ДВОЙСТВЕННАЯ ЛИФТИНГОВАЯ СХЕМА*

В. Н. Малозёмов — malv@gamma.math.spbu.ru

Н. А. Селянинова — vinyo@mail.ru

14 марта 2006 г.

Прямая лифтинговая схема, основанная на дискретной сплайн-интерполяции по чётным индексам, рассматривалась в [1, 2]. В данном докладе изучается двойственная лифтинговая схема, в которой используется дискретная сплайн-интерполяция по нечётным индексам. Ярким и неожиданным фактом, связывающим эти схемы, является *биортогональность базисов* прямого и двойственного лифтингового разложения.

В идейном плане мы следуем работе [2].

Сохраняются обозначения из предыдущего доклада [1].

1. Предварительные сведения

1.1. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}_N$ при $N = 2N_1$. Возьмём сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ и разобъём его на две части

$$e(j) = x(2j)\,, \quad d(j) = x(2j+1)\,.$$

Легко проверяется, что спектры Фурье $X = \mathcal{F}_N(x)$, $E = \mathcal{F}_{N_1}(e)$, $D = \mathcal{F}_{N_1}(d)$ сигналов x, e, d связаны соотношениями: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{aligned} X(k) &= E(k) + \omega_N^{-k} D(k)\,, \\ X(k+N_1) &= E(k) - \omega_N^{-k} D(k)\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Формулы (1.1) допускают обращение: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{aligned} E(k) &= \tfrac{1}{2}\big[X(k) + X(k+N_1)\big]\,, \\ D(k) &= \tfrac{1}{2}\big[X(k) - X(k+N_1)\big]\,\omega_N^k\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

1.2. Нам потребуются дискретные периодические сплайны вида

$$S(j) \;=\; \sum_{p=0}^{N_1-1} c(p)\, Q_r(j-2p-1)\,, \tag{1.3}$$

где

$$Q_r(j) \;=\; \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bigl(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} \omega_N^{kj}\,.$$

Аналогично [3, 4] показывается, что единственным решением интерполяционной задачи

$$S(2l+1) \;=\; d(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1-1\,,$$

является сплайн S_1 с вектором коэффициентов $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N_1-1})$, дискретное преобразование Фурье которого $C = \mathcal{F}_{N_1}(c)$ определяется формулой

$$C(k) \;=\; D(k)/T_r(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1-1\,, \tag{1.4}$$

где

$$T_r(k) \;=\; \tfrac{1}{2}\Bigl[\bigl(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} + \bigl(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r}\Bigr]\,.$$

Обозначим $\sigma_1(l) = S_1(2l)$ и найдём $\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1)$. Имеем

$$\sigma_1(l) \;=\; \sum_{p=0}^{N_1-1} c(p)\, Q_r(2(l-p)-1)$$

или $\sigma_1 = c * h_r$, где $h_r(l) = Q_r(2l-1)$. По теореме о свёртке

$$\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1) \;=\; \mathcal{F}_{N_1}(c)\, \mathcal{F}_{N_1}(h_r)\,. \tag{1.5}$$

Вычислим $\mathcal{F}_{N_1}(h_r)$. Поскольку

$$\begin{aligned}
\bigl[\mathcal{F}_N(Q_r)\bigr](k) - \bigl[\mathcal{F}_N(Q_r)\bigr](k+N_1) \;&=\; \sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j)\, \omega_N^{-kj}\, \bigl[1-(-1)^j\bigr] \;= \\
=\; 2\sum_{l=0}^{N_1-1} Q_r(2l+1)\, \omega_N^{-k(2l+1)} \;&=\; 2\sum_{l=1}^{N_1} Q_r(2l-1)\, \omega_N^{-k(2l-1)} \;= \\
=\; 2\,\omega_N^{k} \sum_{l=0}^{N_1-1} h_r(l)\, \omega_{N_1}^{-kl} \;&=\; 2\,\omega_N^{k} \bigl[\mathcal{F}_{N_1}(h_r)\bigr](k)\,,
\end{aligned}$$

то

$$\bigl[\mathcal{F}_{N_1}(h_r)\bigr](k) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\omega_N^{-k}\Bigl[\bigl(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} - \bigl(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r}\Bigr]\,.$$

Обозначим
$$U_1(k) = \frac{\bigl(\cos\frac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} - \bigl(\sin\frac{\pi k}{N}\bigr)^{2r}}{\bigl(\cos\frac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} + \bigl(\sin\frac{\pi k}{N}\bigr)^{2r}}\,.$$
На основании (1.4) и (1.5) получаем
$$\bigl[\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1)\bigr](k) \,=\, \omega_N^{-k}\, U_1(k)D(k)\,, \quad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{1.6}$$

