ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

5 декабря 2013 г.

1°. Рассмотрим интегральный функционал вида

$$J(x) = \int_a^b F\big(t, x(t), x'(t)\big)\,dt. \tag{1}$$

Здесь $F(t, y, z)$ — функция трёх переменных, заданная и непрерывная на некотором открытом связном множестве $U \subset \mathbb{R}^3$. Функционал $J(x)$ определён на функциях $x = x(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, и таких, что параметрическая кривая

$$\Gamma(x) = \Big\{ \big(t, x(t), x'(t)\big) \mid t \in [a, b] \Big\}$$

содержится в U. Множество таких функций x обозначим Ω° и назовём *естественной областью определения* функционала $J(x)$.

В линейном пространстве $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций введём норму

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} \big|x(t)\big| + \max_{t \in [a,b]} \big|x'(t)\big|.$$

В качестве подготовительного шага докажем, что естественная область определения Ω° функционала $J(x)$ открыта в $C^1[a, b]$.

2°. Зафиксируем функцию $x_0 \in \Omega^{\circ}$. Наряду с кривой $\Gamma_0 = \Gamma(x_0)$ рассмотрим её окрестность (“трубку”)

$$\Gamma_\delta = \Big\{ (t, u, v) \mid t \in [a, b],\ \big|u - x_0(t)\big| + \big|v - x_0'(t)\big| \leqslant \delta \Big\}, \quad \delta > 0. \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

ЛЕММА 1. *При любом $\delta > 0$ множество Γ_δ ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Ограниченность Γ_δ следует из условия $t \in [a, b]$ и неравенства

$$|u| + |v| \leqslant \delta + \|x_0\|_1.$$

Проверим замкнутость Γ_δ.

Пусть последовательность точек (t_k, u_k, v_k) принадлежит Γ_δ и сходится к (t_*, u_*, v_*). В частности, $t_k \to t_*$ и $t_* \in [a, b]$. По определению Γ_δ имеем

$$\bigl|u_k - x_0(t_k)\bigr| + \bigl|v_k - x_0'(t_k)\bigr| \leqslant \delta.$$

В пределе при $k \to \infty$ получаем

$$\bigl|u_* - x_0(t_*)\bigr| + \bigl|v_* - x_0'(t_*)\bigr| \leqslant \delta.$$

Это значит, что предельная точка (t_*, u_*, v_*) принадлежит Γ_δ.

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *Существует $\delta_0 > 0$, такое, что $\Gamma_{\delta_0} \subset U$.*

Доказательство. Допустим противное. В этом случае для любой убывающей и стремящейся к нулю последовательности положительных чисел $\{\delta_k\}$ найдутся точки (t_k, u_k, v_k) из Γ_{δ_k}, которые не принадлежат U,

$$(t_k, u_k, v_k) \notin U, \ \ k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

По определению Γ_{δ_k} имеем

$$\bigl|u_k - x_0(t_k)\bigr| + \bigl|v_k - x_0'(t_k)\bigr| \leqslant \delta_k. \tag{4}$$

Последовательность $\bigl\{(t_k, u_k, v_k)\bigr\}$ ограничена, поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что

$$(t_k, u_k, v_k) \to (t_*, u_*, v_*) \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{5}$$

где $t_* \in [a, b]$. Переходя в (4) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\bigl|u_* - x_0(t_*)\bigr| + \bigl|v_* - x_0'(t_*)\bigr| = 0,$$

то есть $u_* = x_0(t_*)$, $v_* = x_0'(t_*)$. Как следствие,

$$(t_*, u_*, v_*) = \bigl(t_*, x_0(t_*), x_0'(t_*)\bigr).$$

Значит, точка (t_*, u_*, v_*) принадлежит Γ_0.

По условию $x_0 \in \Omega^{\mathrm{o}}$, так что $\Gamma_0 \subset U$. В частности, $(t_*, u_*, v_*) \in U$. В силу открытости множества U вместе с точкой (t_*, u_*, v_*) ему принадлежат и близкие точки. Но это противоречит совокупности условий (5) и (3).

Лемма доказана. □

В дальнейшем с функцией $x_0 \in \Omega^o$ мы будем связывать ограниченное и замкнутое (компактное) множество Γ_{δ_0} вида (2), содержащееся в $U \subset \mathbb{R}^3$.

