РАЗДЕЛЁННЫЕ РАЗНОСТИ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

10 октября 2006 г.

Разделённые разности с кратными узлами активно используются в геометрическом моделировании. Теорию таких разностей можно строить либо с помощью предельного перехода от разделённых разностей с простыми узлами [1, с. 173-181], либо на основе эрмитовой интерполяции [2, с. 65-77]. Мы выбираем второй вариант.

1°. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество алгебраических полиномов степени не выше n. Рассмотрим задачу эрмитовой интерполяции: найти полином $P_n \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющий условиям

$$P_n^{(s)}(x_k) = f^{(s)}(x_k), \qquad k \in 1:m, \quad s \in 0:r_k - 1. \tag{1}$$

Здесь $x_1, \ldots, x_m$ – попарно различные точки на вещественной прямой и $\sum_{k=1}^{m} r_k = n + 1$. Предполагается, что все производные функции f из правой части (1) существуют.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Задача* (1) *имеет решение и это решение единственно.*

Доказательство. Условия (1) – это система линейных уравнений $(n+1)$-го порядка относительно коэффициентов полинома $P_n(x)$. Предложение будет доказано, если мы установим, что однородная система имеет только нулевое решение.

Рассмотрим однородную систему

$$P_n^{(s)}(x_k) = 0, \qquad k \in 1:m, \quad s \in 0:r_k - 1, \tag{2}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

и возьмём любое её решение, порождающее полином $\widehat{P}_n(x)$. Согласно (2) полином $\widehat{P}_n(x)$ имеет $n+1$ корней с учётом их кратности. Поскольку $\widehat{P}_n \in \mathcal{P}_n$, то необходимо $\widehat{P}_n(x) \equiv 0$. Но тогда все коэффициенты $\widehat{P}_n(x)$ равны нулю, т. е. система (2) имеет только нулевое решение. □

Старший коэффициент (при x^n) интерполяционного полинома $P_n(x)$ называется *разделённой разностью* n*-го порядка функции* f и обозначается

$$f\big[x_1^{\langle r_1\rangle}, \ldots, x_m^{\langle r_m\rangle}\big].$$

Из определения (и единственности интерполяционного полинома) следует, что разделённая разность линейна по f и симметрична по узлам. Последнее означает, что

$$f\big[x_1^{\langle r_1\rangle}, \ldots, x_i^{\langle r_i\rangle}, \ldots, x_j^{\langle r_j\rangle}, \ldots, x_m^{\langle r_m\rangle}\big] = f\big[x_1^{\langle r_1\rangle}, \ldots, x_j^{\langle r_j\rangle}, \ldots, x_i^{\langle r_i\rangle}, \ldots, x_m^{\langle r_m\rangle}\big].$$

В дальнейшем вместо $x_k^{\langle 1\rangle}$ будем писать x_k. Запись $x_k^{\langle 0\rangle}$ нужно понимать так, что узел x_k отсутствует.

2°. Рассмотрим частные случаи.

1) $m=1,\ r_1=1\ \ [n=0]$. Имеем $P_0(x) \equiv f(x_1)$. По определению

$$f[x_1] = f(x_1).$$

2) $m=1,\ r_1=n+1$. Задача (1) принимает вид

$$P_n^{(s)}(x_1) = f^{(s)}(x_1), \qquad s \in 0\,{:}\,n.$$

Её решением является полином Тейлора

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{f^{(s)}(x_1)}{s!}\,(x-x_1)^s.$$

По определению

$$f\big[x_1^{\langle n+1\rangle}\big] = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}.$$

3) $m=2,\ r_1=r_2=1\ \ [n=1]$. Запишем интерполяционный полином

$$P_1(x) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\,f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,f(x_2).$$

По определению

$$f\big[x_1, x_2\big] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

4) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. В этом случае интерполяционный полином $P_n(x)$ совпадает с $f(x)$, так что

$$f\big[x_1^{\langle r_1\rangle}, \ldots, x_m^{\langle r_m\rangle}\big] = a_0.$$

5) $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. По определению разделённой разности

$$f\big[x_1^{\langle r_1\rangle}, \ldots, x_m^{\langle r_m\rangle}\big] = 0.$$

3°. Обозначим через P_{n-1} и Q_{n-1} интерполяционные полиномы степени не выше $n-1$, построенные по узлам $x_1^{\langle r_1\rangle}, \ldots, x_{m-1}^{\langle r_{m-1}\rangle}, x_m^{\langle r_m-1\rangle}$ и $x_1^{\langle r_1-1\rangle}, x_2^{\langle r_2\rangle}, \ldots, x_m^{\langle r_m\rangle}$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При $m \geqslant 2$ справедливо тождество*

$$P_n(x) = \frac{x_m - x}{x_m - x_1}\, P_{n-1}(x) + \frac{x - x_1}{x_m - x_1}\, Q_{n-1}(x). \tag{3}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что полином $\widetilde{P}_n(x)$, стоящий в правой части (3), удовлетворяет условиям (1).