1.3. Напомним определение прямого лифтингового преобразования [1, 2]. Считаем, что $N = 2^s$. Обозначим $N_\nu = N/2^\nu$,
$$U_\nu(k) = \frac{\bigl(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r} - \bigl(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r}}{\bigl(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r} + \bigl(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r}}\,,\ \ k \in 0 : N_{\nu-1} - 1\,,\ \ \nu \in 1 : s\,. \tag{1.7}$$
При каждом $\nu \in 1 : s$ введём два вспомогательных сигнала
$$\widetilde{g}_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^k\bigl(1 - U_\nu(k)\bigr), \quad \widetilde{h}_\nu(k) = 1 + \beta_\nu(k)(1 - U_\nu(k)), \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1\,. \tag{1.8}$$
Здесь $\beta_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, удовлетворяющая условию
$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k)\,, \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,.$$
Проведём вычисления по следующим рекуррентным формулам:
$$E_0 \,=\, \mathcal{F}_N(x)\,;$$
$$D_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\,[\widetilde{g}_\nu(k)E_{\nu-1}(k) + \widetilde{g}_\nu(k + N_\nu)E_{\nu-1}(k + N_\nu)]\,,$$
$$E_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\,[\widetilde{h}_\nu(k)E_{\nu-1}(k) + \widetilde{h}_\nu(k + N_\nu)E_{\nu-1}(k + N_\nu)]\,,$$
$$k \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ называется *прямым лифтинговым преобразованием* сигнала x.

Для обращения прямого лифтингового преобразования введём при каждом $\nu \in 1 : s$ ещё два вспомогательных сигнала
$$h_\nu(k) = 1 + U_\nu(k), \quad g_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k}\bigl(1 - \beta_\nu(k)(1 + U_\nu(k))\bigr), \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1. \tag{1.9}$$
Допустим, что известен набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$. Проведём вычисления по формулам
$$E_{\nu-1}(k) \,=\, h_\nu(k)E_\nu(k) + g_\nu(k)D_\nu(k)\,,$$
$$E_{\nu-1}(k + N_\nu) \,=\, h_\nu(k + N_\nu)E_\nu(k) + g_\nu(k + N_\nu)D_\nu(k)\,,$$
$$k \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

При $\nu = 1$ получим спектр E_0, равный $\mathcal{F}_N(x)$.

1.4. Введём дальнейшие обозначения

$$H_\nu = h_1 h_2 \cdots h_\nu\,, \quad G_\nu = h_1 \cdots h_{\nu-1}\, g_\nu\,,$$
$$\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu)\,, \quad \psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu)\,.$$

Как показано в [1, 2], при каждом $t \in 1 : s$ система сигналов

$$\Big\{ \big\{ \varphi_t(j - 2^t k) \big\}_{k=0}^{N_t - 1};\ \big\{ \psi_\nu(j - 2^\nu k) \big\}_{k=0}^{N_\nu - 1},\ \nu = 1, \ldots, t \Big\} \tag{1.10}$$

образует базис в $\mathbb{C}_N$. Более того, для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ справедливо прямое лифтинговое разложение

$$x(j) \;=\; \sum_{k=0}^{N_t - 1} e_t(k)\, \varphi_t(j - 2^t k) + \sum_{\nu=1}^{t} \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j - 2^\nu k)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,,$$

где $e_t = \mathcal{F}_{N_t}^{-1}(E_t)$, $d_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$.

2. Двойственное лифтинговое преобразование

2.1. Сначала рассмотрим случай $N = 2N_1$. Возьмём сигнал $x \in \mathbb{C}_N$. Двойственное лифтинговое преобразование сигнала x осуществляется в три этапа.

Split. Переобозначим $e_0 := x$ и расщепим e_0 на два сигнала

$$\widetilde{e}_1(l) = e_0(2l)\,, \quad \widetilde{d}_1(l) = e_0(2l+1)\,, \quad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Вычислим $\widetilde{E}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{e}_1)$, $\widetilde{D}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{d}_1)$.

