

# ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ С ВЕКТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ\*

В. Н. Малозёмов  
malv@math.spbu.ru

Д. А. Хорохонов  
d.khorokhonov@mail.ru

Н. В. Чашников  
nik239@list.ru

4 сентября 2007 г.

1°. Пусть  $N = mn$ , где  $m, n$  — натуральные числа, отличные от единицы. Напомним, как вводятся дискретные  $N$ -периодические  $B$ -сплайны ([1], [2, с. 9–12]).  $B$ -сплайн первого порядка на основном периоде  $0:N-1$  задаётся явно

$$Q_1(j) = \begin{cases} n-j & \text{при } j \in 0:n-1, \\ 0 & \text{при } j \in n:N-n, \\ j-N+n & \text{при } j \in N-n+1:N-1. \end{cases} \quad (1)$$

$B$ -сплайны более высоких порядков определяются с помощью циклической свёртки

$$Q_\nu = Q_1 * Q_{\nu-1}, \quad \nu = 2, 3, \dots \quad (2)$$

Отметим, что  $B$ -сплайн  $Q_r(j)$  принимает только целые неотрицательные значения. Более глубоким является следующее свойство:

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-pn) \equiv n^{2r-1}. \quad (3)$$

В [1] и [2, с. 17] тождество (3) доказывается с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и теоремы о свёртке.

---

\*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DNA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

Введём нормализованные  $B$ -сплайны

$$\tilde{Q}_r(j) = \frac{1}{n^{2r-1}} Q_r(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Для них формулы (1)–(3) примут вид

$$\tilde{Q}_1(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0 : n - 1, \\ 0 & \text{при } j \in n : N - n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N - n + 1 : N - 1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\tilde{Q}_\nu = \frac{1}{n} (\tilde{Q}_1 * \tilde{Q}_{\nu-1}), \quad \nu = 2, 3, \dots; \quad (6)$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_r(j - pn) \equiv 1. \quad (7)$$

Дадим элементарное (без использования ДПФ) доказательство тождества (7), играющего в дальнейшем важную роль.

Отметим, что в силу определения (5)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(j) = n. \quad (8)$$

Зафиксируем  $j$  и представим его в виде  $j = ln + r$ , где  $r \in 0 : n - 1$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_1(j - pn) &= \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_1((l - p)n + r) = \sum_{q=0}^{m-1} \tilde{Q}_1(qn + r) = \\ &= \tilde{Q}_1(r) + \tilde{Q}_1((m-1)n + r) = 1 - \frac{r}{n} + \frac{(m-1)n+r}{n} - (m-1) = 1. \end{aligned}$$

Формула (7) при  $r = 1$  установлена. Сделаем индукционный переход от  $r - 1$  к  $r$ . Согласно (6) и (8) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_r(j - pn) &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(k) \tilde{Q}_{r-1}(j - pn - k) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(k) \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r-1}(j - k - pn) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(k) = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2°. Дискретным  $N$ -периодическим сплайном с векторными коэффициентами называется вектор-функция вида

$$\tilde{S}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \tilde{Q}_r(j - pn), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где  $a_p \in \mathbb{C}^s$ . Считаем, что коэффициенты  $a_p$  продолжены  $m$ -периодически на все целые  $p$ .

Рассмотрим вопрос о вычислении значений  $\tilde{S}(j)$  при всех  $j \in 0:N$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(j) &= \sum_{p=0}^{m-1} a_p \tilde{Q}_1(j - pn), \\ \tilde{S}_\nu &= \frac{1}{n} (\tilde{Q}_1 * \tilde{S}_{\nu-1}), \quad \nu = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{9}$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Справедливо равенство  $\tilde{S} = \tilde{S}_r$ .*

Доказательство. При  $r = 1$  утверждение следует из определений. Сделаем индукционный переход от  $r - 1$  к  $r$ . Согласно (6) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_r(j) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(k) \tilde{S}_{r-1}(j - k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(k) \sum_{p=0}^{m-1} a_p \tilde{Q}_{r-1}(j - k - pn) = \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} a_p \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(k) \tilde{Q}_{r-1}(j - pn - k) \right\} = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \tilde{Q}_r(j - pn) = \tilde{S}(j). \quad \square \end{aligned}$$

3°. Схема (9) допускает эффективную вычислительную реализацию.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** *Справедлива формула*

$$\tilde{S}_1(ln + r) = a_l + \frac{r}{n} \Delta a_l, \quad r \in 0:n-1, \quad l \in 0:m-1. \tag{10}$$

Здесь  $a_m = a_0$ .

