

ПРЕДЕЛ ДИСКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

5 декабря 2009 г.

В [1] было показано, как строить дискретную поверхность Кунса, натянутую на сеть из остовных кривых. Остовные кривые при этом задавались вектор-функциями целочисленного аргумента. Теперь рассмотрим случай, когда сеть кривых задаётся вектор-функциями непрерывного аргумента, а остовные кривые для поверхности Кунса определяются при помощи дискретизации. Целью данного доклада является нахождение предела дискретных поверхностей Кунса при шаге дискретизации, стремящемся к нулю, и установление свойства минимальной нормы для предельной поверхности.

1°. Пусть m_1, m_2 — натуральные числа, отличные от единицы, и задан набор непрерывных m_2 -периодических d -мерных вектор-функций $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{m_1-1}$ и набор непрерывных m_1 -периодических d -мерных вектор-функций $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{m_2-1}$. Предположим, что выполняются равенства

$$\mathbf{f}_i(j) = \mathbf{g}_j(i), \quad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \quad (1)$$

Для натуральных n_1 и n_2 , отличных от единицы, проведём дискретизацию вектор-функций $\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,n_2}(v) &:= \mathbf{f}_i\left(\frac{v}{n_2}\right), & i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}; \\ \mathbf{g}_{j,n_1}(u) &:= \mathbf{g}_j\left(\frac{u}{n_1}\right), & j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Из (1) следует, что

$$\mathbf{f}_{i,n_2}(jn_2) = \mathbf{g}_{j,n_1}(in_1), \quad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \quad (2)$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

Положим $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$. Ясно, что вектор-функции \mathbf{f}_{i,n_2} периодические с периодом N_2 , а вектор-функции \mathbf{g}_{j,n_1} периодические с периодом N_2 . Напомним метод построения дискретной поверхности Кунса по этим функциям, приведённый в [1].

Пусть r_1, r_2 — натуральные числа. Определим H_{0,n_1}^u как дискретный N_1 -периодический сплайн порядка r_1 , удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$H_{0,n_1}^u(kn_1) = \delta_{m_1}(k), \quad k \in 0 : m_1 - 1,$$

а H_{0,n_2}^v — как дискретный N_2 -периодический сплайн порядка r_2 , удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$H_{0,n_2}^v(kn_2) = \delta_{m_2}(k), \quad k \in 0 : m_2 - 1.$$

Смешивающие функции определим формулами

$$\begin{aligned} H_{i,n_1}^u(u) &= H_{0,n_1}^u(u - in_1), & i \in 0 : m_1 - 1, & u \in \mathbb{Z}, \\ H_{j,n_2}^v(v) &= H_{0,n_2}^v(v - jn_2), & j \in 0 : m_2 - 1, & v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Все функции H_{i,n_1}^u являются дискретными периодическими сплайнами порядка r_1 , а все функции H_{j,n_2}^v — дискретными периодическими сплайнами порядка r_2 .

Дискретная поверхность Кунса определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}(u, v) &= \sum_{i=0}^{m_1-1} H_{i,n_1}^u(u) \mathbf{f}_{i,n_2}(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_{j,n_2}^v(v) \mathbf{g}_{j,n_1}(u) - \\ &- \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_{i,n_1}^u(u) H_{j,n_2}^v(v) \mathbf{g}_{j,n_1}(in_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как для остовных функций выполнено условие согласования (2), то вектор-функция $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u, v)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), & j \in 0 : m_2 - 1, & u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}_{n_1,n_2}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), & i \in 0 : m_1 - 1, & v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть фиксированы числа m_1, m_2, r_1, r_2 и остовные вектор-функции $\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j$. Для каждой пары натуральных n_1 и n_2 , отличных от единицы, значения вектор-функции $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u, v)$ образуют множество из $N_1 N_2$ точек в пространстве \mathbb{R}^d . Покажем, как найти предел этого множества при неограниченном возрастании n_1 и n_2 .