Множество Γ_{δ_0} можно представить в другом виде:

$$\Gamma_{\delta_0} = \Big\{ \big(t, x_0(t) + u, x_0'(t) + v\big) \mid t \in [a,b],\ |u| + |v| \leqslant \delta_0 \Big\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Естественная область определения Ω^o функционала $J(x)$ открыта в $C^1[a,b]$.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $x_0 \in \Omega^o$. По лемме 2 существует $\delta_0 > 0$, такое, что $\Gamma_{\delta_0} \subset U$. Покажем, что $x_0 + h \in \Omega^o$ при условии $\|h\|_1 \leqslant \delta_0$, то есть, что $\Gamma(x_0 + h) \subset U$. Для этого достаточно проверить включение

$$\Gamma(x_0 + h) \subset \Gamma_{\delta_0} \quad \text{при} \quad \|h\|_1 \leqslant \delta_0. \tag{6}$$

Пусть точка $\big(t, x_0(t) + h(t), x_0'(t) + h'(t)\big)$ принадлежит $\Gamma(x_0 + h)$. Обозначим $u = h(t)$, $v = h'(t)$. По условию $|u| + |v| \leqslant \delta_0$, поэтому

$$\big(t, x_0(t) + u, x_0'(t) + v\big) \in \Gamma_{\delta_0}.$$

Включение (6), а вместе с ним и теорема, доказаны. □

Таким образом, для каждой функции $x_0 \in \Omega^o$ существует $\delta_0 > 0$, такое, что

$$x_0 + h \in \Omega^o \quad \text{при} \quad \|h\|_1 \leqslant \delta_0.$$

3°. Переходим к вопросу о первом дифференциале функционала $J(x)$. Будем предполагать, что подынтегральная функция $F(t, y, z)$ непрерывно дифференцируема на множестве U, $F \in C^1(U)$.

Дифференцируемость функционала $J(x)$ в точке $x = x_0$ связана с разложением

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + l(x_0; h) + o\big(\|h\|_1\big), \tag{7}$$

в котором $l(x_0; h)$ — линейный непрерывный функционал на $C^1[a,b]$ и $o\big(\|h\|_1\big)/\|h\|_1 \to 0$ при $\|h\|_1 \to 0$. Покажем, что разложение (7) при $x_0 \in \Omega^o$ и $\|h\|_1 \leqslant \delta_0$ возможно.

Запишем

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = \int_a^b \Big[F\big(t, x_0(t) + h(t), x_0'(t) + h'(t)\big) - F\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big) \Big] dt.$$

Подынтегральную функцию обозначим через $H(t)$. При фиксированном t отрезок, соединяющий точки $\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)$ и $\big(t, x_0(t) + h(t), x_0'(t) + h'(t)\big)$ содержится в Γ_{δ_0}, а значит, и в U. По теореме о среднем для функции двух переменных имеем

$$H(t) = \tilde{F}_x' h + \tilde{F}_{x'}' h' = F_x' h + F_{x'}' h' + \big[(\tilde{F}_x' - F_x') h + (\tilde{F}_{x'}' - F_{x'}') h' \big].$$

Здесь частные производные F'_x и $F'_{x'}$ функции F по второму и третьему аргументу вычисляются в точке $\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)$, а $\tilde{F}'_x$ и $\tilde{F}'_{x'}$ — в средней точке

$$\big(t, x_0(t) + \theta h(t), x_0'(t) + \theta h'(t)\big).$$

Величина $\theta \in (0,1)$ зависит от t. Приходим к представлению

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = \int_a^b H(t)dt = \int_a^b [F'_x h + F'_{x'} h']dt +$$

$$+ \int_a^b \big[(\tilde{F}'_x - F'_x)h + (\tilde{F}'_{x'} - F'_{x'})h'\big]dt =: l(x_0; h) + \omega_1(x_0; h).$$

Функционал

$$l(x_0; h) = \int_a^b \Big[F'_x\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)h(t) + F'_{x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)h'(t)\Big]dt \qquad (8)$$

является линейным и ограниченным на $C^1[a,b]$. Его линейность очевидна. Ограниченность проверяется так:

$$\big|l(x_0; h)\big| \leqslant \|h\|_1 \int_a^b \big[|F'_x| + |F'_{x'}|\big]dt =: K_1\|h\|_1.$$

Из ограниченности следует непрерывность $l(x_0; h)$ на $C^1[a,b]$. Действительно,

$$\big|l(x_0; h_1) - l(x_0; h_2)\big| = \big|l(x_0; h_1 - h_2)\big| \leqslant K_1\|h_1 - h_2\|_1.$$

