ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 32, 1992 № 11

УДК 519.677

© *1992 г.* *М. Г. БЕР, В. Н. МАЛОЗЁМОВ*

(С.-Петербург)

НАИЛУЧШИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Найдены формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ), наилучшие на классе комплекснозначных периодических сигналов с ограниченной l_2-нормой конечной разности r-го порядка. Вывод опирается на свойства дискретных функций Бернулли и общий результат о приближенном суммировании.

§ 1. Введение

Обозначим через $\mathbb{C}_N$ множество комплекснозначных N-периодических по индексу последовательностей $x=\{x_j\}$. С помощью конечной разности r-го порядка $(r\geqslant 1)$

$$\Delta^r x_j = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k x_{j+k}$$

введем класс $w_2^r M$ последовательностей $x\in\mathbb{C}_N$, у которых

$$\|\Delta^r x\| := \left(\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x_j|^2\right)^{1/2} \leqslant M.$$

Считая, что $N=mn$, где $m\geqslant 2$, $n\geqslant 1$, рассмотрим формулу приближенного суммирования

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j x_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x_{km} + R(c,x). \tag{1.1}$$

Здесь $a=\{a_j\}$ — заданный набор комплексных коэффициентов. Коэффициенты $c=\{c_k\}$ будем выбирать из следующего условия:

$$\Phi(c) := \sup_{x\in w_2^r M} |R(c,x)| \to \inf_{(c)}. \tag{1.2}$$

Дано полное решение этой задачи. Кроме того, изучено поведение решения при $r\to\infty$.

На основе общего результата получены наилучшие на классе $w_2^r M$ формулы приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье.

Из предшествующих работ отметим статью [1], в которой рассматривались наилучшие формулы приближенного суммирования в непериодическом случае. Необходимая информация из области дискретного гармонического анализа имеется, например, в [2], [3].

§ 2. Дискретные функции Бернулли

При $r=0, 1, \ldots$ положим

$$(2.1)\qquad b_r(j)=N^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k-1)^{-r}\omega_N^{jk},\qquad j\in\mathbb{Z},$$

где $\omega_N=\exp(i2\pi/N)$. Функции (2.1) назовем дискретными функциями Бернулли. Очевидно, что это N-периодические вещественные функции. При $r=0$ имеем

$$(2.2)\qquad b_0(j)=\delta_N(j)-N^{-1},$$

где $\delta_N(j)$ — единичный импульс, т. е.

$$\delta_N(j)=\begin{cases}1 & \text{при } j=0,\ \pm N,\ \pm 2N,\ldots,\\ 0 & \text{при остальных } j\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Формула (2.2) следует из элементарного соотношения

$$(2.3)\qquad N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\omega_N^{jk}=\delta_N(j),\qquad j\in\mathbb{Z}.$$

Лемма 1. *При любых $r=0, 1, \ldots$ и $j\in\mathbb{Z}$ справедливы равенства*

$$(2.4)\qquad \Delta b_{r+1}(j):=b_{r+1}(j+1)-b_{r+1}(j)=b_r(j),$$

$$(2.5)\qquad b_r(r-j)=(-1)^r b_r(j),$$

$$(2.6)\qquad \sum_{k=j}^{j+N-1}b_r(k)=0.$$

Доказательство. Имеем, согласно (2.1),

$$\Delta b_{r+1}(j)=N^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k-1)^{-r-1}\omega_N^{jk}(\omega_N^k-1)=b_r(j).$$

Далее,

$$b_r(r-j)=N^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k-1)^{-r}\omega_N^{(r-j)k}=N^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}(1-\omega_N^{-k})^{-r}\omega_N^{-jk}=$$

$$=N^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}(1-\omega_N^{N-k})^{-r}\omega_N^{j(N-k)}=(-1)^r b_r(j).$$

Наконец, согласно (2.3),

$$\sum_{k=j}^{j+N-1}b_r(k)=N^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}(\omega_N^s-1)^{-r}\sum_{k=j}^{j+N-1}\omega_N^{ks}=N^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}(\omega_N^s-1)^{-r}\times$$

$$\times \omega_N^{js} \sum_{k=j}^{j+N-1} \omega_N^{s(k-j)} = \sum_{s=1}^{N-1} (\omega_N^s - 1)^{-r} \omega_N^{js} \delta_N(s) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *При $k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ справедлива формула*

