ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ЭРМИТОВОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

19 сентября 2009 г.

В [1] был предложен способ построения mn-периодических вектор-функций целочисленного аргумента, принимающих заданные значения в m равноостоящих точках и имеющих в этих точках заданные приращения. Зафиксируем число m, точки интерполяции и направления векторов приращений. Целью данного доклада является нахождение предела множества значений интерполяционных вектор-функций при неограниченном увеличении n.

1°. Уточним постановку задачи. Пусть N — натуральное, а ν — целое неотрицательное число. Дискретной периодической функцией Бернулли порядка ν называется сигнал

$$b_{\nu,N}(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-\nu}\,\omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Параметр N включен в обозначение, так как он будет изменяться.

Зафиксируем натуральные числа r и m, $m \geqslant 2$. Для натурального n, отличного от единицы, положим $N = mn$ и обозначим через $\mathbf{D}_{r,n}$ пространство вектор-функций вида

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_1(p)\,b_{2r,N}(j - pn + r) + \sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_2(p)\,b_{2r,N}(j - pn + r - 1), \tag{1}$$

где $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1(p), \mathbf{c}_2(p) \in \mathbb{R}^d$ — коэффициенты, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1}\big(\mathbf{c}_1(p) + \mathbf{c}_2(p)\big) = 0.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Пусть заданы наборы векторов $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1)$ и $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1)$ из пространства $\mathbb{R}^d$. В [1] показано, что найдётся вектор-функция $\mathbf{S}_{r,n} \in D_{r,n}$, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{r,n}(ln) &= \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta \mathbf{S}_{r,n}(ln) &= \frac{\mathbf{y}(l)}{n}, \qquad l \in 0 : m-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Цель данного доклада состоит в нахождения предела множества точек $\big\{\mathbf{S}_{r,n}(j) \,|\, j \in \mathbb{Z}\big\}$ при неограниченном увеличении n. Начнём с изучения поведения дискретных функций Бернулли $b_{\nu,N}$ при стремлении N к бесконечности.

2°. Согласно [2], для дискретных функции Бернулли справедливы соотношения

$$\Delta b_{\nu+1,N}(j) = b_{\nu,N}(j), \qquad \nu \in \mathbb{Z}_+,\ N \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_{\nu,N}(j) = 0, \qquad \nu \in \mathbb{Z}_+,\ N \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Исходя из этих равенств, выведем рекуррентную формулу для функций Бернулли. Последовательно применяя тождество (3), получаем

$$\begin{aligned} b_{\nu+1,N}(j) = b_{\nu+1,N}(j-1) + b_{\nu,N}(j-1) = b_{\nu+1,N}(j-2) + b_{\nu,N}(j-2) + \\ + b_{\nu,N}(j-1) = \ldots = b_{\nu+1,N}(0) + \sum_{k=0}^{j-1} b_{\nu,N}(k). \end{aligned}$$

Чтобы найти значение $b_{\nu+1,N}(0)$, воспользуемся равенством (4):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{N-1} b_{\nu+1,N}(j) = N\, b_{\nu+1,N}(0) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{j-1} b_{\nu,N}(k) = \\ &= N\, b_{\nu+1,N}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)\, b_{\nu,N}(k) = N\, b_{\nu+1,N}(0) - \sum_{k=0}^{N-1} k\, b_{\nu,N}(k). \end{aligned}$$

Итак,

$$b_{\nu+1,N}(j) = \sum_{k=0}^{j-1} b_{\nu,N}(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k\, b_{\nu,N}(k). \tag{5}$$

Из [2] известно, что $b_{0,N}(j) = \delta_N(j) - \frac{1}{N}$. Следовательно, по формуле (5) получим

$$b_{1,N}(j) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2N}\,, & \text{при } j = 0, \\ \frac{N-1}{2N} - \frac{j}{N}\,, & \text{при } j \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{6}$$

Определим последовательность функций $\beta_\nu\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, периодических с периодом 1. Функцию $\beta_1(t)$ на основном периоде зададим формулой

$$\beta_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,, & \text{при } t=0, \\ \frac{1}{2}-t, & \text{при } t\in(0,1]. \end{cases} \tag{7}$$