Доказательство. В силу  $m$ -периодичности

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(ln + r) &= \sum_{p=0}^{m-1} a_p \tilde{Q}_1((l-p)n + r) = \sum_{q=0}^{m-1} a_{l-q} \tilde{Q}_1(qn + r) = \\ &= a_l \tilde{Q}_1(r) + a_{l-m+1} \tilde{Q}_1((m-1)n + r) = a_l \left(1 - \frac{r}{n}\right) + a_{l+1} \frac{r}{n} = a_l + \frac{r}{n} \Delta a_l. \end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Формула (10) справедлива и при  $r = n$ . В этом случае она принимает вид

$$\tilde{S}_1((l+1)n) = a_{l+1}, \quad l \in 0:m-1. \quad (11)$$

При  $l \in 0:m-2$  равенство (11) следует из (10) при  $r = 0$ . При  $l = m-1$  имеем  $\tilde{S}_1(N) = \tilde{S}_1(0) = a_0 = a_m$ , что соответствует (11). Это замечание позволяет утверждать, что наряду с (10) справедлива формула

$$\tilde{S}_1(ln+r+1) = a_l + \frac{r+1}{n} \Delta a_l, \quad r \in 0:n-1, \quad l \in 0:m-1. \quad (12)$$

Теперь можно записать алгоритм вычисления значений  $\tilde{S}_1(j)$  при всех  $j \in 0:N$ :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(0) &= a_0; \\ \tilde{S}_1(ln+r+1) &= \tilde{S}_1(ln+r) + \frac{1}{n} \Delta a_l, \\ r &\in 0:n-1, \quad l \in 0:m-1. \end{aligned} \quad (13)$$

Равенство (13) получено путём вычитания (10) из (12).

Приведём на псевдоязыке программу, реализующую алгоритм (13):

```

s1(0) := a(0);  n1 := 1/n;  j := 0;
for l := 1 to m do begin
  h := n1 * (a(l) - a(l-1));
  for r := 1 to n do begin
    j := j + 1; s1(j) := s1(j-1) + h
  end
end

```

В программе используется набор векторов-коэффициентов  $a(0), a(1), \dots, a(m)$ , в котором  $a(m) = a(0)$ . В результате работы программы получаем  $\tilde{S}_1(j) = s1(j)$  при  $j \in 0:N$ .

4°. Обратимся к вопросу о вычислении циклической свёртки

$$y(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_1(k) x(j-k),$$

где  $x(j) = (x_1(j), x_2(j), \dots, x_s(j))$  — векторный  $N$ -периодический сигнал.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** *Справедливо равенство*

$$y(j) = \frac{1}{n} \left\{ x(j) + \sum_{k=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) [x(j-k) + x(j+k)] \right\}. \quad (14)$$

Доказательство. В силу  $N$ -периодичности сигнала  $x$  имеем

$$\begin{aligned} ny(j) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) x(j-k) + \sum_{k=N-n+1}^{N-1} \left(1 - \frac{N-k}{n}\right) x(j+(N-k)) = \\ &= x(j) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) [x(j-k) + x(j+k)], \end{aligned}$$

что равносильно (14). □

Зафиксируем  $j \in 0:N-1$  и введём обозначения

$$t_k = 1 - \frac{k}{n}, \quad d_0 = x(j), \quad d_k = x(j-k) + x(j+k) \quad \text{при } k \in 1:n-1.$$

Тогда формулу (14) можно переписать в виде

$$y(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_k d_k.$$

Для вычисления последней суммы построим последовательность векторов  $\{h_k\}$  по правилу

$$h_k = d_k + h_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad h_{-1} = \mathbb{O}. \quad (15)$$

Учитывая, что  $t_k - t_{k+1} = \frac{1}{n}$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} t_k d_k &= \sum_{k=0}^{n-1} t_k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k h_k - \sum_{k=-1}^{n-2} t_{k+1} h_k = \\ &= t_{n-1} h_{n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} h_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y(j) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} h_k.$$

Вычисление  $y(j)$  сведено к сложению векторов  $h_k$ , последовательно определяемых формулой (15).

