СФЕРИЧЕСКИЕ ДИЗАЙНЫ*

А. М. Дурягин А. Б. Певный

duriagin@syktsu.ru pevnyi@syktsu.ru

4 марта 2009 г.

Даётся определение сферического t-дизайна в $\mathbb{R}^n$. Приводится пример 4-дизайна в $\mathbb{R}^3$, состоящего из вершин икосаэдра. Подробно исследуется вопрос о виде t-дизайнов на плоскости.

1°. Пусть t — чётное число, $t \geqslant 2$. Система единичных векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *сферическим t-дизайном*, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_i\rangle\big]^t = A\|x\|^t,$$

где $A > 0$ — некоторая константа. Такое определение используется в [1].

При $t = 2$ сферические 2-дизайны — это то же самое, что жёсткие фреймы, состоящие из единичных векторов.

Следует отметить, что есть другое определение сферического дизайна, связанное с интегрированием по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [2, 3]).

Количество элементов сферического t-дизайна не может быть меньше некоторой нижней границы. А именно, при $t = 2s$ должно выполнятся неравенство (см. [1]):

$$m \geqslant C_{n+s-1}^{n-1}. \tag{1}$$

Например, при $n = 3$, $t = 4$, $s = 2$ выполняется неравенство

$$m \geqslant C_4^2 = 6.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Приведём пример минимального (состоящего из 6 векторов) 4-дизайна в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha, 1, 0), & g_4 &= (\alpha, -1, 0), \\ g_2 &= (0, \alpha, 1), & g_5 &= (0, \alpha, -1), \\ g_3 &= (1, 0, \alpha), & g_6 &= (-1, 0, \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. Точки $g_1, \dots, g_6$ лежат на сфере S_R радиуса

$$R = \sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Введём единичные векторы $\varphi_i = g_i/R$. Эти векторы обладают свойством равноугольности

$$|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \quad i \neq j.$$

Покажем, что система $\{\varphi_i\}_{i=1}^6$ является сферическим 4-дизайном.

Пусть $X = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$. Вычислим сумму

$$\begin{aligned} F_4(X) = \sum_{i=1}^{6} [\langle g_i, X \rangle]^4 &= (\alpha x + y)^4 + (\alpha y + z)^4 + \\ &+ (\alpha z + x)^4 + (\alpha x - y)^4 + (\alpha y - z)^4 + (\alpha z - x)^4. \end{aligned} \tag{2}$$

При возведении в 4-ую степень все нечётные степени x, y, z уничтожатся. Придём к выражению

$$\begin{aligned} F_4(X) = 2\,\big[\,(1+\alpha^4)\,x^4 + (1+\alpha^4)\,y^4 + (1+\alpha^4)\,z^4 + \\ + 6\,\alpha^2\,x^2\,y^2 + 6\,\alpha^2\,y^2\,z^2 + 6\,\alpha^2\,x^2\,z^2\,\big]. \end{aligned}$$

Нетрудно подсчитать, что $1 + \alpha^4 = 3\alpha^2 = \frac{3}{2}(3+\sqrt{5})$.

Введём обозначение

$$A = 2(1+\alpha^4) = 2 \cdot 3\alpha^2 = 3(3+\sqrt{5}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_4(X) &= A\,\big[\,x^4 + y^4 + z^4 + 2\,x^2\,y^2 + 2\,y^2\,z^2 + 2\,x^2\,z^2\,\big] = \\ &= A\,(x^2+y^2+z^2)^2 = A\|X\|^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставим в (2) $g_i = R\varphi_i$. С учётом (3) получим

$$\sum_{i=1}^{6} \big[\langle \varphi_i, X \rangle\big]^4 = \frac{A}{R^4}\,\|X\|^4 = \frac{6}{5}\,\|X\|^4 \qquad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

Значит, система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ является сферическим 4-дизайном в $\mathbb{R}^3$.

Ясно, что система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ не является сферическим 6-дизайном в $\mathbb{R}^3$, ибо при $n = 3$, $t = 6$, $s = 3$ выполнялось бы неравенство $m \geqslant C_5^2 = 10$, а у нас только 6 векторов.