Остальные функции $\beta_\nu(t)$ на основном периоде определим при помощи рекуррентного соотношения

$$\beta_{\nu+1}(t) = \int_0^t \beta_\nu(\tau)\,d\tau + \int_0^1 \tau\,\beta_\nu(\tau)\,d\tau, \qquad t\in[0,1]. \tag{8}$$

Рекуррентная формула для многочленов Бернулли $B_\nu(t)$ (см. [3, с. 13]) выглядит схожим образом. Нетрудно проверить, что для $\nu\geqslant 2$ выполняется равенство

$$\beta_\nu(t) = -\frac{1}{\nu!}\,B_\nu(t), \qquad t\in[0,1].$$

Обозначим через $\widetilde{C}^k$ пространство периодических с периодом 1 функций, имеющих непрерывную производную порядка k.

ЛЕММА 1. *Справедливы соотношения*

$$\beta'_{\nu+1}(t) = \beta_\nu(t), \qquad \nu\in\mathbb{N}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{9}$$

$$\int_0^1 \beta_\nu(t)\,dt = 0, \qquad \nu\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

$$\beta_\nu \in \widetilde{C}^{\nu-2}, \qquad \nu\geqslant 2.$$

Доказательство. Тождество (9) очевидным образом следует из формулы (8). Докажем равенство (10) по индукции. База индукции для $\nu=1$ проверяется непосредственно. Проведём индукционный переход от ν к $\nu+1$. По формуле (8)

$$\int_0^1 \beta_{\nu+1}(t)\,dt = \int_0^1\left(\int_0^t \beta_\nu(\tau)\,d\tau\right)dt + \int_0^1 \tau\,\beta_\nu(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^1\left(\int_\tau^1 \beta_\nu(\tau)\,dt\right)d\tau + \int_0^1 \tau\,\beta_\nu(\tau)\,d\tau = \int_0^1 \beta_\nu(\tau)\,d\tau = 0.$$

Равенство (10) доказано.

Рассмотрим функцию $\beta_2(t)$. Согласно формуле (8), имеем

$$\beta_2(t) = \int_0^t \beta_1(\tau)\,d\tau + \int_0^1 \tau\,\beta_1(\tau)\,d\tau, \qquad t\in[0,1].$$

Ясно, что $\beta_2(t) \in C\bigl([0,1]\bigr)$. Кроме того,

$$\beta_2(1) = \int_0^1 \beta_1(\tau)\,d\tau + \int_0^1 \tau\,\beta_1(\tau)\,d\tau = \int_0^1 \tau\,\beta_1(\tau)\,d\tau = \beta_2(0).$$

Таким образом, функция $\beta_2(t)$ непрерывна на всей вещественной оси. Воспользовавшись доказанным тождеством (9), получим, что $\beta_\nu \in \widetilde{C}^{\nu-2}$ при $\nu \geqslant 2$. Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *Для всех натуральных ν справедливы неравенства*

$$\bigl|\beta_\nu(t)\bigr| \leqslant \tfrac{1}{2}\,, \qquad t \in [0,1], \tag{11}$$

$$\bigl|\beta_\nu(x) - \beta_\nu(y)\bigr| \leqslant |x-y|, \qquad x, y \in [0,1]. \tag{12}$$

Доказательство. Проведём доказательство по индукции. База индукции для $\nu = 1$ очевидна. Пусть неравенства (11) и (12) выполняются для β_ν. Тогда для любых $x, y \in [0,1]$ имеем

$$\bigl|\beta_{\nu+1}(x) - \beta_{\nu+1}(y)\bigr| = \left|\int_x^y \beta_\nu(t)\,dt\right| \leqslant \tfrac{1}{2}|x-y|, \tag{13}$$

то есть неравенство (12) для $\beta_{\nu+1}$ выполнено. Положим

$$a = \max_{t\in[0,1]} \beta_{\nu+1}(t), \qquad b = \min_{t\in[0,1]} \beta_{\nu+1}(t).$$

Тогда

$$a \geqslant \int_0^1 \beta_{\nu+1}(t)\,dt \geqslant b,$$

то есть, в силу (10), $a \geqslant 0 \geqslant b$. Кроме того, из доказанного неравенства (13) следует, что $a - b \leqslant \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$a \leqslant b + \tfrac{1}{2} \leqslant \tfrac{1}{2}\,, \qquad b \geqslant a - \tfrac{1}{2} \geqslant -\tfrac{1}{2}\,,$$

