D_N\, x \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим $z = D_N\, x$, $\widehat{z} = \begin{bmatrix} z \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}$. По определению (3)

$$\bigl(\widehat{G}_M\, \widehat{z}\bigr)[k] = \sum_{j=0}^{M-1} \widehat{z}(j)\, \widehat{h}(k-j), \quad k \in 0:M-1. \tag{8}$$

В правой части формулы (8) стоит свёртка $\widehat{z} * \widehat{h}$. По теореме о свёртке

$$\widehat{z} * \widehat{h} = \mathcal{F}_M^{-1}\big(\mathcal{F}_M(z)\, \mathcal{F}_M(\widehat{h})\big). \tag{9}$$

Спектр $\widehat{H} = \mathcal{F}_M(\widehat{h})$ не зависит от x. Его можно вычислить заранее:

$$\begin{aligned} \widehat{H}(k) &= 1 + \sum_{j=1}^{N-1} \omega_{2N}^{j^2}\, \omega_M^{-kj} + \sum_{j=1}^{N-1} \omega_{2N}^{j^2}\, \omega_M^{-k(M-j)} = \\ &= 1 + 2\sum_{j=1}^{N-1} \omega_{2N}^{j^2} \cos\big(\tfrac{2\pi k}{M} j\big), \quad k \in 0 : M-1. \end{aligned} \tag{10}$$

На основании (7)–(10) приходим к следующей схеме вычисления спектра $X = \overline{F}_N\, x$.

1. Формируем вектор z с компонентами $z(j) = \omega_{2N}^{-j^2} x(j)$, $j \in 0 : N-1$, и дополняем его нулями до M-мерного вектора $\widehat{z}$.

2. Вычисляем $\widehat{Z} = \mathcal{F}_M(\widehat{z})$.

3. Покомпонентно умножаем вектор $\widehat{Z}$ на вектор $\widehat{H}$ вида (10). Полученный вектор обозначим $\widehat{Y}$.

4. Вычисляем $\widehat{X} = \mathcal{F}_M^{-1}(\widehat{Y})$.

5. Находим компоненты спектра X по формуле

$$X(k) = \omega_{2N}^{-k^2}\, \widehat{X}(k), \quad k \in 0 : N-1.$$

Самым плохим для этой схемы является случай $N = 2^s + 1$, когда

$$2N - 1 = 2^{s+1} + 1, \qquad M = 2^{s+2} = 4(N-1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блейхут Р. *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.* М.: Мир, 1989. С. 147–149.

2. Нуссбаумер Г. *Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свёрток.* М.: Радио и связь, 1985. С. 103–104.