2°. Воспользуемся предельным соотношением для дискретных периодических сплайнов, полученным в [2]. Пусть m — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический B -сплайн первого порядка как m -периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_{m,1}(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{при } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m - 1], \\ t - m + 1, & \text{при } t \in (m - 1, m]. \end{cases} \quad (5)$$

Периодические B -сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_{m,\nu}(t) = \int_0^m P_{m,\nu-1}(s) P_{m,1}(t - s) ds, \quad \nu = 2, 3, \dots \quad (6)$$

В [2] показано, что для дискретных интерполяционных сплайнов порядка r существует предельный сплайн, представимый в виде линейной комбинации сдвигов B -сплайнов $P_{m,r}$. Значит, найдётся сплайн

$$S_1(t) = \sum_{l=0}^{m_1-1} c_{1,l} P_{m_1,r_1}(t - l),$$

такой, что

$$\left| H_{0,n_1}^u(u) - S_1\left(\frac{u}{n_1}\right) \right| \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} 0 \quad \text{равномерно по } u. \quad (7)$$

Аналогично, найдётся сплайн

$$S_2(t) = \sum_{l=0}^{m_2-1} c_{2,l} P_{m_2,r_2}(t - l),$$

такой, что

$$\left| H_{0,n_2}^v(v) - S_2\left(\frac{v}{n_2}\right) \right| \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} 0 \quad \text{равномерно по } v.$$

В [2] доказано, что $P_{m,r} \in C^{2r-2}$. Поэтому $S_1 \in C^{2r_1-2}$, $S_2 \in C^{2r_2-2}$.

ЛЕММА. *Справедливы предельные соотношения*

$$\begin{aligned} H_{0,n_1}^u(\lfloor xn_1 \rfloor) &\xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} S_1(x) && \text{равномерно по } x \in \mathbb{R}, \\ H_{0,n_2}^v(\lfloor yn_2 \rfloor) &\xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} S_2(y) && \text{равномерно по } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое соотношение. Так как функция S_1 непрерывна, то она равномерно непрерывна на любом отрезке. Из периодичности следует, что она равномерно непрерывна и на всей вещественной оси.

Для $x \in \mathbb{R}$ положим $u = \lfloor xn_1 \rfloor$. Имеем

$$\left\| H_{0,n_1}^u(\lfloor xn_1 \rfloor) - S_1(x) \right\| \leq \left\| H_{0,n_1}^u(u) - S_1\left(\frac{u}{n_1}\right) \right\| + \left\| S_1\left(\frac{u}{n_1}\right) - S_1(x) \right\|.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю равномерно по u в силу (7). Второе слагаемое также стремится к нулю равномерно по x в силу того, что S_1 равномерно непрерывна и выполняется неравенство

$$\left| \frac{u}{n_1} - x \right| = \left| \frac{\lfloor xn_1 \rfloor - xn_1}{n_1} \right| \leq \frac{1}{n_1}.$$

Второе предельное соотношение доказывается аналогичным образом. \square

Определим вектор-функцию $\mathbf{c}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(x, y) := & \sum_{i=0}^{m_1-1} S_1(x-i) \mathbf{f}_i(y) + \sum_{j=0}^{m_2-1} S_2(y-j) \mathbf{g}_j(x) - \\ & - \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} S_1(x-i) S_2(y-j) \mathbf{g}_j(i). \end{aligned} \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо предельное соотношение*

$$\mathbf{c}_{n_1, n_2}(\lfloor xn_1 \rfloor, \lfloor yn_2 \rfloor) \xrightarrow{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \mathbf{c}(x, y) \quad \text{равномерно по } x, y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Согласно формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1, n_2}(\lfloor xn_1 \rfloor, \lfloor yn_2 \rfloor) = & \sum_{i=0}^{m_1-1} H_{i, n_1}^u(\lfloor xn_1 \rfloor) \mathbf{f}_{i, n_2}(\lfloor yn_2 \rfloor) + \\ & + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_{j, n_2}^v(\lfloor yn_2 \rfloor) \mathbf{g}_{j, n_1}(\lfloor xn_1 \rfloor) - \\ & - \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_{i, n_1}^u(\lfloor xn_1 \rfloor) H_{j, n_2}^v(\lfloor yn_2 \rfloor) \mathbf{g}_{j, n_1}(in_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим слагаемые выражения (9) по отдельности. Используя лемму, получаем

$$\begin{aligned} H_{i, n_1}^u(\lfloor xn_1 \rfloor) &= H_{0, n_1}^u(\lfloor (x-i)n_1 \rfloor) \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} S_1(x-i), \\ H_{j, n_2}^v(\lfloor yn_2 \rfloor) &= H_{0, n_2}^v(\lfloor (y-j)n_2 \rfloor) \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} S_2(y-j). \end{aligned}$$

