АНАЛОГ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ДИСКРЕТНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

14 февраля 2009 г.

1°. Пусть N, r — натуральные числа. Дискретной периодической функцией Бернулли порядка r называется сигнал

$$b_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Из [1] известны следующие свойства функций Бернулли:

$$\Delta b_{r+1}(j) = b_r(j), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$b_r(r-j) = (-1)^r \, b_r(j), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Кроме того, любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x(j) = e + \sum_{k=0}^{N-1} \Delta^r x(k) \, b_r(j-k), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $e = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)$.

Пусть $N = mn$, где m, n — натуральные числа, отличные от единицы. Определим функцию t_α для $\alpha \in \mathbb{Z}$ по формуле

$$t_\alpha(l) := b_{2r}(ln + r + \alpha), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что $t_\alpha \in \mathbb{C}_m$. Положим $T_\alpha := \mathcal{F}_m(t_\alpha)$.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$T_\alpha(l) = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{q=\delta_m(l)}^{n-1} \frac{\omega_N^{(qm+l)\alpha}}{\left(2\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}}\,.$$

Доказательство. По определению t_α имеем

$$T_\alpha(l) = \sum_{p=0}^{m-1} t_\alpha(p)\,\omega_m^{-pl} = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r}\,\omega_N^{k(pn+r+\alpha)}\,\omega_m^{-pl} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r}\,\omega_N^{k(r+\alpha)} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{(k-l)p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r}\,\omega_N^{kr}\,\omega_N^{k\alpha}\,\delta_m(k-l).$$

Слагаемые в последней сумме отличны от нуля только при $k = qm + l$. Кроме того,

$$(\omega_N^k - 1)^{-2}\omega_N^k = \frac{\omega_N^k}{\omega_N^{2k} - 2\omega_N^k + 1} = \frac{1}{\omega_N^k + \omega_N^{-k} - 2} = \frac{1}{2\cos\frac{2\pi k}{N} - 2} = -\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi k}{N}}\,.$$

Таким образом,

$$T_\alpha(l) = \frac{1}{n} \sum_{q=\delta(l)}^{n-1} \left(-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi(qm+l)}{N}}\right)^r \omega_N^{(qm+l)\alpha},$$

что и требовалось. □

ЛЕММА 2. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0) &\neq 0, \\ T_0(l)^2 - T_1(l)\,T_{-1}(l) &\neq 0, \qquad l \in 1 : m-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Используя предыдущую лемму, получаем

$$T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0) = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{\omega_n^q + \omega_n^{-q} - 2}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r}} = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{2\cos\frac{2\pi q}{n} - 2}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r}}\,.$$

Все слагаемые в последней сумме отрицательны, поэтому вся сумма отрицательна. Значит, $T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0) \neq 0$.

Далее, при $l \in 1 : m-1$ имеем

$$T_0(l)^2 - T_1(l)\,T_{-1}(l) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\bigl(2\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\bigr)^{2r}} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{\bigl(2\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\bigr)^{2r}} -$$
$$- \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\omega_N^{pm+l}}{\bigl(2\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\bigr)^{2r}} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\omega_N^{-qm-l}}{\bigl(2\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\bigr)^{2r}} =$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1-\omega_n^{p-q}}{\bigl(4\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\,\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\bigr)^{2r}}\,.$$

Ясно, что $\mathrm{Re}(1-\omega_n^{p-q}) \geqslant 0$, причём равенство достигается только при $p=q$. Так как $n \geqslant 2$, то в сумме будут слагаемые с $p \neq q$. Поэтому вещественная часть суммы положительна, что гарантирует выполнение требуемого неравенства. $\square$

2°. Обозначим через D_r множество сигналов вида

$$S(j) = c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(j-pn+r) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(j-pn+r-1), \qquad (4)$$

где c_0, $c_1(p)$, $c_2(p)$ — комплексные коэффициенты, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)+c_2(p)\bigr) = 0. \qquad (5)$$

Ясно, что D_r является линейным пространством.

Рассмотрим в пространстве D_r интерполяционную задачу

$$\begin{aligned} S(ln) &= y(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta S(ln) &= z(l), \qquad l \in 0 : m-1, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $y(l)$, $z(l)$ — произвольные комплексные числа.