Predict. Предскажем значения $\widetilde{e}_1(l)$ с помощью интерполяционного сплайна $S_1(j)$ вида (1.3), определяемого условием

$$S_1(2l+1) \;=\; \widetilde{d}_1(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Положим $\sigma_1(l) = S_1(2l)$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Полусумма

$$e_1(l) = \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{e}_1(l) + \sigma_1(l)\big]\,,$$

вообще говоря, мало отличается от $\widetilde{e}_1(l)$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Согласно (1.6)

$$\big[\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1)\big](k) \;=\; \omega_N^{-k}\, U_1(k) \widetilde{D}_1(k)\,,$$

так что

$$E_1(k) := \mathcal{F}_{N_1}(e_1) \;=\; \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{E}_1(k) + \omega_N^{-k}\, U_1(k) \widetilde{D}_1(k)\big]\,, \quad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{2.1}$$

Lifting. Обновим сигнал $\widetilde{d}_1$. Для этого введём сигнал d_1, спектр которого $D_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$ определим так:

$$D_1(k) \;=\; \widetilde{D}_1(k) - 2\,\alpha_1(k)\,\omega_N^k\,E_1(k)\,, \qquad k \in 0:N_1-1\,. \tag{2.2}$$

Здесь α_1 — произвольный N-периодический сигнал, удовлетворяющий условию

$$\alpha_1(k+N_1) \;=\; -\alpha_1(k)\,, \qquad k \in 0:N_1-1\,.$$

Ясно, что правая часть (2.2) является N_1-периодическим сигналом.

Пара (D_1, E_1) называется *двойственным лифтинговым преобразованием сигнала x в спектральной форме.*

2.2. Теперь будем считать, что $N{=}2^s$. Обозначим $N_\nu{=}N/2^\nu$. В предыдущем пункте было описано двойственное лифтинговое преобразование $E_0 \to (D_1, E_1)$. Это преобразование можно продолжить:

$$E_1 \to (D_2, E_2)\,,\; E_2 \to (D_3, E_3)\,,\;\ldots\,,\; E_{s-1} \to (D_s, E_s)\,.$$

Выведем соответствующие формулы. Положим

$$\widetilde{p}_\nu(k) = \tfrac{1}{2}(1{+}U_\nu(k)),\; \widetilde{q}_\nu(k) = \omega^k_{N_{\nu-1}}\big(1{-}\alpha_\nu(k)(1{+}U_\nu(k))\big),\; k \in 0:N_{\nu-1}{-}1. \tag{2.3}$$

Здесь $U_\nu(k)$ то же, что и в (1.7), а $\alpha_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\alpha_\nu(k+N_\nu) \;=\; -\alpha_\nu(k)\,, \qquad k \in 0:N_\nu-1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{gathered}
E_0 \;=\; \mathcal{F}_N(x)\,;\\
E_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{p}_\nu(k)E_{\nu-1}(k) + \widetilde{p}_\nu(k+N_\nu)E_{\nu-1}(k+N_\nu)\right],\\
D_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{q}_\nu(k)E_{\nu-1}(k) + \widetilde{q}_\nu(k+N_\nu)E_{\nu-1}(k+N_\nu)\right],\\
k \in 0:N_\nu-1\,, \quad \nu \;=\; 1,\ldots,s.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Доказательство проводится так же, как в случае прямой лифтинговой схемы (со ссылкой на формулы (1.2), (2.1) и (2.2)).

Набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ называется *полным двойственным лифтинговым преобразованием* сигнала x.

2.3. Для восстановления спектра E_0 исходного сигнала x по $(D_1,D_2,\ldots,D_s, E_s)$ введём при каждом $\nu \in 1:s$ два вспомогательных сигнала

$$p_\nu(k) = 2\big(1+\alpha_\nu(k)(1-U_\nu(k))\big),\;\; q_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k}(1-U_\nu(k)),\;\; k \in 0:N_{\nu-1}-1. \quad (2.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Формулы (2.4) допускают обращение*

$$\begin{aligned} E_{\nu-1}(k) \;&=\; p_\nu(k)E_\nu(k) + q_\nu(k)D_\nu(k)\,, \\ E_{\nu-1}(k+N_\nu) \;&=\; p_\nu(k+N_\nu)E_\nu(k) + q_\nu(k+N_\nu)D_\nu(k)\,, \\ k \in 0:N_\nu-1\,, &\quad \nu = s, s-1, \ldots, 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $\nu = 1$ получаем $E_0 = \mathcal{F}_N(x)$.