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_{2r}(j+r)\,\omega_N^{-kj} = (-1)^r [2\sin(\pi k/N)]^{-2r}.$$

Доказательство. Согласно (2.3) имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_{2r}(j+r)\,\omega_N^{-kj} = N^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} (\omega_N^s - 1)^{-2r} \omega_N^{rs} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(s-k)j} =$$

$$= \sum_{s=1}^{N-1} (\omega_N^s - 1)^{-2r} \omega_N^{rs} \delta_N(s-k) = (\omega_N^k - 1)^{-2r} \omega_N^{rk} =$$

$$= (\omega_N^{k/2} - \omega_N^{-k/2})^{-2r} = (-1)^r [2\sin(\pi k/N)]^{-2r}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любой последовательности $x \in \mathbb{C}_N$ при $r=0, 1, \ldots$ справедливо представление*

$$x_j = d + \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta^r x_k)\, b_r(j-k), \quad j \in \mathbb{Z}; \qquad d = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k. \tag{2.7}$$

Доказательство. Поскольку в обеих частях (2.7) стоят N-периодические последовательности, то достаточно рассмотреть $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Обозначим

$$I_{rj} = \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta^r x_k)\, b_r(j-k).$$

При $r=0$ имеем, согласно (2.2),

$$I_{0j} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k b_0(j-k) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k [\delta_N(j-k) - N^{-1}] = \tag{2.8}$$

$$= x_j - N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k = x_j - d.$$

В этом случае теорема доказана.

Пусть $r \geqslant 1$. Воспользуемся формулой, справедливой для произвольных последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ из $\mathbb{C}_N$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k\, \Delta b_k = -\sum_{k=0}^{N-1} b_k\, \Delta a_{k-1}.$$

С учетом (2.5) и (2.4) получим

$$I_{rj}=(-1)^r\sum_{k=0}^{N-1}(\Delta^r x_k)\,b_r(r-j+k)=$$

$$=(-1)^{r+1}\sum_{k=0}^{N-1}(\Delta^{r-1}x_k)\,b_{r-1}(r-j+k-1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}(\Delta^{r-1}x_k)\,b_{r-1}(j-k)=I_{r-1,j}.$$

Таким образом, $I_{rj}=I_{r-1,j}=\ldots=I_{0j}$. Остается сослаться на формулу (2.8). Теорема доказана.

Подставим в (2.7) последовательность $x_j=b_{r+s}(j)$, где s – целое неотрицательное число. Учитывая (2.4) и (2.6), получаем

$$b_{r+s}(j)=\sum_{k=0}^{N-1}b_s(k)\,b_r(j-k).$$

Эта формула подчеркивает сверточную природу дискретных функций Бернулли.

Полезно отметить также, что

$$b_1(j)=\begin{cases}-(2N)^{-1}(N-1) & \text{при } j=0,\\ N^{-1}[(N+1)/2-j] & \text{при } j\in\{1,2,\ldots,N-1\}.\end{cases}$$

§ 3. Общий результат о приближенном суммировании

Обратимся к формуле приближенного суммирования (1.1), в которой коэффициенты $c=\{c_k\}$ определяются из условия (1.2). Эта формула должна быть точной на константах, ибо иначе $\Phi(c)=+\infty$. Таким образом, необходимо, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n-1}c_k=\sum_{j=0}^{N-1}a_j. \tag{3.1}$$

Найдем представление для остатка $R(c,\,x)$. Согласно теореме 1 и формулам (3.1) и (2.5) имеем

$$R(c,x)=\sum_{s=0}^{N-1}\Delta^r x_s\left[\sum_{j=0}^{N-1}a_jb_r(j-s)-\sum_{k=0}^{n-1}c_kb_r(km-s)\right]=$$

$$=(-1)^r\sum_{s=0}^{N-1}\Delta^r x_s\left[\sum_{j=0}^{N-1}a_jb_r(r-j+s)-\sum_{k=0}^{n-1}c_kb_r(r-km+s)\right].$$

Введем последовательность

$$g_s=(-1)^r\left[\sum_{j=0}^{N-1}a_jb_{2r}(r-j+s)-\sum_{k=0}^{n-1}c_kb_{2r}(r-km+s)\right].$$

С учетом (2.4) приходим к формуле

$$(3.2)\qquad R(c,x)=\sum_{s=0}^{N-1}(\Delta^r X_s)(\Delta^r g_s).$$

Положим

$$(3.3)\qquad \varkappa_l=[2\sin(\pi l/N)]^2,\qquad \beta_p=\left(\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}\right)^{-1}.$$