Начнём с соотношения

$$\widetilde{P}_n^{(s)}(x_1) = f^{(s)}(x_1), \qquad s \in 0 : r_1 - 1. \tag{4}$$

Ясно, что $\widetilde{P}_n(x_1) = P_{n-1}(x_1) = f(x_1)$. При $r_1 > 1$ имеем по определению

$$\begin{aligned} P_{n-1}^{(s)}(x_1) &= f^{(s)}(x_1), \qquad s \in 0 : r_1 - 1;\\ Q_{n-1}^{(s)}(x_1) &= f^{(s)}(x_1), \qquad s \in 0 : r_1 - 2. \end{aligned} \tag{5}$$

Воспользуемся формулой Лейбница для производной s-го порядка от произведения двух функций, согласно которой при $s \in 1 : r_1 - 1$

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_n^{(s)}(x) = \frac{x_m - x}{x_m - x_1}\, P_{n-1}^{(s)}(x) - \frac{s}{x_m - x_1}\, P_{n-1}^{(s-1)}(x) +\\ + \frac{x - x_1}{x_m - x_1}\, Q_{n-1}^{(s)}(x) + \frac{s}{x_m - x_1}\, Q_{n-1}^{(s-1)}(x). \end{aligned} \tag{6}$$

При $x = x_1$ в силу (5) получим

$$\widetilde{P}_n^{(s)}(x_1) = P_{n-1}^{(s)}(x_1) = f^{(s)}(x_1), \qquad s \in 1 : r_1 - 1.$$

Равенства (4) установлены.

При $k \in 2\!:\!m-1$ проверка соотношений

$$\widetilde{P}_n^{(s)}(x_k) = f^{(s)}(x_k), \qquad s \in 0\!:\!r_k-1, \tag{7}$$

упрощается, поскольку в этом случае

$$P_{n-1}^{(s)}(x_k) = Q_{n-1}^{(s)}(x_k) = f^{(s)}(x_k), \qquad s \in 0\!:\!r_k-1. \tag{8}$$

Согласно определению $\widetilde{P}_n(x)$ и (8) при $s = 0$ имеем $\widetilde{P}_n(x_k) = f(x_k)$. При $s \in 1\!:\!r_k-1$ соотношения (7) следуют из (6) и (8).

Остаётся проверить равенства

$$\widetilde{P}_n^{(s)}(x_m) = f^{(s)}(x_m), \qquad s \in 0\!:\!r_m-1. \tag{9}$$

При $s = 0$ имеем $\widetilde{P}_n(x_m) = Q_{n-1}(x_m) = f(x_m)$. Если $r_m > 1$, то по определению

$$\begin{aligned} &P_{n-1}^{(s)}(x_m) = f^{(s)}(x_m), \qquad s \in 0\!:\!r_m-2;\\ &Q_{n-1}^{(s)}(x_m) = f^{(s)}(x_m), \qquad s \in 0\!:\!r_m-1. \end{aligned}$$

Учитывая это и формулу (6), приходим к (9) при $s \in 1\!:\!r_m-1$.

Предложение доказано. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. *При $m \geqslant 2$ для разделённых разностей справедливо рекуррентное соотношение*

$$\begin{aligned} f\big[x_1^{\langle r_1\rangle}, \dots, x_m^{\langle r_m\rangle}\big] = \frac{1}{x_m - x_1}\Big\{ &f\big[x_1^{\langle r_1-1\rangle}, x_2^{\langle r_2\rangle}, \dots, x_m^{\langle r_m\rangle}\big] - \\ &- f\big[x_1^{\langle r_1\rangle}, \dots, x_{m-1}^{\langle r_{m-1}\rangle}, x_m^{\langle r_m-1\rangle}\big]\Big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

4°. Переобозначим узлы $\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1 \text{ раз}}, \dots, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{r_m \text{ раз}}$ следующим образом: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$. Тогда формулу (10) при $\xi_{n+1} \neq \xi_1$ (при $m \geqslant 2$) можно переписать так:

$$f\big[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}\big] = \frac{f\big[\xi_2, \dots, \xi_{n+1}\big] - f\big[\xi_1, \dots, \xi_n\big]}{\xi_{n+1} - \xi_1}. \tag{11}$$

Или так

$$f\big[\xi_2, \dots, \xi_{n+1}\big] = f\big[\xi_1, \dots, \xi_n\big] + (\xi_{n+1} - \xi_1) f\big[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}\big]. \tag{12}$$

Последняя формула верна и при $\xi_{n+1} = \xi_1$ (при $m = 1$), поскольку в этом случае

$$f\big[\xi_2, \dots, \xi_{n+1}\big] = f\big[\xi_1, \dots, \xi_n\big] = \frac{f^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для разделённых разностей справедлив аналог формулы Лейбница:*

$$(fg)\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k}\big]=\sum_{l=0}^{k} f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]\,g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k}\big]. \tag{13}$$

Доказательство. При $k=0$ утверждение очевидно. Сделаем индукционный переход от k к $k+1$.