Запишем на псевдоязыке программу, реализующую описанный алгоритм вычисления векторной циклической свёртки  $y(j)$  при всех  $j \in 0:N$ :

```

n1 := 1/(n*n);
for j := 0 to N-1 do begin
  h := x(j);  s := h;
  for k := 1 to n-1 do begin
    h := h + x(j-k) + x(j+k);
    s := s + h
  end;
  y(j) := n1 * s
end;
y(N) := y(0)

```

В программе используются векторные величины  $x(-n+1), x(-n), \dots, x(N+n-2)$ , при этом в силу  $N$ -периодичности

$$\begin{aligned} x(j) &= x(N+j) \quad \text{при } j \in -n+1:-1, \\ x(j) &= x(j-N) \quad \text{при } j \in N:N+n-2. \end{aligned}$$

После работы программы в массиве  $y(0:N)$  будут находиться требуемые векторные значения циклической свёртки.

5°. Для вычисления значений сплайна  $\tilde{S}_r(j)$  при всех  $j \in 0:N$ , согласно (9), потребуется один раз применить алгоритм, описанный в п. 3°, и  $r-1$  раз алгоритм, описанный в п. 4°.

6°. Рассмотрим задачу векторной сплайн-интерполяции

$$\tilde{S}_r(ln) = z(l), \quad l \in 0:m-1, \quad (16)$$

где  $z(l) = (z_1(l), z_2(l), \dots, z_s(l))$ . Она распадается на  $s$  независимых скалярных подзадач

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_{p\nu} \tilde{Q}_r((l-p)n) = z_\nu(l), \quad \nu = 1, \dots, s,$$

каждую из которых (при фиксированном  $\nu$ ) с учётом (4) можно переписать так:

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_{p\nu} Q_r((l-p)n) = n^{2r-1} z_\nu(l), \quad l \in 0:m-1. \quad (17)$$

Решение задачи (17) известно ([1], [2, с. 21–22]):

$$a_{p\nu} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n^{2r-1} Z_\nu(k)}{T_r(k)} \omega_m^{kp}, \quad p \in 0:m-1. \quad (18)$$

Здесь  $Z_\nu = \mathcal{F}_m(z_\nu)$  и

$$T_r(k) = \begin{cases} n^{2r-1} & \text{при } k = 0, \\ (2 \sin \frac{\pi k}{m})^{2r} \Lambda_r(k) & \text{при } k \in 1 : m - 1; \end{cases}$$

$$\Lambda_r(k) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left( 2 \sin \frac{\pi(qm+k)}{N} \right)^{-2r}.$$

Обозначим  $\tilde{T}_r(k) = \frac{1}{n^{2r-1}} T_r(k)$ , так что

$$\tilde{T}_r(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ (2 \sin \frac{\pi k}{m})^{2r} \tilde{\Lambda}_r(k) & \text{при } k \in 1 : m - 1; \end{cases}$$

$$\tilde{\Lambda}_r(k) = \sum_{q=0}^{n-1} \left( 2n \sin \frac{\pi(qm+k)}{N} \right)^{-2r}.$$

Тогда формула (18) примет вид

$$a_{p\nu} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Z_\nu(k)}{\tilde{T}_r(k)} \omega_m^{kp}, \quad p \in 0 : m - 1.$$

Решением задачи (16) является следующий набор векторов-коэффициентов сплайна  $\tilde{S}_r$ :  $a_p = (a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{ps})$ ,  $p \in 0 : m - 1$ .