Отметим, что $\varkappa_{N-l}=\varkappa_l$ при всех $l\in\mathbb{Z}$ и $\beta_{n-p}=\beta_p$ при $p\in\{1, 2, \ldots, N-1\}$. Нам также потребуется спектр последовательности коэффициентов $\{a_j\}$:

$$A_l=\sum_{j=0}^{N-1}a_j\omega_N^{-lj}.$$

Теорема 2. *Коэффициенты наилучшей на классе $w_2^r M$ формулы приближенного суммирования имеют вид*

$$(3.4)\qquad c_k^*=n^{-1}\left[A_0+\sum_{p=1}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{m-1}(\beta_p\varkappa_{p+sn}^{-r})A_{p+sn}\right)\omega_n^{kp}\right],$$

$$k\in\{0, 1,\ldots, n-1\}.$$

Погрешность оптимальной формулы равна

$$(3.5)\qquad \Phi(c^*)=M\Bigg\{N^{-1}\sum_{s=1}^{m-1}\varkappa_{sn}^{-r}|A_{sn}-A_0|^2+$$

$$+N^{-1}\sum_{p=1}^{n-1}\left[\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}|A_{p+sn}|^2-\beta_p\left|\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}A_{p+sn}\right|^2\right]\Bigg\}^{1/2}.$$

Доказательство. Возьмем $x\in w_2^r M$. Согласно (3.2) и неравенству Коши, для комплексных последовательностей имеем

$$|R(c, x)|\leqslant\|\Delta^r x\|\,\|\Delta^r g\|\leqslant M\|\Delta^r g\|.$$

Неравенство обращается в равенство при

$$x_s^*=M\bar{g}_s/\|\Delta^r g\|,\qquad s\in\{0, 1, \ldots, N-1\},$$

где черта над g_s обозначает комплексное сопряжение. Экстремальная последовательность x^* принадлежит классу $w_2^r M$, поэтому $\Phi(c)=M\|\Delta^r g\|$. Задача (1.2) сводится к такой задаче:

$$(3.6)\qquad \|\Delta^r g\|^2\to\inf$$

при ограничении (3.1).

Обозначим

$$G_l=\sum_{s=0}^{N-1}g_s\omega_N^{-ls}.$$

По формуле обращения,

$$g_s=N^{-1}\sum_{l=0}^{N-1}G_l\omega_N^{sl}.$$

Имеем

$$\Delta^r g_s=N^{-1}\sum_{l=0}^{N-1}G_l(\Delta^r\omega_N^{sl})=N^{-1}\sum_{l=0}^{N-1}G_l(\omega_N^l-1)^r\omega_N^{sl}.$$

Согласно равенству Парсеваля,

$$\sum_{s=0}^{N-1}|\Delta^r g_s|^2=N^{-1}\sum_{l=0}^{N-1}|\omega_N^l-1|^{2r}|G_l|^2.$$

Поскольку $|\omega_N^l-1|^2=2[1-\cos(2\pi l/N)]=\varkappa_l$ и $\varkappa_0=0$, то

$$\sum_{s=0}^{N-1}|\Delta^r g_s|^2=N^{-1}\sum_{l=1}^{N-1}\varkappa_l^r|G_l|^2. \tag{3.7}$$

Докажем, что

$$G_l=\varkappa_l^{-r}(A_l-C_l)\quad\text{при}\quad l\in\{1,\,2,\,\ldots,\,N-1\}, \tag{3.8}$$

где $\{C_l\}$ – спектр последовательности коэффициентов $\{c_k\}$, т. е.

$$C_l=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\omega_n^{-lk},\qquad l\in\{1,2,\ldots,N-1\}.$$

Учитывая лемму 2, получаем

$$(-1)^rG_l=\sum_{j=0}^{N-1}a_j\sum_{s=0}^{N-1}b_{2r}(r-j+s)\omega_N^{-ls}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}c_k\sum_{s=0}^{N-1}b_{2r}(r-km+s)\omega_N^{-ls}=\sum_{j=0}^{N-1}a_j\omega_N^{-lj}[(-1)^r\varkappa_l^{-r}]-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}c_k\omega_n^{-lk}[(-1)^r\varkappa_l^{-r}]=(-1)^r\varkappa_l^{-r}(A_l-C_l).$$

Это равносильно (3.8).