что и требовалось. □

Введём обозначение

$$\tilde{b}_{\nu,N}(j) := \frac{b_{\nu,N}(j)}{N^{\nu-1}}\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого натурального ν найдётся A_ν такое, что*

$$\Bigl|\tilde{b}_{\nu,N}(j) - \beta_\nu\bigl(\tfrac{j}{N}\bigr)\Bigr| \leqslant \frac{A_\nu}{N}\,, \qquad N \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

З а м е ч а н и е. Предложение допускает эквивалентную формулировку: для любого натурального ν найдётся A_ν такое, что

$$\Bigl|\tilde b_{\nu,N}\bigl(\lfloor tN\rfloor\bigr)-\beta_\nu(t)\Bigr|\leqslant \frac{A_\nu}{N}\,,\qquad N\in\mathbb{N},\quad t\in\mathbb{R}.$$

При такой форме записи проясняется смысл предложения, но для доказательства и дальнейшего использования удобнее иметь дело с первоначальной формулировкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом математической индукции. При $\nu=1$ имеем

$$\Bigl|\tilde b_{1,N}(j)-\beta_1\bigl(\tfrac{j}{N}\bigr)\Bigr|\equiv \frac{1}{2N}\,,$$

поэтому можно положить $A_1=\frac12$. Пусть (14) выполнено для некоторого ν. Применяя формулы (5) и (8), получим

$$\begin{aligned}\Bigl|\tilde b_{\nu+1,N}(j)-\beta_{\nu+1}\bigl(\tfrac{j}{N}\bigr)\Bigr|\leqslant \left|\frac1N\sum_{k=0}^{j-1}\tilde b_{\nu,N}(k)-\int_0^{j/N}\beta_\nu(t)\,dt\right|+\\ +\left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}k\,\tilde b_{\nu,N}(k)-\int_0^1 t\,\beta_\nu(t)\,dt\right|.\end{aligned}\tag{15}$$

Оценим слагаемые в правой части по отдельности. Для первого слагаемого имеем

$$\left|\frac1N\sum_{k=0}^{j-1}\tilde b_{\nu,N}(k)-\int_0^{j/N}\beta_\nu(t)\,dt\right|=\left|\frac1N\sum_{k=0}^{j-1}\tilde b_{\nu,N}(k)-\frac1N\int_0^{j}\beta_\nu\bigl(\tfrac{t}{N}\bigr)\,dt\right|=$$

$$=\left|\frac1N\sum_{k=0}^{j-1}\int_k^{k+1}\Bigl[\tilde b_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\bigl(\tfrac{t}{N}\bigr)\Bigr]dt\right|\leqslant\frac1N\sum_{k=0}^{j-1}\int_k^{k+1}\Bigl|\tilde b_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\bigl(\tfrac{t}{N}\bigr)\Bigr|dt.$$

Из индукционного предположения и леммы 2 следует, что

$$\Bigl|\tilde b_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\bigl(\tfrac{t}{N}\bigr)\Bigr|\leqslant\Bigl|\tilde b_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\bigl(\tfrac{k}{N}\bigr)\Bigr|+\Bigl|\beta_\nu\bigl(\tfrac{k}{N}\bigr)-\beta_\nu\bigl(\tfrac{t}{N}\bigr)\Bigr|\leqslant\frac{A_\nu}{N}+\frac1N\,.$$

Поэтому

$$\left|\frac1N\sum_{k=0}^{j-1}\tilde b_{\nu,N}(k)-\int_0^{j/N}\beta_\nu(t)\,dt\right|\leqslant\frac{A_\nu+1}{N}\,.$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (15):

$$\left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1} k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k) - \int_0^1 t\,\beta_\nu(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1} k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k) - \frac{1}{N^2}\int_0^N t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{N^2}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\Big[k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\Big]dt\right| \leqslant \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\Big|k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\Big|dt.$$

Для подынтегрального выражения справедливо неравенство

$$\Big|k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\Big| \leqslant \Big|k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k) - k\,\beta_\nu\big(\tfrac{k}{N}\big)\Big| +$$

$$+\Big|k\,\beta_\nu\big(\tfrac{k}{N}\big) - k\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\Big| + \Big|k\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\Big|.$$