Вектор-функции \mathbf{f}_i непрерывны и периодичны, поэтому они равномерно непрерывны на \mathbb{R} . Кроме того, справедливо неравенство

$$\left| \frac{\lfloor yn_2 \rfloor}{n_2} - y \right| < \frac{1}{n_2}.$$

Следовательно,

$$\left\| \mathbf{f}_i\left(\frac{\lfloor yn_2 \rfloor}{n_2}\right) - \mathbf{f}_i(y) \right\| \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} 0 \quad \text{равномерно по } y.$$

Значит, имеет место предельное соотношение

$$\mathbf{f}_{i,n_2}(\lfloor yn_2 \rfloor) = \mathbf{f}_i\left(\frac{\lfloor yn_2 \rfloor}{n_2}\right) \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} \mathbf{f}_i(y) \quad \text{равномерно по } y.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\mathbf{g}_{j,n_1}(\lfloor xn_1 \rfloor) \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} \mathbf{g}_j(x) \quad \text{равномерно по } x.$$

Заметим, что $\mathbf{g}_{j,n_1}(in_1) = \mathbf{g}_j(i)$. Таким образом, все слагаемые выражения (9) сходятся к соответствующим слагаемым правой части (8).

Теорема доказана. \square

ПРИМЕР. Пусть $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $r_1 = r_2 = 2$. В качестве остовных кривых возьмём кривые, которые использовались в [4] для построения поверхности в виде завязанной в узел трубки. На рис. 1 синим цветом изображены кривые \mathbf{f}_0 и \mathbf{f}_1 , зелёным цветом — кривые \mathbf{g}_0 , \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 , а кружками выделены точки пересечений. На рис. 2 приведена дискретная поверхность Кунса для значений $n_1 = 4$ и $n_2 = 25$, а на рис. 3 — для значений $n_1 = 6$, $n_2 = 50$, при этом синим цветом выделены остовные кривые \mathbf{f}_{i,n_2} , а зелёным — кривые \mathbf{g}_{j,n_1} . Предельная поверхность представлена на рис. 4.

3°. Покажем, что предельная поверхность (8) является частным случаем обобщённой поверхности Кунса. Напомним определение обобщённой поверхности Кунса, приведённое в [3].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u . Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \dots, L_m^u: T_u \rightarrow \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \dots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \quad i, j \in 1 : m. \quad (10)$$

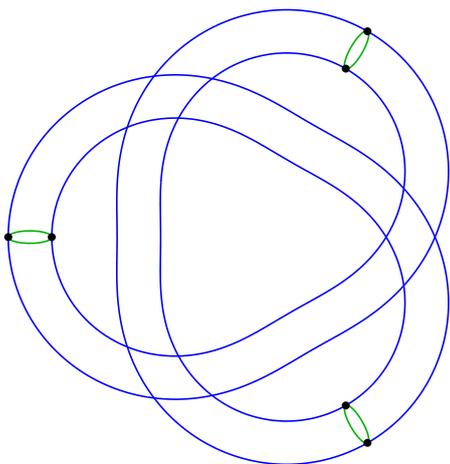


Рис. 1. Остовные кривые

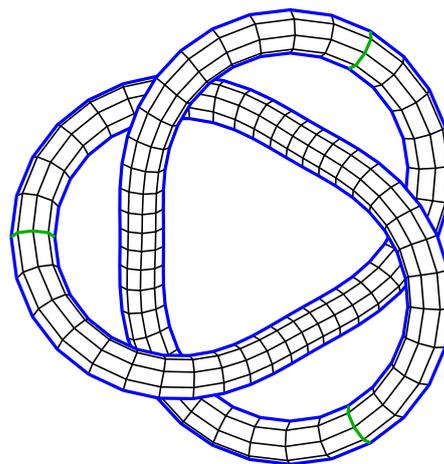
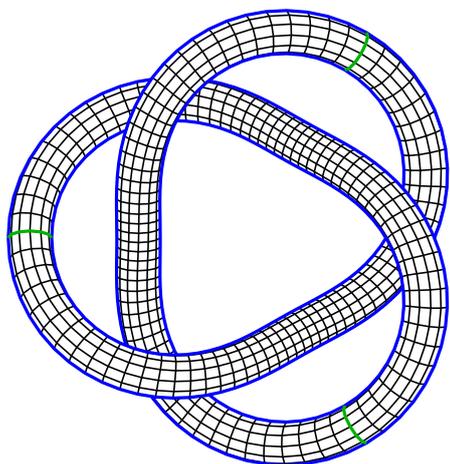
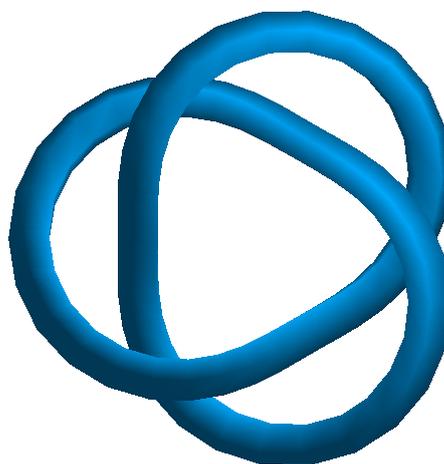
Рис. 2. Дискретная поверхность при $n_1 = 4$ и $n_2 = 25$ Рис. 3. Дискретная поверхность при $n_1 = 6$ и $n_2 = 50$ 

