ПРЯМАЯ ЛИФТИНГОВАЯ СХЕМА*

В. Н. Малозёмов Н. А. Селянинова

malv@gamma.math.spbu.ru vinyo@mail.ru

26 апреля 2005 г.

Доклад представляет собой усовершенствованный вариант первой части статьи [1]. Описано полное лифтинговое преобразование сигнала, основанное на дискретной периодической сплайн-интерполяции. Выведены формулы точного восстановления сигнала (обращения).

Используются следующие обозначения:

$\mathbb{C}_N$ — пространство сигналов (комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента),

$\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы,

$\mathcal{F}_N$ — дискретное преобразование Фурье порядка N(сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \omega_N^{-kj}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,).$$

1. Предварительные сведения

1.1. Пусть сигнал x принадлежит пространству $\mathbb{C}_N$, где $N = 2m$. Обозначим

$$e(j) = x(2j), \quad d(j) = x(2j+1), \qquad j \in 0 : m-1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Спектры $X = \mathcal{F}_N(x), E = \mathcal{F}_m(e), D = \mathcal{F}_m(d)$ связаны соотношением*

$$X(k) = E(k) + \omega_N^{-k} D(k), \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.1}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Доказательство. При $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\frac{1}{2}\big[X(k)+X(k+m)\big] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2m-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1+(-1)^j\big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} x(2\,l)\,\omega_m^{-kl} = \sum_{l=0}^{m-1} e(l)\,\omega_m^{-kl} = E(k)\,,$$

$$\frac{1}{2}\big[X(k)-X(k+m)\big] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2m-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1-(-1)^j\big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} x(2\,l+1)\,\omega_N^{-k(2\,l+1)} = \omega_N^{-k}\sum_{l=0}^{m-1} d(l)\,\omega_m^{-kl} = \omega_N^{-k} D(k)\,.$$

Сложив эти равенства, придем к (1.1). □

1.2. Напомним (см. [2]), что при $N = nm$ и натуральном r B-сплайн $Q_r \in \mathbb{C}_N$ определяется формулой

$$Q_r(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\,\omega_N^{kj}\,, \tag{1.2}$$

где

$$u(k) = \begin{cases} n^2 & \text{при } k=0,\\ \Big[\sin\frac{\pi k}{m}\big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{-1}\Big]^2 & \text{при } k=1,\ldots,N-1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Сплайном порядка r называется линейная комбинация с комплексными коэффициентами сдвигов B-сплайна:

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\,Q_r(j-pn)\,.$$

Рассмотрим задачу сплайн-интерполяции

$$S(ln) = z(l)\,, \qquad l \in 0:m-1\,. \tag{1.4}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Задача (1.4) имеет единственное решение. Для дискретного преобразования Фурье $C = \mathcal{F}_m(c)$ коэффициентов интерполяционного сплайна справедлива формула*

$$C(k) = Z(k)/T_r(k)\,, \qquad k \in 0:m-1\,,$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$ и

$$T_r(k) = \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(pn)\,\omega_m^{-kp}\,.$$

1.3. В дальнейшем нас будет интересовать случай $n = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Коэффициенты $T_r(k)$ при $n = 2$ допускают представление*

$$T_r(k) = \tfrac{1}{2}\Big[\big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r} + \big(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r}\Big], \qquad k \in 0 : m-1\,. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (1.5) при $n = 2$ (при $N = 2m$) принимает вид

$$u(k) = \big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2}, \qquad k \in 0 : N-1\,.$$

В силу (1.2)

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k) = u^r(k) = \big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r}, \qquad k \in 0 : N-1\,. \tag{1.6}$$

Вместе с тем,

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k) + \big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k+m) = \sum_{j=0}^{2m-1} Q_r(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1 + (-1)^j\big) =$$
$$= 2\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(2p)\,\omega_m^{-kp} = 2\,T_r(k).$$

Отсюда и из (1.6) следует (1.5). □

1.4. Пусть S - интерполяционный сплайн при $N = 2m$. Он определяется условием

$$S(2\,l) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1\,.$$

Вычислим значения $\sigma(l) = S(2\,l+1)$, $l \in 0 : m-1$. Для этого достаточно найти $\mathcal{F}_m(\sigma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедлива формула*

$$\big[\mathcal{F}_m(\sigma)\big](k) = \omega_N^k\,U_1(k)\,Z(k), \qquad k \in 0 : m-1\,, \tag{1.7}$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$ и

$$U_1(k) = \frac{\big(\cos\frac{\pi k}{N}\big)^{2r} - \big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{2r}}{\big(\cos\frac{\pi k}{N}\big)^{2r} + \big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{2r}}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению сплайна при $N = 2m$ имеем

$$S(2\,l+1) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\,Q_r\big(2(l-p)+1\big)\,.$$