Первое слагаемое в правой части, согласно индукционному предположению, меньше $\frac{kA_\nu}{N}$. По лемме 2 второе слагаемое не превосходит $\frac{k}{N}$, а третье не больше $\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1} k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k) - \int_0^1 t\,\beta_\nu(t)\,dt\right| \leqslant \frac{A_\nu + 2}{N}\,.$$

Значит,

$$\Big|\tilde{b}_{\nu+1,N}(j) - \beta_{\nu+1}\big(\tfrac{j}{N}\big)\Big| \leqslant \frac{2A_\nu + 3}{N}\,.$$

Осталось положить $A_{\nu+1} = 2A_\nu + 3$. Индукционный переход доказан. $\square$

3°. Пусть фиксированы натуральные числа r и m, отличные от единицы. Определим функцию $e_{\alpha,n}$ для $\alpha \in \{0,1,2\}$ по формуле

$$e_{\alpha,n}(l) := \tilde{b}_{2r-\alpha,N}(l\,n + r - 1), \qquad l \in \mathbb{Z},$$

где $N = mn$. Ясно, что функция $e_{\alpha,n}(l)$ имеет период m. Положим $E_{\alpha,n} = \mathcal{F}_m(e_{\alpha,n})$.

ЛЕММА 3. *Для* $\alpha \in \{0,1,2\}$ *и* $l \in 0 : m-1$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} E_{\alpha,n}(l) =: E_\alpha(l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$e_\alpha(l) = \beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{l}{m}\big), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Имеем

$$|e_{\alpha,n}(l) - e_\alpha(l)| \leqslant \Big|\tilde{b}_{2r-\alpha,N}(l\,n + r - 1) - \beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{ln+r-1}{N}\big)\Big| +$$
$$+ \Big|\beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{ln+r-1}{N}\big) - \beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{l}{m}\big)\Big|.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю согласно предложению 1, а второе — в силу непрерывности функции $\beta_{2r-\alpha}$. Таким образом,

$$e_\alpha(l) = \lim_{n\to\infty} e_{\alpha,n}(l).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} E_{\alpha,n}(l) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{m-1} e_{\alpha,n}(p)\,\omega_m^{-pl} = \sum_{p=0}^{m-1} e_\alpha(p)\,\omega_m^{-pl}.$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 4. *Справедливы соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} E_{2,n}(0) \neq 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \big[E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l)\big] \neq 0, \qquad l \in 1 : m-1.$$

Доказательство. В докладе [1] исследовались дискретные преобразования Фурье $T_{\alpha,n} = \mathcal{F}_m(t_{\alpha,n})$ сигналов

$$t_{\alpha,n}(l) = b_{2r,N}(ln + r + \alpha), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Были получены формулы

$$T_{1,n}(0) + T_{-1,n}(0) - 2\,T_{0,n}(0) = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{2\cos\frac{2\pi q}{n} - 2}{\big(2\sin\frac{\pi q}{n}\big)^{2r}}\,,$$

$$T_{0,n}(l)^2 - T_{1,n}(l)\,T_{-1,n}(l) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \frac{1 - \omega_n^{p-q}}{\big(4\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\,\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\big)^{2r}}\,.$$

Воспользовавшись тождеством (3), выразим $e_{0,n}$, $e_{1,n}$ и $e_{2,n}$ через функции $t_{\alpha,n}$:

$$e_{0,n}(l) = \frac{t_{-1,n}(l)}{N^{2r-1}}\,,$$

$$e_{1,n}(l) = \frac{\Delta\, t_{-1,n}(l)}{N^{2r-2}} = \frac{t_{0,n}(l) - t_{-1,n}(l)}{N^{2r-2}}\,,$$

$$e_{2,n}(l) = \frac{\Delta^2\, t_{-1,n}(l)}{N^{2r-3}} = \frac{t_{1,n}(l) - 2\,t_{0,n}(l) + t_{-1,n}(l)}{N^{2r-3}}\,.$$