ТЕОРЕМА 1. *Интерполяционная задача* (6) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Условия (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S(ln) &= y(l), \\ S(ln+1) &= y(l) + z(l). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $S(j)$ из формулы (4), получаем

$$c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(ln - pn + r) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(ln - pn + r - 1) = y(l),$$
$$c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(ln - pn + r + 1) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(ln - pn + r) = y(l) + z(l).$$

Воспользовавшись функциями t_0, t_{-1} и t_1, перепишем полученные уравнения в виде

$$c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, t_0(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, t_{-1}(l-p) = y(l),$$
$$c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, t_1(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, t_0(l-p) = y(l) + z(l),$$

или, в более компактной форме,

$$c_0 + c_1 * t_0 + c_2 * t_{-1} = y,$$
$$c_0 + c_1 * t_1 + c_2 * t_0 = y + z.$$

При переходе в спектральную область уравнения примут вид

$$\begin{aligned} m\, c_0\, \delta_m(l) + C_1(l)\, T_0(l) + C_2(l)\, T_{-1}(l) &= Y(l), \\ m\, c_0\, \delta_m(l) + C_1(l)\, T_1(l) + C_2(l)\, T_0(l) &= Y(l) + Z(l), \end{aligned} \tag{7}$$

где $C_1 = \mathcal{F}_m(c_1)$, $C_2 = \mathcal{F}_m(c_2)$, $Y = \mathcal{F}_m(y)$, $Z = \mathcal{F}_m(z)$.

Запишем уравнения (7) при $l = 0$:

$$m\, c_0 + C_1(0)\, T_0(0) + C_2(0)\, T_{-1}(0) = Y(0),$$
$$m\, c_0 + C_1(0)\, T_1(0) + C_2(0)\, T_0(0) = Y(0) + Z(0).$$

Из условия (5) следует, что $C_1(0) + C_2(0) = 0$. Подставляя $-C_1(0)$ вместо $C_2(0)$ и вычитая из второго уравнения первое, придём к равенству

$$C_1(0)\big(T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0)\big) = Z(0).$$

В силу леммы 2 из этого равенства однозначно определяется $C_1(0)$, а из него находятся значения $C_2(0)$ и c_0.

При $l \in 1 : m-1$ система (7) принимает вид

$$C_1(l)\, T_0(l) + C_2(l)\, T_{-1}(l) = Y(l),$$
$$C_1(l)\, T_1(l) + C_2(l)\, T_0(l) = Y(l) + Z(l),$$

то есть является системой двух линейных уравнений, причём определитель матрицы этой системы равен $T_0(l)^2 - T_1(l)\,T_{-1}(l)$. Он отличен от нуля по лемме 2.

Таким образом, значения c_0, $C_1(l)$ и $C_2(l)$ при $l \in 0:m-1$ определяются однозначно. Применяя обратное преобразование Фурье, найдём коэффициенты $c_1(p)$ и $c_2(p)$ для $p \in 0:m-1$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если $y(l)$ и $z(l)$ вещественны при $l \in 0:m-1$, то значения интерполяционного сигнала также вещественны.*

Доказательство. Подставим выражение (4) в уравнения (6). С учётом условия (5) получим систему из $2m+1$ линейных уравнений с неизвестными c_0, $c_1(0), \ldots, c_1(m-1)$, $c_2(0), \ldots, c_2(m-1)$. Так как значения функции Бернулли $b_{2r}(j)$ вещественны при всех $j \in \mathbb{Z}$, то матрица системы будет вещественна. По условию и столбец правых частей состоит из вещественных чисел. Значит, коэффициенты c_0, $c_1(p)$, $c_2(p)$ интерполяционного сигнала, являющиеся решением системы, также вещественны. Но тогда вещественны и значения интерполяционного сигнала. $\square$

3°. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} f(x) := \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r x(j)\bigr|^2 &\to \min, \\ x(ln) = y(l), &\qquad l \in 0:m-1, \\ \Delta x(ln) = z(l), &\qquad l \in 0:m-1, \\ x \in \mathbb{C}_N&. \end{aligned} \tag{8}$$

ЛЕММА 3. *Пусть $S \in D_r$ — сигнал вида (4), $x \in \mathbb{C}_N$ — произвольный сигнал. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j)\,\Delta^r x(j) = (-1)^r \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)\,x(pn) + c_2(p)\,x(pn+1)\bigr).$$