Обозначим $h(p) = Q_r(2p{+}1)$. Тогда последнее равенство можно переписать в виде $\sigma = c * h$. По теореме о свёртке

$$\mathcal{F}_m(\sigma) = \mathcal{F}_m(c)\,\mathcal{F}_m(h)\,. \tag{1.8}$$

Найдём $\mathcal{F}_m(h)$. Поскольку

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k) - \big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k+m) = \sum_{j=0}^{2m-1} Q_r(j)\,\omega_N^{-kj}\big(1-(-1)^j\big) =$$

$$= 2\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(2p+1)\,\omega_N^{-k(2p+1)} = 2\,\omega_N^{-k}\sum_{p=0}^{m-1} h(p)\,\omega_m^{-kp} = 2\,\omega_N^{-k}\big[\mathcal{F}_m(h)\big](k),$$

то

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{F}_m(h)\big](k) &= \tfrac{1}{2}\,\omega_N^k\big[u^r(k) - u^r(k+m)\big] = \\ &= \tfrac{1}{2}\,\omega_N^k\Big[\big(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r} - \big(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\big)^{2r}\Big]\,.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Теперь (1.7) следует из (1.8), предложения 2, (1.5) и (1.9). □

Отметим, что N-периодический сигнал U_1 удовлетворяет условию $U_1(k{+}m) = -U_1(k)$. Это гарантирует, в частности, что сигнал $\omega_N^k U_1(k)$ является m-периодическим.

2. Лифтинговое преобразование сигнала

2.1. Пусть $z \in \mathbb{C}_N$, где $N = 2m$. Имея в виду дальнейшее развитие событий, введем обозначения $N_0 = N$, $N_1 = m$, $e_0 = z$. Лифтинговое преобразование сигнала z осуществляется в три этапа.

Split. Расщепим сигнал e_0 на два сигнала

$$\widetilde{e}_1(l) = e_0(2\,l)\,, \quad \widetilde{d}_1(l) = e_0(2\,l+1)\,, \qquad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Обозначим $\widetilde{E}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(e_1)$, $\widetilde{D}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$.

Predict. Предскажем значения $\widetilde{d}_1(l)$ с помощью интерполяционного сплайна $S_1(j)$, определяемого условием

$$S_1(2\,l) = \widetilde{e}_1(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Положим $\sigma_1(l) = S_1(2\,l+1)$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Разность

$$d_1(l) = \widetilde{d}_1(l) - \sigma_1(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1 - 1\,,$$

вообще говоря, мала. Для спектра $D_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$ этой разности согласно (1.7) справедлива формула

$$D_1(k) = \widetilde{D}_1(k) - \omega_{N_0}^{k}\, U_1(k)\, \widetilde{E}_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{2.1}$$

Lifting. Обновим сигнал $\widetilde{e}_1$. Для этого введем сигнал e_1, спектр которого $E_1 = \mathcal{F}_{N_1}(e_1)$ определим так:

$$E_1(k) = \widetilde{E}_1(k) + \beta_1(k)\, \omega_{N_0}^{-k}\, D_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{2.2}$$

Здесь β_1 — произвольный N_0-периодический сигнал, удовлетворяющий условию

$$\beta_1(k + N_1) = -\beta_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Ясно, что правая часть (2.2) является N_1-периодическим сигналом.

2.2. Пара (D_1, E_1) называется *лифтинговым преобразованием сигнала z в спектральной форме*. Спектр E_1 содержит основную информацию о спектре $E_0 = \mathcal{F}_{N_0}(e_0)$ сигнала z, а спектр D_1 — детали.

Выразим D_1, E_1 через E_0. Для этого введём два вспомогательных сигнала

$$\widetilde{g}_1(k) = \omega_{N_0}^{k}\big(1 - U_1(k)\big)\,, \quad \widetilde{h}_1(k) = 1 + \beta_1(k)\big(1 - U_1(k)\big)\,, \qquad k \in 0 : N_0 - 1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *При $k \in 0 : N_1 - 1$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} D_1(k) &= \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{g}_1(k)\, E_0(k) + \widetilde{g}_1(k + N_1)\, E_0(k + N_1)\right], \\ E_1(k) &= \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{h}_1(k)\, E_0(k) + \widetilde{h}_1(k + N_1)\, E_0(k + N_1)\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 1, в частности, следует, что

$$E_0(k) = \widetilde{E}_1(k) + \omega_{N_0}^{-k}\, \widetilde{D}_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Заменив k на $k + N_1$, запишем

$$E_0(k + N_1) = \widetilde{E}_1(k) - \omega_{N_0}^{-k}\, \widetilde{D}_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Сложим и вычтем данные равенства. При $k \in 0 : N_1 - 1$ получим