В силу линейнсти дискретного преобразования Фурье имеем

$$E_{0,n}(l) = \frac{T_{-1,n}(l)}{N^{2r-1}}\,,$$

$$E_{1,n}(l) = \frac{T_{0,n}(l) - T_{-1,n}(l)}{N^{2r-2}}\,,$$

$$E_{2,n}(l) = \frac{T_{1,n}(l) - 2\,T_{0,n}(l) + T_{-1,n}(l)}{N^{2r-3}}\,.$$

Таким образом,

$$(-1)^{r-1}E_{2,n}(0) = (-1)^{r-1}\,\frac{T_{1,n}(0) - 2\,T_{0,n}(0) + T_{-1,n}(0)}{N^{2r-3}} =$$

$$= \frac{1}{n\,N^{2r-3}}\sum_{q=1}^{n-1}\frac{2-2\cos\frac{2\pi q}{n}}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r}} = \frac{1}{n\,N^{2r-3}}\sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r-2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n\,N^{2r-3}\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2r-2}} \geqslant \frac{1}{m^{2r-3}\,(2\pi)^{2r-2}}\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{r-1}E_{2,n}(0) \geqslant \frac{1}{m^{2r-3}\,(2\pi)^{2r-2}} > 0.$$

Первое из требуемых соотношений доказано. Докажем второе неравенство. Имеем

$$E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l) = \frac{\bigl(T_{0,n}(l) - T_{-1,n}(l)\bigr)^2}{N^{4r-4}} -$$

$$- \frac{T_{-1,n}(l)\bigl(T_{1,n}(l) - 2\,T_{0,n}(l) + T_{-1,n}(l)\bigr)}{N^{4r-4}} = \frac{T_{0,n}(l)^2 - T_{1,n}(l)\,T_{-1,n}(l)}{N^{4r-4}}\,.$$

Значит,

$$\mathrm{Re}\bigl[E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l)\bigr] = \frac{\mathrm{Re}\bigl[T_{0,n}(l)^2 - T_{1,n}(l)\,T_{-1,n}(l)\bigr]}{N^{4r-4}} =$$

$$= \frac{1}{n^2N^{4r-4}}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{1-\cos\frac{2\pi(p-q)}{n}}{\left(4\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\,\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}} \geqslant \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{n^2N^{4r-4}\left(4\sin\frac{\pi l}{N}\,\sin\frac{\pi(m+l)}{N}\right)^{2r}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{n^2N^{4r-4}\left(4\frac{\pi l}{N}\,\frac{\pi(m+l)}{N}\right)^{2r}} \geqslant \frac{2n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{m^{4r-4}\left(4\pi^2 l(m+l)\right)^{2r}}\,.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\bigl[E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l)\bigr] \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{m^{4r-4}\bigl(4\pi^2\, l\,(m+l)\bigr)^{2r}} = \frac{2\pi^2}{m^{4r-4}\bigl(4\pi^2\, l\,(m+l)\bigr)^{2r}} > 0.$$

Лемма доказана. □

4°. Воспользовавшись тождеством (3), перепишем формулу (1) в виде

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, b_{2r-1,N}(j-pn+r-1) + \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(\mathbf{c}_1(p)+\mathbf{c}_2(p)\bigr)\, b_{2r,N}(j-pn+r-1),$$

Следовательно, пространство $\mathbf{D}_{r,n}$ можно определить как множество вектор-функций вида

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{r,n}(j) = \mathbf{c}_{0,n} + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1) + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, \tilde{b}_{2r,N}(j-pn+r-1),\end{aligned} \tag{16}$$

где $\mathbf{c}_{0,n}$, $\mathbf{c}_{1,n}(j)$, $\mathbf{c}_{2,n}(j) \in \mathbb{R}^d$ и выполняется условие

$$\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p) = 0. \tag{17}$$

Пусть заданы наборы векторов

$$\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d,$$
$$\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1) \in \mathbb{R}^d.$$

Построим для всех $n \geqslant 2$ вектор-функции вида (16), удовлетворяющие интерполяционным условиям (2).