Доказательство опирается на тождества

$$\begin{aligned} p_\nu(k)\,\widetilde{p}_\nu(k) + q_\nu(k)\,\widetilde{q}_\nu(k) &\equiv 2\,, \\ p_\nu(k)\,\widetilde{p}_\nu(k+N_\nu) + q_\nu(k)\,\widetilde{q}_\nu(k+N_\nu) &\equiv 0\,. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Справедливость равенств (2.6) проверяется справа налево. При этом используются формулы (2.4) и (2.7). □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* $\nu \in 1:s$ *и* $\alpha_\nu = \overline{\beta}_\nu$. *Тогда при* $k \in 0:N_{\nu-1}-1$

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_\nu(k) \;&=\; \tfrac{1}{2}\,h_\nu(k), \quad \widetilde{q}_\nu(k) = \overline{g_\nu(k)}, \\ \overline{p_\nu(k)} \;&=\; 2\,\widetilde{h}_\nu(k), \quad \overline{q_\nu(k)} = \widetilde{g}_\nu(k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Доказательство следует из определений (1.8), (1.9), (2.3) и (2.5).

3. Двойственные лифтинговые разложения сигнала

3.1. Введём обозначения

$$\begin{gathered} \widetilde{H}_\nu = \overline{\overline{h}}_1\overline{\overline{h}}_2\cdots\overline{\overline{h}}_\nu\,, \quad \widetilde{G}_\nu = \overline{\overline{h}}_1\cdots\overline{\overline{h}}_{\nu-1}\,\overline{\overline{g}}_\nu\,, \\ \widetilde{\varphi}_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{H}_\nu)\,, \quad \widetilde{\psi}_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{G}_\nu)\,. \end{gathered}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть* $N = 2^s$, $t \in 1:s$, $\alpha_\nu = \overline{\beta}_\nu$ *при* $\nu \in 1:t$. *Для любого сигнала* $x \in \mathbb{C}_N$ *справедливо разложение*

$$x(j) = 2^t \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\,\widetilde{\varphi}_t(j-2^tk) + \sum_{\nu=1}^{t} 2^{\nu-1} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\,\widetilde{\psi}_\nu(j-2^\nu k)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,, \quad (3.1)$$

где $e_t = \mathcal{F}_{N_t}^{-1}(E_t)$, $d_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$. *Спектры* E_t, D_ν *вычисляются рекуррентно по формулам* (2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем (2.6) в виде

$$E_{\nu-1} = p_\nu E_\nu + q_\nu D_\nu\,, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

По индукции проверяется, что

$$E_0 \;=\; p_1\, p_2 \cdots p_t\, E_t + \sum_{\nu=1}^{t} p_1 \cdots p_{\nu-1}\, q_\nu\, D_\nu\,.$$

Перепишем последнее равенство в терминах $\widetilde{h}_\nu$, $\widetilde{g}_\nu$. Согласно (2.8)

$$E_0 \;=\; 2^t\, \overline{\widetilde{h}}_1\, \overline{\widetilde{h}}_2 \cdots \overline{\widetilde{h}}_t\, E_t + \sum_{\nu=1}^{t} 2^{\nu-1}\, \overline{\widetilde{h}}_1 \cdots \overline{\widetilde{h}}_{\nu-1}\, \overline{\widetilde{g}}_\nu\, D_\nu\,.$$

Применив обратное ДПФ, получим

$$x \;=\; 2^t \mathcal{F}_N^{-1}\big(\widetilde{H}_t E_t\big) + \sum_{\nu=1}^{t} 2^{\nu-1} \mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{G}_\nu D_\nu)\,. \tag{3.2}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
\big[\mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{G}_\nu D_\nu)\big](j) \;&=\; \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{G}_\nu(l) D_\nu(l)\, \omega_N^{lj} \;= \\
&= \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{G}_\nu(l)\, \omega_N^{lj} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \omega_{N_\nu}^{-lk} \;= \\
= \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k) \Big\{ \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{G}_\nu(l)\, \omega_N^{l(j-2^\nu k)} \Big\} \;&=\; \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \widetilde{\psi}_\nu(j - 2^\nu k)\,.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Аналогично показывается, что

$$\big[\mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{H}_t E_t)\big](j) \;=\; \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\, \widetilde{\varphi}_t(j - 2^t k)\,. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), приходим к (3.1). □

Формула (3.1) называется *двойственным лифтинговым разложением* сигнала x.

3.2. Правая часть (3.1) при каждом $t \in 1:s$ содержит ровно N слагаемых (по размерности пространства $\mathbb{C}_N$). Поскольку разложение (3.1) справедливо для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$, то система сигналов

$$\Big\{\big\{\widetilde{\varphi}_t(j-2^t k)\big\}_{k=0}^{N_t-1}\,;\ \big\{\widetilde{\psi}_\nu(j-2^\nu k)\big\}_{k=0}^{N_\nu-1}\,,\ \nu=1,\ldots,t\Big\} \tag{3.5}$$

необходимо является базисом в $\mathbb{C}_N$.