При $\xi_{i+k+1}=\xi_i$, когда $\xi_i=\xi_{i+1}=\dots=\xi_{i+k+1}$, согласно классической формуле Лейбница имеем

$$(fg)\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k+1}\big]=\frac{(fg)^{(k+1)}(\xi_i)}{(k+1)!}=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{l=0}^{k+1}C_{k+1}^{l}f^{(l)}(\xi_i)g^{(k+1-l)}(\xi_i)=$$

$$=\sum_{l=0}^{k+1}\frac{f^{(l)}(\xi_i)}{l!}\,\frac{g^{(k+1-l)}(\xi_i)}{(k+1-l)!}=\sum_{l=0}^{k+1} f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]\,g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big].$$

Пусть $\xi_{i+k+1}\neq\xi_i$. Воспользуемся (11) и индукционным предположением. Запишем

$$(fg)\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k+1}\big]=\frac{(fg)\big[\xi_{i+1},\dots,\xi_{i+k+1}\big]-(fg)\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k}\big]}{\xi_{i+k+1}-\xi_i}=$$

$$=(\xi_{i+k+1}-\xi_i)^{-1}\Big\{\sum_{l=1}^{k+1} f\big[\xi_{i+1},\dots,\xi_{i+l}\big]\,g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big]-$$

$$-\sum_{l=0}^{k} f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]\,g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k}\big]\Big\}. \tag{14}$$

В силу (12)

$$f\big[\xi_{i+1},\dots,\xi_{i+l}\big]=f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l-1}\big]+(\xi_{i+l}-\xi_i)f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big],$$

$$g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k}\big]=g\big[\xi_{i+l+1},\dots,\xi_{i+k+1}\big]-(\xi_{i+k+1}-\xi_{i+l})g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big].$$

Подставляя это в (14), получаем

$$(fg)\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k+1}\big]=(\xi_{i+k+1}-\xi_i)^{-1}\Big\{\sum_{l=1}^{k+1} f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l-1}\big]\,g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big]+$$

$$+\sum_{l=1}^{k+1}(\xi_{i+l}-\xi_i)f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]\,g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big]+$$

$$+\sum_{l=0}^{k}(\xi_{i+k+1}-\xi_{i+l})f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big]-$$
$$-\sum_{l=0}^{k}f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]g\big[\xi_{i+l+1},\dots,\xi_{i+k+1}\big]\Big\}.$$

В фигурных скобках первая и последняя суммы взаимно уничтожаются. Приходим к равенству

$$(fg)\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k+1}\big]=f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k+1}\big]g\big[\xi_{i+k+1}\big]+$$
$$+f\big[\xi_i\big]g\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k+1}\big]+\sum_{l=1}^{k}f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big]=$$
$$=\sum_{l=0}^{k+1}f\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big]g\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k+1}\big].$$

Предложение доказано. □

5°. Формула (13) имеет много приложений. Рассмотрим одно из них.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При натуральном r и $k\in 0:r$ справедливо тождество*

$$(\xi-x)^r\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k}\big]=\sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_k=r-k}\ \prod_{s=0}^{k}(\xi_{i+s}-x)^{\alpha_s}. \tag{15}$$

Суммирование ведётся по всем целым неотрицательным индексам α_s, таким, что $\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_k=r-k$.

Доказательство. При $r=1$ утверждение очевидно (как для $k=0$, так и для $k=1$). Сделаем индукционный переход от r к $r+1$.

Требуется установить, что при $k\in 0:r+1$

$$(\xi-x)^{r+1}\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k}\big]=\sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_k=r+1-k}\ \prod_{s=0}^{k}(\xi_{i+s}-x)^{\alpha_s}. \tag{16}$$

При $k=r+1$ формула (16) верна (она принимает вид $1=1$). Верна она и при $k=0$. Пусть $k\in 1:r$. На основании (13) и индукционного предположения запишем

$$\big((\xi-x)^r(\xi-x)\big)\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k}\big]=\sum_{l=0}^{k}(\xi-x)^r\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+l}\big](\xi-x)\big[\xi_{i+l},\dots,\xi_{i+k}\big]=$$
$$=(\xi-x)^r\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k-1}\big]+(\xi-x)^r\big[\xi_i,\dots,\xi_{i+k}\big](\xi_{i+k}-x)=$$

$$= \sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}=r-k+1} \prod_{s=0}^{k-1} (\xi_{i+s} - x)^{\alpha_s} +$$

$$+ \sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_k=r-k} \Big(\prod_{s=0}^{k-1} (\xi_{i+s} - x)^{\alpha_s} \Big) (\xi_{i+k} - x)^{\alpha_k+1} =$$

$$= \sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_k=r+1-k} \prod_{s=0}^{k} (\xi_{i+s} - x)^{\alpha_s}.$$

Последняя сумма составлена из двух сумм, соответствующих $\alpha_k = 0$ и $\alpha_k \geqslant 1$.

Предложение доказано. □

Формула (15), в частности, показывает, что разделённая разность k-го порядка по ξ от полинома r-й степени $(\xi - x)^r$ является полиномом $(r - k)$-й степени от x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений.* Том 1. Изд. второе. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

2. Мысовских И. П. *Лекции по методам вычислений.* Изд. второе. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 472 с.