ТЕОРЕМА 1. *Коэффициенты вектор-функций* $\mathbf{S}_{r,n}$ *сходятся:*

$$\mathbf{c}_{0,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}_0,$$
$$\mathbf{c}_{1,n}(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}_1(p), \quad p \in 0:m-1,$$
$$\mathbf{c}_{2,n}(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}_2(p), \quad p \in 0:m-1.$$

Доказательство. Подставим выражение (16) в равенства (2):

$$\mathbf{c}_{0,n} + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\,\tilde{b}_{2r-1,N}(ln - pn + r - 1) + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\,\tilde{b}_{2r,N}(ln - pn + r - 1) = \mathbf{x}(l),$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\,\frac{\tilde{b}_{2r-2,N}(ln - pn + r - 1)}{N} + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\,\frac{\tilde{b}_{2r-1,N}(ln - pn + r - 1)}{N} = \frac{\mathbf{y}(l)}{n}\,.$$

Перепишем эти условия с использованием функций $e_{\alpha,n}$:

$$\mathbf{c}_{0,n} + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\,e_{1,n}(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\,e_{0,n}(l-p) = \mathbf{x}(l),$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\,e_{2,n}(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\,e_{1,n}(l-p) = m\,\mathbf{y}(l).$$

Полученные выражения могут быть записаны более компактно с использованием циклической свёртки:

$$\mathbf{c}_{0,n} + \mathbf{c}_{1,n} * e_{1,n} + \mathbf{c}_{2,n} * e_{0,n} = \mathbf{x},$$

$$\mathbf{c}_{1,n} * e_{2,n} + \mathbf{c}_{2,n} * e_{1,n} = m\,\mathbf{y}.$$

При переходе в спектральную область уравнения примут вид

$$\begin{aligned} m\,\delta_m(l)\,\mathbf{c}_{0,n} + \mathbf{C}_{1,n}(l)\,E_{1,n}(l) + \mathbf{C}_{2,n}(l)\,E_{0,n}(l) &= \mathbf{X}(l), \\ \mathbf{C}_{1,n}(l)\,E_{2,n}(l) + \mathbf{C}_{2,n}(l)\,E_{1,n}(l) &= m\,\mathbf{Y}(l), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\mathbf{C}_{1,n} = \mathcal{F}_m(\mathbf{c}_{1,n})$, $\mathbf{C}_{2,n} = \mathcal{F}_m(\mathbf{c}_{2,n})$, $\mathbf{X} = \mathcal{F}_m(\mathbf{x})$, $\mathbf{Y} = \mathcal{F}_m(\mathbf{y})$.

Условие (17) эквивалентно равенству $\mathbf{C}_{2,n}(0) = 0$. Поэтому при $l = 0$ уравнения (18) сводятся к равенствам

$$\mathbf{C}_{1,n}(0) = m\,\mathbf{Y}(0)/E_{2,n}(0),$$

$$\mathbf{c}_{0,n} = \frac{\mathbf{X}(0) - \mathbf{C}_{1,n}(0)\,E_{1,n}(0)}{m}\,.$$

Согласно леммам 3 и 4 последовательности $\mathbf{C}_{1,n}(0)$ и $\mathbf{c}_{0,n}$ сходятся.

Пусть $l \in 1 : m-1$. В этом случае равенства (18) становятся системой двух линейных уравнений с неизвестными $\mathbf{C}_{1,n}(l)$ и $\mathbf{C}_{2,n}(l)$. Решение этой системы задаётся формулами

$$\mathbf{C}_{1,n}(l) = \frac{\mathbf{X}(l)\,E_{1,n}(l) - m\,\mathbf{Y}(l)\,E_{0,n}(l)}{E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)\,E_{2,n}(l)}\,,$$

$$\mathbf{C}_{2,n}(l) = \frac{m\,\mathbf{Y}(l)\,E_{1,n}(l) - \mathbf{X}(l)\,E_{2,n}(l)}{E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)\,E_{2,n}(l)}\,.$$

По леммам 3 и 4 выражения в правых частях сходятся при $n \to \infty$. Таким образом, последовательности $\mathbf{C}_{1,n}(l)$ и $\mathbf{C}_{2,n}(l)$ сходятся при $n \to \infty$ для всех $l \in 0 : m-1$. Следовательно, сходятся и последовательности $\mathbf{c}_{1,n}(l)$ и $\mathbf{c}_{2,n}(l)$.