**7°.** Пусть  $x(j) = (x_1(j), x_2(j), \dots, x_s(j))$ . Поскольку

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|(\Delta^r x)(j)\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^s |(\Delta^r x_\nu)(j)|^2 = \sum_{\nu=1}^s \sum_{j=0}^{N-1} |(\Delta^r x_\nu)(j)|^2,$$

то, принимая во внимание экстремальное свойство интерполяционного сплайна ([1],[2, с. 23–24]), можно утверждать, что векторный интерполяционный сплайн  $\tilde{S}_r(j)$  является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|(\Delta^r x)(j)\|^2 \rightarrow \min,$$

$$x(ln) = z(l), \quad l \in 0 : m - 1,$$

на множестве дискретных  $N$ -периодических вектор-функций  $x = x(j)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

8°. Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами можно использовать в геометрическом моделировании для построения замкнутых кривых. Чтобы пояснить это, перепишем формулу для  $\tilde{S}_r(j)$  в виде

$$\tilde{S}_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_r(j - pn) a_p.$$

Нас интересует случай вещественных  $a_p$ ,  $a_p \in \mathbb{R}^s$ . При фиксированном  $j$  числа  $\tilde{Q}_r(j - pn)$ ,  $p \in 0 : m - 1$ , неотрицательны и в сумме равны единице, так что  $\tilde{S}_r(j)$  есть выпуклая комбинация векторов  $a_p$ . В геометрическом моделировании векторы  $a_p$  называются *полюсами*. Когда  $j$  пробегает значения от 0 до  $N$ , вектор  $\tilde{S}(j)$  описывает замкнутую дискретную кривую в  $\mathbb{R}^s$ , содержащуюся в выпуклой оболочке полюсов. Кривую с требуемыми свойствами получают либо при непосредственном задании полюсов, либо при полюсах, определяемых из интерполяционных условий.

**ПРИМЕР 1.** *Моделирование лепестковой кривой.*

Пусть  $m = 20$ ,  $n = 16$ ,  $r = 2$ ,  $s = 2$ . Решим задачу векторной сплайн-интерполяции для точек  $z(j)$ , приведённых в табл. 1 и изображённых на рис. 1. Коэффициенты  $a_p$  интерполяционного сплайна и его значения показаны на рис. 2. Замкнутая ломаная, полученная путём соединения соседних точек сплайна отрезками, представлена на рис. 3.

Таблица 1

$j$	$z(j)$	$j$	$z(j)$
0	(0.000, 0.000)	10	(0.000, 1.000)
1	(-0.698, 0.111)	11	(0.111, 0.698)
2	(-0.951, 0.309)	12	(0.000, 0.000)
3	(-0.630, 0.321)	13	(-0.321, -0.630)
4	(0.000, 0.000)	14	(-0.588, -0.809)
5	(0.500, -0.500)	15	(-0.500, -0.500)
6	(0.588, -0.809)	16	(0.000, 0.000)
7	(0.321, -0.630)	17	(0.630, 0.321)
8	(0.000, 0.000)	18	(0.951, 0.309)
9	(-0.111, 0.698)	19	(0.698, 0.111)

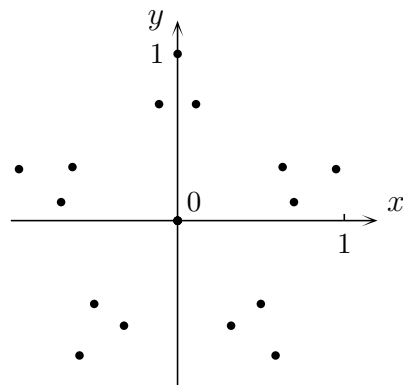


Рис. 1. Точки интерполяции

9°. Обратимся к двумерной задаче векторной сплайн-интерполяции. Пусть  $N_1 = m_1 n_1$ ,  $N_2 = m_2 n_2$ , где  $m_1$ ,  $n_1$  и  $m_2$ ,  $n_2$  — натуральные числа, отличные от единицы. Зададим два набора вектор-функций

$$\begin{aligned} f_i &: (0 : N_2 - 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, & i \in 0 : m_1 - 1, \\ g_j &: (0 : N_1 - 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, & j \in 0 : m_2 - 1, \end{aligned}$$