Рис. 4. Предельная поверхность

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v , линейное пространство T_v , состоящее из вещественных функций над D_v , набор линейных функционалов $L_1^v, \dots, L_n^v: T_v \rightarrow \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \dots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \quad i, j \in 1 : n. \quad (11)$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями*.

Определим множества вектор-функций, координатные функции которых

принадлежат T_u и T_v :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_u &= \left\{ \mathbf{g}: D_u \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{g}(u) = (g^1(u), \dots, g^d(u)), g^k \in T_u \right\}, \\ \mathbf{T}_v &= \left\{ \mathbf{f}: D_v \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{f}(v) = (f^1(v), \dots, f^d(v)), f^k \in T_v \right\}.\end{aligned}$$

Введём линейные операторы

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) &= (L_i^u(g^1), \dots, L_i^u(g^d)) \quad \text{для } \mathbf{g}(u) = (g^1(u), \dots, g^d(u)) \in \mathbf{T}_u, \quad i \in 1:m; \\ \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) &= (L_j^v(f^1), \dots, L_j^v(f^d)) \quad \text{для } \mathbf{f}(v) = (f^1(v), \dots, f^d(v)) \in \mathbf{T}_v, \quad j \in 1:n.\end{aligned}$$

Пусть заданы наборы остовных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \quad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \quad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \quad (12)$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{a}: D_u \times D_v \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{a}(u, v) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u) \mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^n H_j^v(v) \mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i^u(u) H_j^v(v) \mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \quad (13)$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{a}(u, v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса*. В [3] доказано, что вектор-функция $\mathbf{a}(u, v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_i^u(\mathbf{a}(\cdot, v)) &= \mathbf{f}_i(v), \quad i \in 1:m, \quad v \in D_v, \\ \mathbf{L}_j^v(\mathbf{a}(u, \cdot)) &= \mathbf{g}_j(u), \quad j \in 1:n, \quad u \in D_u.\end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $D_u = D_v = \mathbb{R}$, T_u — множество непрерывных m_1 -периодических функций, T_v — множество непрерывных m_2 -периодических функций. Положим

$$\begin{aligned}L_i^u(g) &= g(i), \quad i \in 0:m_1-1, \\ L_j^v(f) &= f(j), \quad j \in 0:m_2-1.\end{aligned}$$

В качестве смешивающих функций возьмём сдвиги сплайнов S_1 и S_2 :

$$\begin{aligned}H_i^u(u) &= S_1(u-i), \quad i \in 0:m_1-1, \quad u \in \mathbb{R}; \\ H_j^v(v) &= S_2(v-j), \quad j \in 0:m_2-1, \quad v \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Условия (10) и (11) в этом случае сводятся к равенствам

$$\begin{aligned} S_1(i-j) &= \delta_{ij}, & i, j \in 0 : m_1 - 1, \\ S_2(i-j) &= \delta_{ij}, & i, j \in 0 : m_2 - 1, \end{aligned}$$

которые, очевидно, выполняются. Условия согласования (12) совпадают с равенствами (1), а формула обобщённой поверхности Кунса (13) принимает вид (8). Таким образом, предельная поверхность действительно является частным случаем обобщённой поверхности Кунса. Следовательно, справедливы равенства (14), которые в данном частном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(i, v) &= \mathbf{f}_i(v), & i \in 0 : m_1 - 1, & v \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{c}(u, j) &= \mathbf{g}_j(u), & j \in 0 : m_2 - 1, & u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Значит, предельная поверхность Кунса проходит через все кривые \mathbf{f}_i , \mathbf{g}_j .