Теорема доказана. $\square$

Определим вектор-функцию $\mathbf{S}_r(t)$ формулой

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\,\beta_{2r}\big(\tfrac{t-p}{m}\big). \tag{19}$$

Из леммы 1 следует, что $\mathbf{S}_r \in C^{2r-3}$. Кроме того, ясно, что вектор-функций $\mathbf{S}_r(t)$ периодическая с периодом m.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы предельные соотношения*

$$\Big\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r\big(\tfrac{j}{n}\big)\Big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{равномерно по } j, \tag{20}$$

$$\Big\|n\,\mathbf{\Delta} S_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r'\big(\tfrac{j}{n}\big)\Big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{равномерно по } j. \tag{21}$$

Доказательство. Проверим соотношение (20). Имеем

$$\begin{gathered}\Big\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r\big(\tfrac{j}{n}\big)\Big\| \leqslant \|\mathbf{c}_{0,n} - \mathbf{c}_0\| + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \Big\|\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1) - \mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)\Big\| + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \Big\|\mathbf{c}_{2,n}(p)\,\tilde{b}_{2r,N}(j-pn+r-1) - \mathbf{c}_2(p)\,\beta_{2r}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)\Big\|.\end{gathered} \tag{22}$$

Рассмотрим слагаемые в правой части по отдельности. Величина $\|\mathbf{c}_{0,n}-\mathbf{c}_0\|$, очевидно, стремится к нулю. Покажем, что все слагаемые первой суммы стремятся к нулю равномерно по j. Имеем

$$\begin{aligned}\Big\|\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\tilde b_{2r-1,N}(j-pn+r-1)-\mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)\Big\| \leqslant \\ \leqslant \Big\|\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\tilde b_{2r-1,N}(j-pn+r-1)-\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn+r-1}{N}\big)\Big\| + \\ + \Big\|\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn+r-1}{N}\big)-\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)\Big\| + \\ + \Big\|\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)-\mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)\Big\|.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю по предложению 1, второе — в силу неравенства (12), а сходимость к нулю третьего слагаемого следует из теоремы 1. Аналогичным образом можно показать, что все слагаемые второй суммы в правой части неравенства (22) также стремятся к нулю равномерно по j. Предельное соотношение (20) доказано.

Согласно тождествам (3) и (9) имеют место равенства

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{S}_{r,n}(j) = \sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\frac{\tilde b_{2r-2,N}(j-pn+r-1)}{N} + \\ + \sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_{2,n}(p)\,\frac{\tilde b_{2r-1,N}(j-pn+r-1)}{N}\,, \\ \mathbf{S}'_r(t) = \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-2}\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_2(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{t-p}{m}\big).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Big\|n\,\boldsymbol{\Delta} S_{r,n}(j)-\mathbf{S}'_r\big(\tfrac{j}{n}\big)\Big\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{m}\Big\|\sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\tilde b_{2r-2,N}(j-pn+r-1)-\sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-2}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)\Big\| + \\ + \frac{1}{m}\Big\|\sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_{2,n}(p)\,\tilde b_{2r-1,N}(j-pn+r-1)-\sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_2(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big)\Big\|.\end{aligned}$$

Доказательство того, что правая часть последнего неравенства сходится к нулю, аналогично проведённому доказательству соотношения (20). □

СЛЕДСТВИЕ. *Вектор-функция* $\mathbf{S}_r(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r(l) &= \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \mathbf{S}'_r(l) &= \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0 : m-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Зафиксируем $l \in 0 : m-1$ и запишем (20) для $j = ln$. Согласно (2), получим

$$\big\|\mathbf{S}_{r,n}(ln) - \mathbf{S}_r(l)\big\| = \big\|\mathbf{x}(l) - \mathbf{S}_r(l)\big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, $\mathbf{S}_r(l) = \mathbf{x}(l)$. Аналогично, подставим ln вместо j в (21) и воспользуемся равенствами (2):

$$\big\|n\,\Delta\mathbf{S}_{r,n}(ln) - \mathbf{S}'_r(l)\big\| = \big\|\mathbf{y}(l) - \mathbf{S}'_r(l)\big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, $\mathbf{S}'_r(l) = \mathbf{y}(l)$, что и требовалось. □

5°. Дадим геометрическую интерпретацию теоремы 2. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{S}_{r,n}(j)$. Для наглядности соединим отрезками пары соседних точек $\mathbf{S}_{r,n}(j)$, $\mathbf{S}_{r,n}(j+1)$ для $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную, проходящую через точки $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1)$ и имеющую в этих точках направления $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1)$ соответственно. При этом между соседними точками интерполяции содержится n отрезков ломаной. При увеличении n количество отрезков ломаной будет увеличиваться, но ломаная по-прежнему будет проходить через точки $\mathbf{x}(l)$. Согласно теореме 2, при неограниченном увеличении n построенные ломаные будут стремиться к кривой, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$.