Доказательство. Из свойств (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta^r b_{2r}(j - pn + r) &= b_r(j - pn + r) = (-1)^r\, b_r(pn - j), \\ \Delta^r b_{2r}(j - pn + r - 1) &= b_r(j - pn + r - 1) = (-1)^r\, b_r(pn + 1 - j). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j)\, \Delta^r x(j) =$$

$$= (-1)^r \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)\, b_r(pn-j) + c_2(p)\, b_r(pn+1-j)\bigr) \Delta^r x(j) =$$

$$= (-1)^r \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p) \sum_{j=0}^{N-1} b_r(pn-j) \Delta^r x(j) +$$

$$+ (-1)^r \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) \sum_{j=0}^{N-1} b_r(pn+1-j) \Delta^r x(j).$$

Согласно свойству (3)

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(pn-j) \Delta^r x(j) = x(pn) - e,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(pn+1-j) \Delta^r x(j) = x(pn+1) - e,$$

где $e = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)$. Значит,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j)\, \Delta^r x(j) = (-1)^r \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)\, x(pn) + c_2(p)\, x(pn+1)\bigr) -$$

$$- \frac{(-1)^r e}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p) + c_2(p)\bigr).$$

Осталось заметить, что $\sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p) + c_2(p)\bigr) = 0$. □

ТЕОРЕМА 2. *Единственным решением задачи* (8) *является интерполяционный сигнал* $S_* \in D_r$.

Доказательство. Пусть x — произвольный сигнал, удовлетворяющий ограничениям задачи (8). Положим $\eta = x - S_*$. Ясно, что

$$\eta(ln) = \eta(ln+1) = 0 \qquad \text{при} \;\; l \in 0 : m-1.$$

В силу линейности конечной разности r-го порядка имеем

$$f(x) = f(S_* + \eta) = \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r S_*(j) + \Delta^r \eta(j)\bigr|^2 =$$

$$= f(S_*) + f(\eta) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\, \Delta^r\, \overline{\eta}(j).$$

По лемме 3

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\, \Delta^r\, \overline{\eta}(j) = (-1)^r \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)\, \overline{\eta}(pn) + c_2(p)\, \overline{\eta}(pn+1)\bigr) = 0.$$

Следовательно, $f(x) = f(S_*) + f(\eta)$. Поэтому $f(x) \geqslant f(S_*)$, то есть S_* — решение задачи (8).

Проверим единственность решения. Если $f(x) = f(S_*)$, то $f(\eta) = 0$. Но тогда $\Delta^r \eta(j) = 0$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Из разложения (3) следует, что $\eta \equiv \mathrm{const}$, а так как $\eta(0) = 0$, то $\eta \equiv 0$, что влечёт $x = S_*$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если* $\sum_{l=0}^{m-1} z(l) = 0$, *то интерполяционный сигнал* S *представим в виде*

$$S(j) = S_1(j) + S_2(j-1),$$

где $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_r^m$.

Доказательство. По построению интерполяционного сигнала

$$C_1(0) = Z(0)/\bigl(T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0)\bigr),$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$. Но $Z(0) = \sum_{l=0}^{m-1} z(l) = 0$, поэтому $C_1(0) = 0$ и $C_2(0) = -C_1(0) = 0$. Следовательно,

$$\sum_{p=0}^{m-1} c_1(p) = C_1(0) = 0, \quad \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) = C_2(0) = 0.$$

Положим

$$S_1(j) = c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(j - pn + r),$$

$$S_2(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(j - pn + r).$$

Ясно, что $S(j) = S_1(j) + S_2(j-1)$, а по теореме о представлении дискретного периодического сплайна с помощью функций Бернулли [1, с. 17] сигналы S_1 и S_2 принадлежат $\mathcal{S}_r^m$, что и требовалось. □

4°. Сигналы из пространства D_r можно использовать для построения замкнутых кривых. Пусть заданы наборы векторов

$$\begin{aligned} y(l) &= \big(y_1(l), \dots, y_d(l)\big) \in \mathbb{R}^d, \qquad l \in 0 : m-1, \\ z(l) &= \big(z_1(l), \dots, z_d(l)\big) \in \mathbb{R}^d, \qquad l \in 0 : m-1. \end{aligned}$$

Найдём интерполяционные сигналы $S_0, S_1, \dots, S_d$ из D_r, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} S_\nu(ln) &= y_\nu(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta S_\nu(ln) &= z_\nu(l), \qquad l \in 0 : m-1. \end{aligned}$$

По предложению 1 все значения $S_\nu(j)$ будут вещественными. Поэтому можно построить замкнутую ломаную в пространстве $\mathbb{R}^d$ с вершинами

$$S(j) = \big(S_1(j), \dots, S_d(j)\big), \qquad j \in 0 : N-1.$$

Эта ломаная будет проходить через заданные точки $y(l)$ и иметь в этих точках заданные направления $z(l)$.