В задаче (3.6) перейдем к переменным $\{C_l\}$. Согласно (3.7) и (3.8) запишем

$$N^{-1}\sum_{l=1}^{N-1}\varkappa_l^{-r}|A_l-C_l|^2\to\inf.$$

Учитывая, что $C_{l+n}=C_l$ при любом $l\in\mathbb{Z}$, переписываем целевую функцию в виде

$$N^{-1}\left(\sum_{s=1}^{m-1}\varkappa_{sn}^{-r}|A_{sn}-C_0|^2+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}|A_{p+sn}-C_p|^2\right).$$

В силу (3.1), $C_0=A_0$. Приходим к экстремальной задаче без ограничений:

$$N^{-1}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}|A_{p+sn}-C_p|^2\to\inf.$$

Каждое C_p определяется независимо из условия

$$\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}|A_{p+sn}-C_p|^2\to\inf.$$

Получаем единственное решение

$$C_p^*=\beta_p\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}A_{p+sn},\qquad p\in\{1,2,\ldots,n-1\},$$

где β_p — коэффициент, введенный в (3.3). Формула (3.4) есть следствие формулы обращения. Таким образом, найден единственный набор оптимальных коэффициентов наилучшей на классе $w_2{}^rM$ формулы приближенного суммирования.

Погрешность наилучшей формулы равна

$$\Phi(c^*)=M\left(N^{-1}\sum_{s=1}^{m-1}\varkappa_{sn}^{-r}|A_{sn}-A_0|^2+\right.$$

$$\left.+N^{-1}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\varkappa_{p+sn}^{-r}|A_{p+sn}-C_p^*|^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда легко следует (3.5). Теорема доказана.

§ 4. Поведение решения при $r\to\infty$

В формуле (3.4) для оптимальных коэффициентов от r зависит только выражение $\beta_p\varkappa_{p+sn}^{-r}$, $p\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, $s\in\{0,1,\ldots,m-1\}$ (см. (3.3)). Это выражение имеет предел при $r\to\infty$. Чтобы указать предельные значения, введем последовательность ξ с элементами

$$\xi_{p+sn}=\begin{cases}1, & p\in\{1,2,\ldots,[(n-1)/2]\}\ \text{и}\ s=0;\\ 0, & p\in\{[n/2]+1,\ldots,n-1\}\ \text{и}\ s=0;\ p\in\{1,2,\ldots,n-1\}\ \text{и}\\ & s\in\{1,2,\ldots,m-2\};\ p\in\{1,2,\ldots,[(n-1)/2]\}\ \text{и}\ s=m-1.\\ 1, & p\in\{[n/2]+1,\ldots,n-1\}\ \text{и}\ s=m-1.\end{cases}$$

Здесь $[\alpha]$ — целая часть числа α. При четном n положим еще $\xi_{n/2}=\xi_{n/2+(m-1)n}=1/2$.

Лемма 3. *При всех $p\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, $s\in\{0,1,\ldots,m-1\}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\beta_p\varkappa_{p+sn}^{-r}=\xi_{p+sn}.$$

Технически сложное доказательство этой леммы будет опубликовано позже.

Пусть $\nu=[(n-1)/2]$. Отметим, что $\nu+[n/2]=n-1$. Согласно (3.4) и лемме 3 получаем следующее представление для предельных значений (при $r\to\infty$) оптимальных коэффициентов: при нечетном n

$$(4.1)\qquad \tilde{c}_k=n^{-1}\left(A_0+\sum_{p=1}^{\nu}A_p\omega_n^{kp}+\sum_{p=n-\nu}^{n-1}A_{p-n}\omega_n^{kp}\right)=n^{-1}\sum_{p=-\nu}^{\nu}A_p\omega_n^{kp},$$

при четном n

$$(4.2)\qquad \tilde{c}_k=n^{-1}\left[\sum_{p=-\nu}^{\nu}A_p\omega_n^{kp}+(-1)^k(A_{n/2}+A_{-n/2})/2\right].$$

Попытаемся охарактеризовать предельную формулу приближенного суммирования

$$(4.3)\qquad \sum_{j=0}^{N-1}a_jx_j\approx\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_kx_{km}.$$