Дополним систему $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ векторами $-\varphi_1, \dots, -\varphi_6$. Получившуюся систему из 12 векторов в $\mathbb{R}^3$ обозначим $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{12}\}$. Выпуклая оболочка системы Φ является икосаэдром, вписанным в единичную сферу. Система Φ является сферическим 2-дизайном и 4-дизайном.

3°. В этом пункте рассматриваются сферические t-дизайны на плоскости, где t — произвольное чётное число, $t \geqslant 2$. Такие дизайны можно назвать круговыми.

Система единичных векторов $\{b_0, \dots, b_{m-1}\}$ в $\mathbb{R}^2$ будет круговым t-дизайном, если выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big[\langle b_k, X\rangle\big]^t = A\|X\|^t, \tag{4}$$

где $A > 0$ — константа, $X = (x, y)$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть $t = 2s$. Неравенство (1) принимает вид

$$m \geqslant C_{s+1}^1 = s + 1 = \frac{t}{2} + 1.$$

Если $m = \frac{t}{2} + 1$, то дизайн будем называть *минимальным*. При $t = 2$ минимальный дизайн должен содержать два вектора ($m = 2$). Два единичных вектора b_0 и b_1 образуют 2-дизайн (жёсткий фрейм) только тогда, когда эти векторы ортогональны: $\langle b_0, b_1\rangle = 0$. В этом случае концы векторов $\{b_0, b_1, -b_0, -b_1\}$ совпадают с вершинами квадрата.

В работе [1, с. 23] без доказательства утверждается, что при любом $t \geqslant 2$ половина вершин правильного $(t+2)$-угольника, вписанного в единичную окружность, образует круговой t-дизайн. Нашей целью является доказательство этого утверждения путём непосредственной проверки равенства (4).

Пусть t — чётное, $t \geqslant 2$. Положим

$$m = \frac{t}{2} + 1. \tag{5}$$

Разделим окружность на $2m = t + 2$ частей и рассмотрим векторы

$$b_k = \left(\cos\frac{k\pi}{m}\,,\ \sin\frac{k\pi}{m}\right), \qquad k \in 0 : m - 1. \tag{6}$$

Это половина векторов с концами в вершинах правильного $2m$-угольника (см. рис. 1):

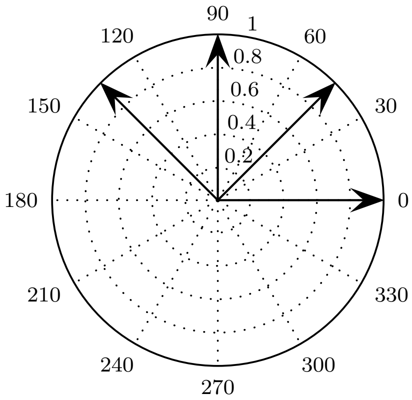

Рис. 1

ТЕОРЕМА. *Векторы* (6) *образуют* p*-дизайн с константой*

$$A_p = \frac{m(p-1)!!}{p!!}$$

для любого $p = 2, 4, \ldots, t$.

4°. Перед доказательством теоремы приведём хорошо известную лемму о точности квадратурной формулы прямоугольников для тригонометрических полиномов.

ЛЕММА. *Разделим отрезок* $[0, 2\pi]$ *на* $2m$ *равных частей с шагом* $h = \frac{\pi}{m}$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

порядка p, *где* $p \leqslant 2m - 1$, *справедливо равенство*

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} f\Big(\frac{j\pi}{m}\Big). \tag{7}$$

Доказательство. Полином $f(\varphi)$ можно записать в виде

$$f(\varphi) = \sum_{k=-p}^{p} c_k\, e^{ik\varphi}.$$

Достаточно доказать (7) для функции $e^{ik\varphi}$, $|k| \leqslant p$. При $k = 0$ получаем равенство $2\pi = 2\pi$. Если же $1 \leqslant |k| \leqslant p \leqslant 2m - 1$, то сумма в (7) будет геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = e^{ik\pi/m} \neq 1.$$

Сумма в (7) равна
$$\frac{q^{2m}-1}{q-1} = \frac{e^{2ik\pi}-1}{q-1} = 0.$$
Интеграл также равен нулю. □

5°. Доказательство теоремы.