4°. Покажем, что теорема об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, доказанная в [5], может быть применена для предельной поверхности.

Пусть порядки r_1 и r_2 отличны от единицы и остовные вектор-функции достаточно гладкие:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &\in C^{r_2}, & i \in 0 : m_1 - 1, \\ \mathbf{g}_j &\in C^{r_1}, & j \in 0 : m_2 - 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &\int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \left\| \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2}} \mathbf{a}(x, y) \right\|^2 dy dx \rightarrow \inf, \\ &\mathbf{a}(i, y) = \mathbf{f}_i(y), & i \in 0 : m_1 - 1, & y \in \mathbb{R}, \\ &\mathbf{a}(x, j) = \mathbf{g}_j(x), & j \in 0 : m_2 - 1, & x \in \mathbb{R}, \\ &\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2}} \mathbf{a} = \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial y^{r_2} \partial x^{r_1}} \mathbf{a} \in C(\mathbb{R}^2), \\ &\mathbf{a}(x + m_1, y) \equiv \mathbf{a}(x, y + m_2) \equiv \mathbf{a}(x, y). \end{aligned} \tag{15}$$

ТЕОРЕМА 2. *Предельная поверхность Кунса является единственным решением задачи (15).*

Доказательство. Воспользуемся доказанной в [5] теоремой об экстремальном свойстве поверхности Кунса. Положим

$$I_u(g) = \int_0^{m_1} g(x) dx, \quad I_v(f) = \int_0^{m_2} f(y) dy.$$

Пусть E_u — множество m_1 -периодических функций класса C^{r_1} , E_v — множество m_2 -периодических функций класса C^{r_2} . Определим операторы A_u и A_v формулами

$$A_u(g) = \frac{\partial^{r_1} g}{\partial x^{r_1}}, \quad A_v(f) = \frac{\partial^{r_2} f}{\partial y^{r_2}}.$$

Основное условие в теореме связано с экстремальными задачами для функций одной переменной, заданных на множествах D_u и D_v . В данном случае, экстремальная задача для функции, заданной на множестве D_u , выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{m_1} [g^{(r_1)}(x)]^2 dx &\rightarrow \inf, \\ g(i) &= x_i, \quad i \in 0 : m_1 - 1, \\ g &\in C^{r_1}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{16}$$

Согласно свойству минимальной нормы для предельных сплайнов (см. [2]), единственным решением задачи (16) является предельный сплайн, который может быть представлен в виде

$$g_*(u) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u) x_i.$$

Это в точности соответствует требуемому условию теоремы. Аналогичным образом проверяется условие, связанное с экстремальной задачей для функции, заданной на множестве D_v .

Пусть T_{uv} — пространство непрерывных функций, имеющих период m_1 по первому аргументу и период m_2 — по второму. Положим

$$E_{uv} = \left\{ e \in T_{uv} \mid \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2}} \mathbf{a} = \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial y^{r_2} \partial x^{r_1}} \mathbf{a} \in C(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Так же, как в [5], обозначим через \mathbf{E}_{uv} пространство вектор-функций, координатные функции которых принадлежат пространству E_{uv} . Ясно, что предельная поверхность Кунса, построенная по формуле (8), принадлежит пространству \mathbf{E}_{uv} . Так как в данном случае $A_{u,*} = \frac{\partial^{r_1}}{\partial x^{r_1}}$, $A_{*,v} = \frac{\partial^{r_2}}{\partial y^{r_2}}$, то по построению пространства E_{uv} выполняется равенство

$$A_{u,*} A_{*,v} e = A_{*,v} A_{u,*} e, \quad e \in E_{uv}.$$

Все оставшиеся условия, требуемые в теореме об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, являются элементарными свойствами интегралов и производных функций двух переменных. Применяя теорему, заключаем, что поверхность Кунса, построенная по формуле (8), является единственным решением задачи (15). \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Экстремальное свойство дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DNA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (<http://dha.spb.ru/refs09.shtml#0314>).
2. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DNA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (<http://dha.spb.ru/refs09.shtml#0627>).
3. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DNA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (<http://dha.spb.ru/refs08.shtml#0315>).
4. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DNA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (<http://dha.spb.ru/refs07.shtml#0904>).
5. Чашников Н. В. *Экстремальные свойства поверхностей Кунса* // Семинар «DNA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (<http://dha.spb.ru/refs09.shtml#0314>).