ПРИМЕР. Пусть $m = 4$, $r = 3$. На рисунках 1–4 штриховыми линиями показаны ломаные, соответствующие вектор-функциям $\mathbf{S}_{r,n}$ для различных значений n. Кружками отмечены точки интерполяции $\mathbf{x}(l)$, стрелками — направления векторов $\mathbf{y}(l)$. Кроме того, на каждом рисунке приведена предельная кривая $\mathbf{S}_r(t)$.

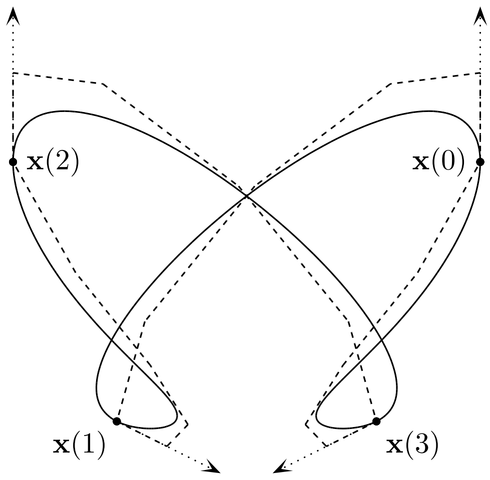

Рис. 1. $n = 5$

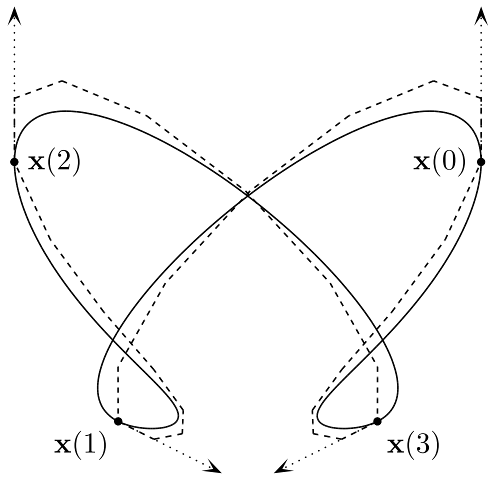

Рис. 2. $n = 7$

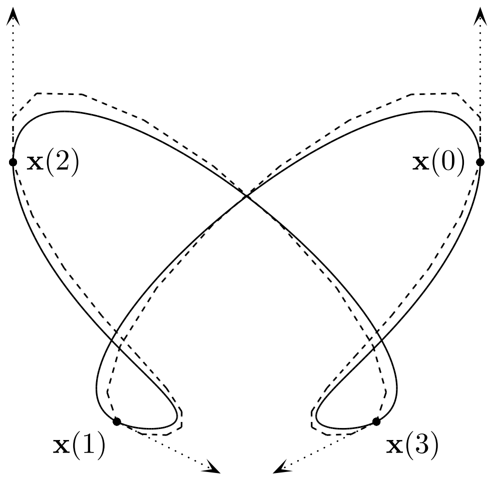

Рис. 3. $n = 10$

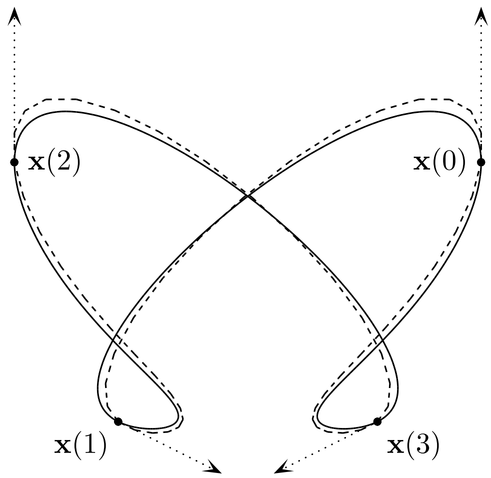

Рис. 4. $n = 15$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Аналог эрмитовой интерполяции в дискретном периодическом случае* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 февраля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0214`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

3. Крылов В. И. *Приближённое вычисление интегралов.* 2 изд. М.: Наука, 1967. 500 с.