Для этого введем тригонометрический полином

$$T_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}x_{km}D_n(t-km),$$

где

$$D_n(t)=\begin{cases} n^{-1}\displaystyle\sum_{p=-\nu}^{\nu}\exp(i2\pi pt/N) & \text{при нечетном } n,\\ n^{-1}\left[\cos(\pi nt/N)+\displaystyle\sum_{p=-\nu}^{\nu}\exp(i2\pi pt/N)\right] & \text{при четном } n.\end{cases}$$

Последовательность $v_j=D_n(j)$, $j\in\mathbb{Z}$, удовлетворяет соотношению

$$(4.4)\qquad v_{km}=\delta_n(k),\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Действительно, если n — нечетное число, то $n-\nu=\nu+1$. Поэтому

$$v_{km}=n^{-1}\left(\sum_{p=0}^{\nu}+\sum_{p=-\nu}^{-1}\right)\exp(i2\pi pk/n)=$$

$$=n^{-1}\sum_{p=0}^{n-1}\exp(i2\pi pk/n)=\delta_n(k).$$

При четном n будет $n-\nu=\nu+2$, так что

$$v_{km}=n^{-1}\left[(-1)^k+\left(\sum_{p=0}^{\nu}+\sum_{p=\nu+2}^{n-1}\right)\exp(i2\pi pk/n)\right]=$$

$$=n^{-1}\sum_{p=0}^{n-1}\exp(i2\pi pk/n)=\delta_n(k).$$

Согласно (4.4), $T_n(pm)=x_{pm}$, $p\in\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Значит, полином $T_n(t)$ является интерполяционным. След $T_n(t)$ на $\mathbb{Z}$ есть последовательность вида

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_{km} v_{j-km}. \tag{4.5}$$

Множество таких последовательностей обозначим w.

Теорема 3. *Коэффициенты* $\{\tilde{c}_k\}$ *характеризуются тем, что соответствующая формула приближенного суммирования* (4.3) *точна на последовательностях из* w.

Доказательство. При $x\in w$ согласно (4.5) и четности $\{v_j\}$ имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j x_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_{km} \sum_{j=0}^{N-1} a_j v_{km-j}.$$

Условие точности формулы (4.3) на последовательностях из w приводит к соотношению

$$\tilde{c}_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j v_{km-j}, \qquad k\in\{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

По теореме о свертке и формуле обращения,

$$\tilde{c}_k = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} A_s V_s \omega_N^{(km)s} = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} A_s V_s \omega_n^{ks}. \tag{4.6}$$

Здесь $\{A_s\}$ и $\{V_s\}$ — спектры последовательностей $\{a_j\}$ и $\{v_j\}$ соответственно. При нечетном n

$$V_s = \sum_{j=0}^{N-1} v_j \omega_N^{-sj} = n^{-1} \sum_{p=-\nu}^{\nu} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(p-s)j} = m \sum_{p=-\nu}^{\nu} \delta_N(p-s) =$$

$$= m\left[\sum_{p=0}^{\nu} \delta_N(p-s) + \sum_{p=N-\nu}^{N-1} \delta_N(p-s)\right].$$

При четном n

$$v_j = n^{-1} \sum_{p=-n/2}^{n/2} \xi_p \omega_N^{jp},$$

где $\xi_p=1$ при $p\in\{-n/2+1, \ldots, n/2-1\}$ и $\xi_p={}^1/_2$ при $p=\pm n/2$. Поэтому, аналогично предыдущему,

$$V_s = m \sum_{p=-n/2}^{n/2} \xi_p \delta_N(p-s) = m\left\{\sum_{p=0}^{\nu} \delta_N(p-s) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=N-\nu}^{N-1} \delta_N(p-s) + \frac{1}{2}\left[\delta_N\left(\frac{n}{2}-s\right) + \delta_N\left(N-\frac{n}{2}-s\right)\right]\right\}.$$

Подставляя найденные выражения для V_s в формулу (4.6), приходим к (4.1) и (4.2). Теорема доказана.

Близкий мотив встречается в работе [4] (см. также [5, с. 341—342]).