Займёмся оценкой слагаемого $\omega_1(x_0; h)$. Напомним, что $\|h\|_1 \leqslant \delta_0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Функции F'_x и $F'_{x'}$, как функции трёх переменных непрерывны на компактном (по лемме 1) множестве Γ_{δ_0}, а значит, и равномерно непрерывны на нём. Поэтому по $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta \in (0, \delta_0/2]$, что

$$\Big|F'_x\big(t, x_0(t) + u, x_0'(t) + v\big) - F'_x\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$\Big|F'_{x'}\big(t, x_0(t) + u, x_0'(t) + v\big) - F'_{x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

при всех $t \in [a,b]$, как только $|u| < \delta$, $|v| < \delta$ (в этом случае $|u| + |v| < 2\delta \leqslant \delta_0$, так что аргументы у производных F'_x и $F'_{x'}$ содержатся в Γ_{δ_0}). В частности,

$$|\tilde{F}'_x - F'_x| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad |\tilde{F}'_{x'} - F'_{x'}| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

при всех $t \in [a,b]$, как только $\|h\|_1 < \delta$. Теперь при $\|h\|_1 < \delta$ имеем

$$\big|\omega_1(x_0; h)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b \big[|h| + |h'|\big]dt \leqslant \varepsilon\|h\|_1,$$

а это и означает, что $\omega_1(x_0; h) = o\big(\|h\|_1\big)$. Справедливость разложения (7) установлена.

4°. Покажем, что в разложении (7) линейный функционал $l(x_0;h)$ определяется единственным образом. Пусть

$$J(x_0+h)-J(x_0)=l_1(x_0;h)+o\big(\|h\|_1\big),$$
$$J(x_0+h)-J(x_0)=l_2(x_0;h)+o\big(\|h\|_1\big).$$

Тогда $l_1(x_0;h)-l_2(x_0;h)=o\big(\|h\|_1\big)$ при $\|h\|_1\leqslant\delta_0$. Покажем, что

$$l_1(x_0;h)=l_2(x_0;h)\quad\forall h\in C^1[a,b].$$

Зафиксируем $h_0\in C^1[a,b]$, $h_0\not\equiv 0$. При малых $\lambda>0$ будет $\|\lambda h_0\|_1\leqslant\delta_0$ и

$$l_1(x_0;\lambda h_0)-l_2(x_0;\lambda h_0)=o\big(\|\lambda h_0\|_1\big).$$

В силу линейности функционалов l_1 и l_2 при положительных λ последнее равенство можно переписать в виде

$$l_1(x_0;h_0)-l_2(x_0;h_0)=\frac{o\big(\|\lambda h_0\|_1\big)}{\|\lambda h_0\|_1}\|h_0\|_1.$$

В пределе при $\lambda\to+0$ получим $l_1(x_0;h_0)=l_2(x_0;h_0)$. Равенство $l_1(x_0;0)=$ $=l_2(x_0;0)=0$ следует из линейности функционалов. Таким образом, $l_1(x_0;h)=l_2(x_0;h)$ при всех $h\in C^1[a,b]$.

Единственный линейный непрерывный функционал $l(x_0;h)$ в формуле (7) называется *первым дифференциалом* (*Фреше*) *функционала* $J(x)$ *вида* (1) *в точке* $x=x_0$ и обозначается $dJ(x_0;h)$. С учётом формулы (8) приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 2. *При* $F\in C^1(U)$ *интегральный функционал* $J(x)$ *вида* (1) *дифференцируем в каждой точке* x_0 *своей естественной области определения* Ω^o *и*

$$dJ(x_0;h)=\int_a^b[F'_xh+F'_{x'}h']dt.$$

При этом справедливо разложение

$$J(x_0+h)=J(x_0)+dJ(x_0;h)+o\big(\|h\|_1\big),$$

где $o\big(\|h\|_1\big)/\|h\|_1\to 0$ *при* $\|h\|_1\to 0$.

5°. Теперь предположим, что подынтегральная функция $F(t, y, z)$ в определении функционала $J(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве U, $F \in C^2(U)$. В этом случае для разности $H(t)$ из п. 3° можно записать разложение

$$H(t) = F'_x h + F'_{x'} h' + \tfrac{1}{2}\big[F''_{xx} h^2 + 2F''_{xx'} hh' + F''_{x'x'} (h')^2\big] +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big\{\big[\tilde{F}''_{xx} - F''_{xx}\big]h^2 + 2\big[\tilde{F}''_{xx'} - F''_{xx'}\big]hh' + \big[\tilde{F}''_{x'x'} - F''_{x'x'}\big](h')^2\Big\}.$$