Произвольный вектор $X=(x,y)$ можно представить в виде
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
где $r=\sqrt{x^2+y^2}=\|X\|$, а θ — некоторый угол.

Тогда для любого $p=2,4,\dots,t$ справедливы равенства
$$\langle b_k, X\rangle = r\left(\cos\frac{k\pi}{m}\cos\theta + \sin\frac{k\pi}{m}\sin\theta\right) = r\,\cos\left(\frac{k\pi}{m}-\theta\right),$$
$$\sum_{k=0}^{m-1}\big[\langle b_k, X\rangle\big]^p = r^p\,S(\theta), \tag{8}$$
где
$$S(\theta) = \sum_{k=0}^{m-1}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{m}-\theta\right)\right]^p.$$

Поскольку p — чётное, то функция $\cos^p\varphi$ имеет период π. Отсюда
$$S(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{m}-\theta\right)\right]^p.$$
Выражение $\big[\cos(\varphi-\theta)\big]^p$ является тригонометрическим полиномом порядка p по переменной φ. В силу (5) $2m=t+2$, отсюда $p\leqslant t=2m-2<2m-1$. По лемме
$$S(\theta) = \frac{1}{2}\frac{m}{\pi}\int_0^{2\pi}\big[\cos(\varphi-\theta)\big]^p\,d\varphi = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big[\cos\varphi\big]^p\,d\varphi, \tag{9}$$
так как при сдвиге аргумента 2π-периодической функции на фиксированное число θ интеграл не меняется. Значение последнего интеграла известно:
$$\int_0^{2\pi}\cos^p\varphi\,d\varphi = 4\int_0^{\pi/2}\cos^p\varphi\,d\varphi = 2\pi\,\frac{(p-1)!!}{p!!}\,.$$
В силу (8) и (9) придём к равенству
$$\sum_{k=0}^{m-1}\big[\langle b_k, X\rangle\big]^p = \frac{m(p-1)!!}{p!!}\,\|X\|^t.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Добавим к системе (6) противоположные векторы $-b_0, -b_1, \ldots,$ $-b_{m-1}$. Получим систему из $2m$ векторов

$$b_k = \Big(\cos\frac{k\pi}{m}\,,\ \sin\frac{k\pi}{m}\Big), \qquad k \in 0 : 2m-1. \tag{10}$$

Эти векторы направлены в вершины правильного $2m$-угольника (см. рис. 2).

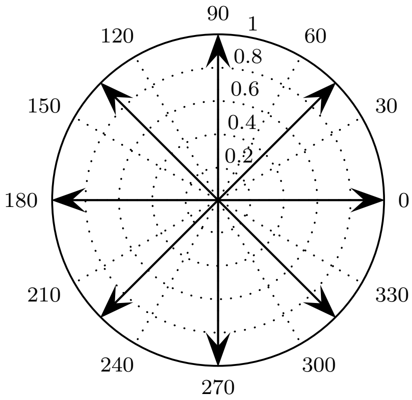

Рис. 2

Векторы (10) также образуют круговой p-дизайн (с константой $2\,A_p$).

Можно сказать так: вершины правильного $2m$-угольника образуют круговой p-дизайн при любом $p = 2, 4, \ldots, 2m-2$ (из формулы (5) следует, что $t = 2m-2$).

Более подробные сведения о сферических t-дизайнах можно найти в [1–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Memoirs of Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. N 463. P. 1–155.

2. Waldron S. *Generalized Welch bound equality sequences are tight frame* // Technical Report. 18 March 2003. (`http://www.math.auckland.ac.nz/~waldron`).

3. Bannai E., Munemasa A., Venkov B. *The nonexistence certain tight spherical designs* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.

4. Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Матем. просвещение. Сер. 3. Вып. 1. 1997. С. 115–121.