§ 5. Приближенное вычисление ДПФ

Напомним, что $N=mn$, где $m\geqslant 2$, $n\geqslant 1$. Рассмотрим формулу приближенного вычисления ДПФ:

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_j\omega_N^{-lj} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(l)} x_{km} + R_l(c^{(l)}, x).$$

Здесь $a_j=\omega_N^{-lj}$ при $l\in\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Теорема 4. *Коэффициенты наилучшей на классе $w_2^r M$ формулы приближенного вычисления* ДПФ *при $l=p+sn$ имеют вид*

$$c_k^{(p+sn)} = \begin{cases} m, & p=s=0; \\ 0, & p=0, \quad s\in\{1,2,\ldots,m-1\}; \\ (m\beta)_p \varkappa_{p+sn}^{-r}\omega_n^{-pk}, & p\in\{1,2,\ldots,n-1\}, \quad s\in\{0,1,\ldots,m-1\}. \end{cases}$$

Погрешность оптимальной формулы равна

$$\Phi_l(c^{(p+sn)}) = \begin{cases} MN^{1/2}\left(\sum\limits_{q=1}^{m-1}\varkappa_{qn}^{-r}\right)^{1/2}, & p=s=0, \\ MN^{1/2}\varkappa_{sn}^{-r/2}, & p=0, \quad s\in\{1,2,\ldots,m-1\}; \\ MN^{1/2}\varkappa_{p+sn}^{-r/2}(1-\beta_p\varkappa_{p+sn}^{-r})^{1/2}, & p\in\{1,2,\ldots,n-1\}, \quad s\in\{0,1,\ldots,m-1\} \end{cases}$$

Доказательство. Зафиксируем $l\in\{0, 1,\ldots, N-1\}$. При $\alpha\in\in\{0, 1,\ldots, N-1\}$ получим

$$A_\alpha = \sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{-lj}\omega_N^{-\alpha j} = \sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{-(l+\alpha)j} = N\delta_N(l+\alpha). \tag{5.1}$$

Теперь заключение теоремы следует из теоремы 2.

Проверим, например, случай $p\in\{1, 2,\ldots, n-1\}$, $s\in\{0, 1,\ldots, m-1\}$. Поскольку $l=p+sn$, то, согласно (5.1), $A_{N-p-sn}=N$ и $A_\alpha=0$ при остальных $\alpha\in\{0, 1,\ldots, N-1\}$. Учитывая, что $N-p-sn=(n-p)+(m-1-s)n$, в силу (3.4) приходим к формуле

$$c_k^{(p+sn)}=n^{-1}[(\beta_{n-p}\varkappa_{N-p-sn}^{-r})N\omega_n^{k(n-p)}].$$

Как отмечалось в § 3, $\beta_{n-p}=\beta_p$ при $p\in\{1, 2,\ldots, n-1\}$ и $\varkappa_{N-l}=\varkappa_l$ при всех $l\in\mathbb{Z}$. Значит,

$$c_k^{(p+sn)}=(m\beta_p)\varkappa_{p+sn}^{-r}\omega_n^{-pk}.$$

Согласно (3.5),

$$\Phi(c^{(p+sn)})=M[N(\varkappa_{p+sn}^{-r}-\beta_p\varkappa_{p+sn}^{-2r})]^{1/2}=MN^{1/2}\varkappa_{p+sn}^{-r/2}(1-\beta_p\varkappa_{p+sn}^{-r})^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Выпишем наилучшие на классе $w_2^r M$ приближенные формулы для спектра $\{X_l\}$ сигнала $\{x_j\}$:

$$X_0 \approx m \sum_{k=0}^{n-1} x_{km}, \quad X_{sn} \approx 0 \quad \text{при} \quad s = \{1, 2, \ldots, m-1\},$$

$$X_{p+sn} \approx (m\beta_p) \varkappa_{p+sn}^{-r} \sum_{k=0}^{n-1} x_{km} \omega_n^{-pk} \quad \text{при} \quad p \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

$$s \in \{0, 1, \ldots m-1\}.$$

Эти формулы содержательны при $m \in 2, \ldots, 5$. При $m=6$ справедлива формула

$$\varkappa_n = [2\sin(\pi n/N)]^2 = [2\sin(\pi/6)]^2 = 1.$$

В этом случае погрешность $\Phi_l(c^{(n)})$ равна $MN^{1/2}$. Она не стремится к нулю при $r \to \infty$.

Список литературы

1. *Mangasarian O. L., Schumaker L. L.* Best summation formulae and discrete splines // SIAM J. Numer. Analys. 1973. V. 10. № 3. P. 448–459.
2. *Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
3. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
4. *Schoenberg I. J.* Notes on spline functions I. The limits of the interpolating periodic spline functions as their degree tends to infinity // Indag. Math. 1972. V. 34. № 5. P. 412–422.
5. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 30.10.91