4. Биортогональность прямого и двойственного базисов

Оказывается, что базис (3.5) двойственного лифтингового разложения биортогонален базису (1.10) прямого лифтингового разложения при каждом $t \in 1:s$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *При любом $\nu \in 1\!:\!s$ и любых целых l, m выполняются равенства*

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_\nu(\cdot-2^\nu l),\, \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot-2^\nu m)\rangle &= \delta_{N_\nu}(m-l)\,,\\
\langle \varphi_\nu(\cdot-2^\nu l),\, \widetilde{\psi}_\nu(\cdot-2^\nu m)\rangle &= 0\,,\\
\langle \psi_\nu(\cdot-2^\nu l),\, \widetilde{\psi}_\nu(\cdot-2^\nu m)\rangle &= \delta_{N_\nu}(m-l)\,,\\
\langle \psi_\nu(\cdot-2^\nu l),\, \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot-2^\nu m)\rangle &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Доказательство. Введём обозначение $\lambda_{lm} = \langle \varphi_\nu(\cdot-2^\nu l),\, \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot-2^\nu m)\rangle$. Поскольку

$$\begin{aligned}
\big[\mathcal{F}_N\big(\varphi_\nu(\cdot-2^\nu l)\big)\big](k) &= \omega_{N_\nu}^{-lk}\, H_\nu(k)\,,\\
\big[\mathcal{F}_N\big(\widetilde{\varphi}_\nu(\cdot-2^\nu m)\big)\big](k) &= \omega_{N_\nu}^{-mk}\, \widetilde{H}_\nu(k)\,,
\end{aligned}$$

то по обобщённому равенству Парсеваля

$$\begin{aligned}
\lambda_{lm} &= \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} H_\nu(k)\,\overline{\widetilde{H}_\nu(k)} = \\
&= \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} h_1(k)\widetilde{h}_1(k)\cdots h_\nu(k)\widetilde{h}_\nu(k)\,.
\end{aligned}$$

Отметим, что

$$h_\mu(k)\,\widetilde{h}_\mu(k) = 1 + U_\mu(k) + \beta_\mu(k)(1-U_\mu^2(k))\,.$$

Обозначим $\zeta_\mu(k) = U_\mu(k) + \beta_\mu(k)(1-U_\mu^2(k))$. Очевидно, что ζ_μ — $N_{\mu-1}$-периодический сигнал, обладающий свойством

$$\zeta_\mu(k+N_\mu) = -\zeta_\mu(k), \qquad k \in 0:N_\mu-1.$$

В принятых обозначениях

$$\lambda_{lm} = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} (1+\zeta_1(k)) \cdots (1+\zeta_\nu(k)) \,.$$

Выражение $(1+\zeta_2(k)) \cdots (1+\zeta_\nu(k))$ имеет период N_1, поэтому

$$\lambda_{lm} = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_1-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} \bigl[1+\zeta_1(k)+1+\zeta_1(k+N_1)\bigr] (1+\zeta_2(k)) \cdots (1+\zeta_\nu(k)) =$$

$$= \tfrac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} (1+\zeta_2(k)) \cdots (1+\zeta_\nu(k)) \,.$$

Повторив этот приём ν раз, получим

$$\lambda_{lm} = \tfrac{1}{N_\nu} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} = \delta_{N_\nu}(m-l).$$

Остальные соотношения в (4.1) проверяются аналогично. При доказательстве третьего соотношения используется равенство

$$g_\nu(k)\, \widetilde{g}_\nu(k) = 1 - \zeta_\nu(k) \,.$$

Вывод второго и четвёртого соотношений основан на формулах

$$h_\nu(k)\, \widetilde{g}_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{k} (1 - U_\nu^2(k)) \,,$$

$$g_\nu(k)\, \widetilde{h}_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} \bigl[1 - \beta_\nu(k)(1+U_\nu(k))\bigr] \bigl[1 + \beta_\nu(k)(1-U_\nu(k))\bigr] \,,$$

в силу которых

$$h_\nu(k+N_\nu)\, \widetilde{g}_\nu(k+N_\nu) = -\, h_\nu(k)\, \widetilde{g}_\nu(k) \,,$$

$$g_\nu(k+N_\nu)\, \widetilde{h}_\nu(k+N_\nu) = -\, g_\nu(k)\, \widetilde{h}_\nu(k) \,.$$

Предложение доказано. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Селянинова Н. А. *Прямая лифтинговая схема* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 26 апреля 2005 г.

2. Жёлудев В. А., Певный А. Б. *Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 4. С. 537–548.

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Части 1–3. СПб.: НИИММ, 2003. 288 с.