Интегрируя, получаем

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = dJ(x_0; h) + \tfrac{1}{2} Q(x_0; h) + \omega_2(x_0; h), \tag{9}$$

где

$$Q(x_0; h) = \int_a^b \big[F''_{xx} h^2 + 2F''_{xx'} hh' + F''_{x'x'}(h')^2\big]\,dt. \tag{10}$$

Оценку для $\omega_2(x_0; h)$ проведём по той же схеме, что и для $\omega_1(x_0; h)$. По $\varepsilon > 0$ найдём $\delta \in (0, \delta_0/2]$, такое, что

$$|\tilde{F}''_{xx} - F''_{xx}| < \frac{2\varepsilon}{b-a}, \quad |\tilde{F}''_{xx'} - F''_{xx'}| < \frac{2\varepsilon}{b-a}, \quad |\tilde{F}''_{x'x'} - F''_{x'x'}| < \frac{2\varepsilon}{b-a}$$

при всех $t \in [a, b]$ и $\|h\|_1 < \delta$. В этом случае

$$\big|\omega_2(x_0; h)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b \big[|h|^2 + 2|hh'| + |h'|^2\big]\,dt \leqslant \varepsilon \|h\|_1^2.$$

Значит, $\omega_2(x_0; h) = o\big(\|h\|_1^2\big)$. Разложение (9) принимает вид

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + dJ(x_0; h) + \tfrac{1}{2} Q(x_0; h) + o\big(\|h\|_1^2\big). \tag{11}$$

Функционал $Q(x_0; h)$ определён на $C^1[a, b]$ и обладает тем свойством, что

$$Q(x_0; \lambda h) = \lambda^2 Q(x_0; h) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Это свойство гарантирует его единственность. Действительно, допустим, что наряду с (11) справедливо разложение

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + dJ(x_0; h) + \tfrac{1}{2} Q_1(x_0; h) + o\big(\|h\|_1^2\big),$$

в котором функционал $Q_1(x_0; h)$ обладает свойством

$$Q_1(x_0; \lambda h) = \lambda^2 Q_1(x_0; h). \tag{13}$$

Тогда
$$Q(x_0;h) - Q_1(x_0;h) = o\big(\|h\|_1^2\big) \quad \text{при} \quad \|h\|_1 \leqslant \delta_0.$$
Покажем, что $Q(x_0;h) = Q_1(x_0;h)$ при всех $h \in C^1[a,b]$.

Зафиксируем функцию $h_0 \in C^1[a,b]$, $h_0 \not\equiv 0$. При малых $\lambda > 0$ будет $\|\lambda h_0\| \leqslant \delta_0$ и
$$Q(x_0;\lambda h_0) - Q_1(x_0;\lambda h_0) = o\big(\|\lambda h_0\|_1^2\big).$$
В силу (12) и (13) при положительных λ последнее равенство можно переписать в виде
$$Q(x_0;h_0) - Q_1(x_0;h_0) = \frac{o\big(\|\lambda h_0\|_1^2\big)}{\|\lambda h_0\|_1^2}\|h_0\|_1^2.$$
В пределе при $\lambda \to +0$ получаем $Q(x_0;h_0) = Q_1(x_0;h_0)$.

Равенства $Q(x_0;0) = Q_1(x_0;0) = 0$ следуют из (12) и (13).

Функционал $Q(x_0;h)$ вида (10) называется *вторым дифференциалом* (*Фреше*) *функционала* $J(x)$ *в точке* $x = x_0$ и обозначается $d^2J(x_0;h)$.

Подведём итог.

ТЕОРЕМА 3. *При* $F \in C^2(U)$ *функционал* $J(x)$ *вида* (1) *дважды дифференцируем в каждой точке* x_0 *своей естественной области определения* Ω^o *и*
$$d^2J(x_0;h) = \int_a^b [F''_{xx}h^2 + 2F''_{xx'}hh' + F''_{x'x'}(h')^2]dt,$$
где
$$F''_{xx} = F''_{xx}\big(t,x_0(t),x_0'(t)\big), \quad F''_{xx'} = F''_{xx'}\big(t,x_0(t),x_0'(t)\big),$$
$$F''_{x'x'} = F''_{x'x'}\big(t,x_0(t),x_0'(t)\big).$$
При этом справедливо разложение
$$J(x_0+h) = J(x_0) + dJ(x_0;h) + \tfrac{1}{2}d^2J(x_0;h) + o\big(\|h\|_1^2\big),$$
где $o\big(\|h\|_1^2\big)/\|h\|_1^2 \to 0$ *при* $\|h\|_1 \to 0$.