Пусть $x(j) = \big(x_1(j), \dots, x_d(j)\big)$. Поскольку

$$\sum_{j=0}^{N-1} \big\| \Delta^r x(j) \big\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{d} \big| \Delta^r x_\nu(j) \big|^2 = \sum_{\nu=1}^{d} \sum_{j=0}^{N-1} \big| \Delta^r x_\nu(j) \big|^2,$$

то, принимая во внимание экстремальное свойство интерполяционных сигналов S_ν, можно утверждать, что вектор-функция $S(j)$ является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \sum_{j=0}^{N-1} \big\| \Delta^r x(j) \big\|^2 \to \min, \\ x(ln) = y(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta x(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1, \end{gathered}$$

на множестве дискретных N-периодических вектор-функций $x(j)$.

ПРИМЕР. Положим $r = 3$, $d = 2$. На рисунках 1–4 изображены ломаные с вершинами $S(j)$. Векторы $y(l)$ показаны жирными точками, направления векторов $z(l)$ указаны пунктирными стрелками. Параметр n равен 20 на всех рисунках, кроме рисунка 1, где он равен 30.

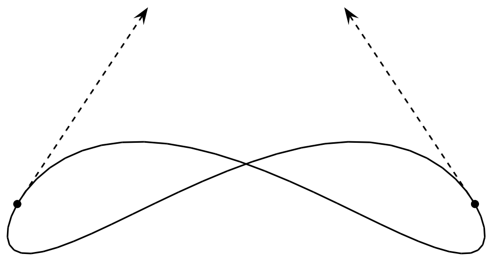

Рис. 1. 2 узла

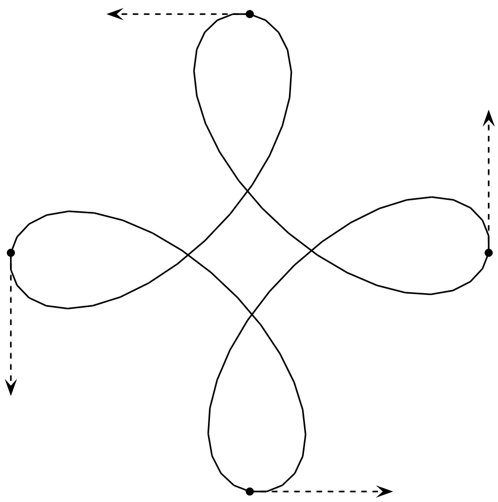

Рис. 2. 4 узла

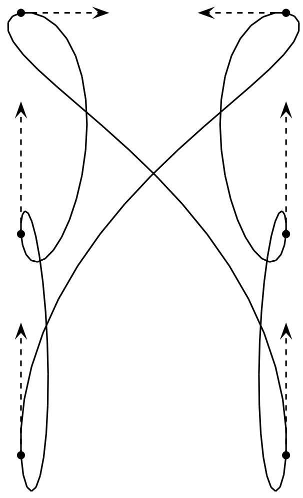

Рис. 3. 6 узлов

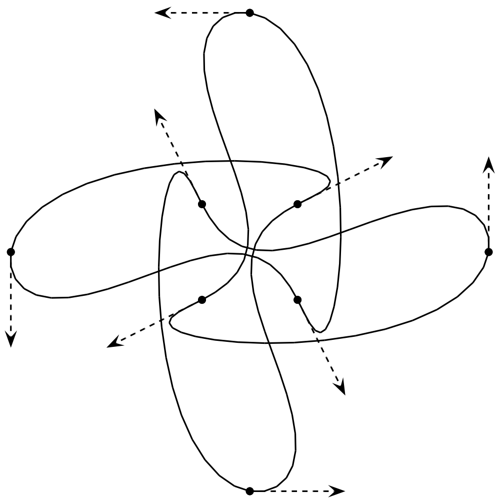

Рис. 4. 8 узлов

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.