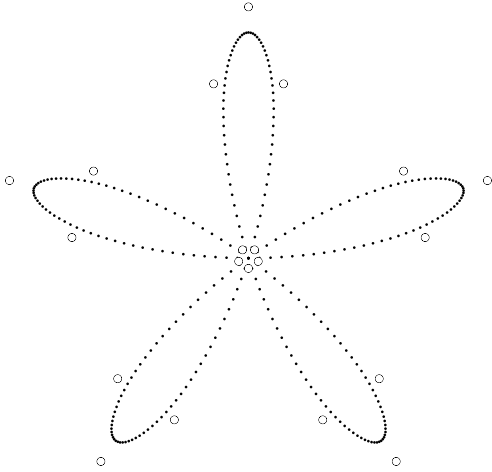


Рис. 2. Полюсы и значения  
дискретного сплайна

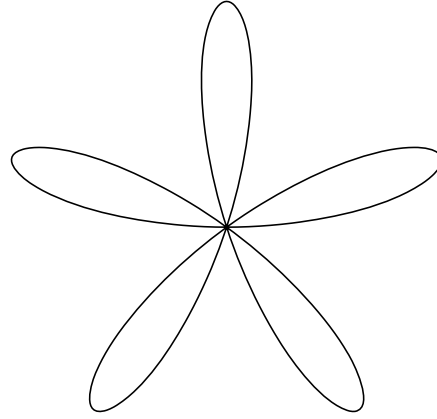


Рис. 3. Пятилистник

для которых выполнены равенства

$$f_i(jn_2) = g_j(in_1), \quad i \in 0:m_1 - 1, \quad j \in 0:m_2 - 1. \quad (19)$$

Ставится задача: построить вектор-функцию  $c: (0:N_1-1) \times (0:N_2-1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющую условиям

$$c(in_1, \cdot) = f_i, \quad i \in 0:m_1 - 1, \quad (20)$$

$$c(\cdot, jn_2) = g_j, \quad j \in 0:m_2 - 1. \quad (21)$$

Выберем два натуральных числа  $r_1, r_2$ . Для каждого  $q \in 0:N_2 - 1$  построим сплайн  $\tilde{S}_{r_1}^{(q)}$ , решающий интерполяционную задачу

$$\tilde{S}_{r_1}^{(q)}(in_1) = f_i(q), \quad i \in 0:m_1 - 1. \quad (22)$$

Положим  $h_j(p) = g_j(p) - \tilde{S}_{r_1}^{(jn_2)}(p)$  для всех  $p \in 0:N_1 - 1, j \in 0:m_2 - 1$ . Из (22) и (19) следует, что

$$h_j(in_1) = g_j(in_1) - f_i(jn_2) = 0, \quad i \in 0:m_1 - 1, \quad j \in 0:m_2 - 1. \quad (23)$$

Далее для каждого  $p \in 0:N_1 - 1$  построим сплайн  $\tilde{S}_{r_2}^{(p)}$ , решающий интерполяционную задачу

$$\tilde{S}_{r_2}^{(p)}(jn_2) = h_j(p), \quad j \in 0:m_2 - 1. \quad (24)$$

Положим

$$c(p, q) = \tilde{S}_{r_1}^{(q)}(p) + \tilde{S}_{r_2}^{(p)}(q), \quad p \in 0:N_1 - 1, \quad q \in 0:N_2 - 1. \quad (25)$$

Покажем, что функция  $c(p, q)$  удовлетворяет условиям (20) и (21).

Согласно (23) и (24),  $\tilde{S}_{r_2}^{(in_1)}(jn_2) = 0$  при всех  $j \in 0:m_2 - 1$ , поэтому  $\tilde{S}_{r_2}^{(in_1)}(q) \equiv 0$  при всех  $i \in 0:m_1 - 1$ . Принимая во внимание (22), получаем

$$c(in_1, q) = \tilde{S}_{r_1}^{(q)}(in_1) = f_i(q), \quad q \in 0:N_2 - 1, \quad i \in 0:m_1 - 1,$$

т. е. выполнено условие (20). В силу (24)

$$\begin{aligned} c(p, jn_2) &= \tilde{S}_{r_1}^{(jn_2)}(p) + \tilde{S}_{r_2}^{(p)}(jn_2) = \\ &= \tilde{S}_{r_1}^{(jn_2)}(p) + h_j(p) = g_j(p), \quad p \in 0:N_1 - 1, \quad j \in 0:m_2 - 1, \end{aligned}$$

т. е. условие (21) также выполнено.

**10°.** Рассмотрим задачу построения поверхности, имеющей вид замкнутой трубки. Определять форму поверхности будет остов, состоящей из двух наборов дискретных кривых. Кривые первого набора  $f_i$  будут идти вдоль трубки, кривые второго набора  $g_j$  — поперёк. Требуемая поверхность будет задаваться дискретным сплайном (25),  $N_1$ -периодическим по первому аргументу и  $N_2$ -периодическим — по второму.

**ПРИМЕР 2.** *Моделирование трубчатой поверхности.*

Начнём с задания плоской кривой, изображающей узел. Положим

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 3t\right) \cos 2t, \\ y(t) &= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 3t\right) \sin 2t. \end{aligned}$$

При изменении  $t$  от 0 до  $2\pi$  точка  $(x(t), y(t))$  описывает замкнутую кривую, представленную на рис. 4. Теперь добавим третью координату  $z(t) = \frac{1}{5} \sin 3t$ . Вектор-функция  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  определяет замкнутую пространственную кривую, имеющую вид узла.

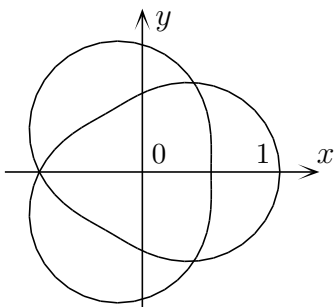


Рис. 4. Плоский узел

Введём две основные кривые, которые будут идти вдоль трубки:

$$\begin{aligned} r_0(t) &= r(t) + \frac{1}{10} \frac{r'(t) \times (0, 0, 1)}{\|r'(t) \times (0, 0, 1)\|}, \\ r_1(t) &= r(t) - \frac{1}{10} \frac{r'(t) \times (0, 0, 1)}{\|r'(t) \times (0, 0, 1)\|}. \end{aligned}$$

Здесь  $\times$  — знак векторного умножения. При фиксированном  $t$  точки  $r_0(t)$  и  $r_1(t)$  получаются

из  $r(t)$  сдвигом на  $\frac{1}{10}$  вдоль двух противоположных направлений, ортогональных вектору  $r'(t)$  и оси  $Oz$ .

Поперечные сечения будут определять три остовные кривые  $v_0(t)$ ,  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  — окружности с центрами  $r(0)$ ,  $r(2\pi/3)$ ,  $r(4\pi/3)$ , радиусом  $\frac{1}{10}$ , лежащие в плоскостях, ортогональных векторам  $r'(0)$ ,  $r'(2\pi/3)$  и  $r'(4\pi/3)$  соответственно. Кривые  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  изображены на рис. 5.

Осталось получить дискретные функции  $f_i$  и  $g_j$  из непрерывных функций  $r_i$  и  $v_j$ . Пусть  $m_1 = 2$ ,  $n_1 = 5$  и  $m_2 = 3$ ,  $n_2 = 40$ , так что  $N_1 = 10$ ,  $N_2 = 120$ . Положим

$$\begin{aligned} f_i(q) &= r_i(2\pi q/N_2), \quad q \in 0:N_2 - 1, \quad i \in 0:1, \\ g_j(p) &= v_j(2\pi p/N_1), \quad p \in 0:N_1 - 1, \quad j \in 0:2. \end{aligned}$$

На рис. 6 показана трубчатая поверхность, построенная по формуле (25). Остовные кривые выделены жирными линиями.

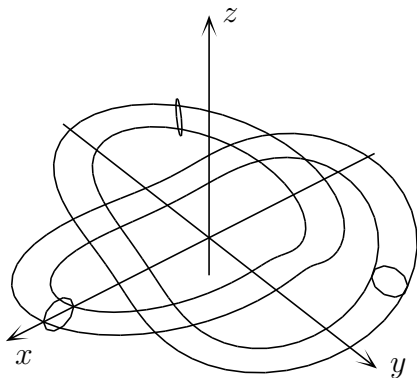


Рис. 5. Остовные кривые

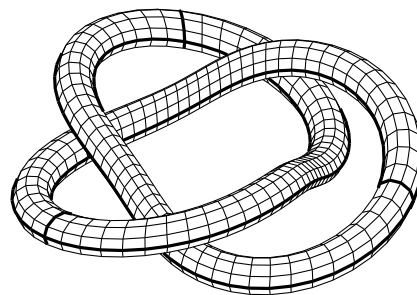


Рис. 6. Узел

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.
2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.