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1(k) &= \tfrac{1}{2}\big[E_0(k) + E_0(k + N_1)\big], \\ \widetilde{D}_1(k) &= \tfrac{1}{2}\, \omega_{N_0}^{k}\big[E_0(k) - E_0(k + N_1)\big]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Остаётся подставить (2.4) в (2.1) и (2.2):

$$D_1(k) = \tfrac{1}{2}\,\omega_{N_0}^k \Big\{ \big[E_0(k) - E_0(k+N_1)\big] - U_1(k)\big[E_0(k) + E_0(k+N_1)\big] \Big\} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{g}_1(k)\,E_0(k) + \widetilde{g}_1(k+N_1)\,E_0(k+N_1)\big]\,;$$

$$E_1(k) = \tfrac{1}{2}\Big\{ \big[E_0(k) + E_0(k+N_1)\big] + \beta_1(k)\big[\big(1 - U_1(k)\big)E_0(k) -$$
$$- \big(1 + U_1(k)\big)E_0(k+N_1)\big] \Big\} = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{h}_1(k)\,E_0(k) + \widetilde{h}_1(k+N_1)\,E_0(k+N_1)\right].$$

Предложение доказано. □

2.3. Обратная задача восстановления спектра E_0 исходного сигнала z по паре (D_1, E_1) решается легко. Введём ещё два вспомогательных сигнала

$$h_1(k) = 1 + U_1(k)\,, \quad g_1(k) = \omega_{N_0}^{-k}\big(1 - \beta_1(k)\,h_1(k)\big)\,, \qquad k \in 0 : N_0 - 1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Справедлива формула обращения*

$$E_0(k) = h_1(k)\,E_1(k) + g_1(k)\,D_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_0 - 1\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. Согласно (2.2) и (2.1)

$$\widetilde{E}_1(k) = E_1(k) - \beta_1(k)\,\omega_{N_0}^{-k}\,D_1(k)\,,$$
$$\widetilde{D}_1(k) = D_1(k) + \omega_{N_0}^k\,U_1(k)\,\widetilde{E}_1(k) =$$
$$= D_1(k) + \omega_{N_0}^k\,U_1(k)\,E_1(k) - \beta_1(k)\,U_1(k)\,D_1(k) =$$
$$= \big(1 - \beta_1(k)\,U_1(k)\big)D_1(k) + \omega_{N_0}^k\,U_1(k)\,E_1(k)\,.$$

На основании предложения 1 заключаем, что при $k \in 0 : N_0 - 1$

$$E_0(k) = \widetilde{E}_1(k) + \omega_{N_0}^{-k}\,\widetilde{D}_1(k) = E_1(k) - \beta_1(k)\,\omega_{N_0}^{-k}\,D_1(k) +$$
$$+ \omega_{N_0}^{-k}\big(1 - \beta_1(k)\,U_1(k)\big)D_1(k) + U_1(k)\,E_1(k) =$$
$$= h_1(k)\,E_1(k) + g_1(k)\,D_1(k)\,.$$

Предложение доказано. □

С вычислительной точки зрения формулу (2.5) лучше записать так: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{aligned} E_0(k) &= h_1(k)\,E_1(k) + g_1(k)\,D_1(k)\,,\\ E_0(k+N_1) &= h_1(k+N_1)\,E_1(k) + g_1(k+N_1)\,D_1(k)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. Многоуровневое лифтинговое преобразование

3.1. Теперь будем считать, что $N = 2^s$. Обозначим $N_\nu = N/2^\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Это обозначение согласовано с обозначениями N_0, N_1 из предыдущего раздела. Отметим также, что $N_s = 1$.

В разделе 2 было описано лифтинговое преобразование $E_0 \to (D_1, E_1)$. Это преобразование можно продолжить:

$$E_1 \to (D_2, E_2)\,, \quad E_2 \to (D_3, E_3)\,, \quad \ldots\,, \quad E_{s-1} \to (D_s, E_s)\,.$$

Выведем соответствующие формулы. Положим при $k \in 0 : N_{\nu-1} - 1$

$$U_\nu(k) = \frac{\bigl(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r} - \bigl(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r}}{\bigl(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r} + \bigl(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\bigr)^{2r}}\,,$$

$$\widetilde{g}_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{k}\bigl(1 - U_\nu(k)\bigr)\,, \quad \widetilde{h}_\nu(k) = 1 + \beta_\nu(k)(1 - U_\nu(k))\,.$$

Здесь $\beta_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k)\,, \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,.$$

Аналогично предложению 5 доказывается следующее утверждение: *при* $k \in 0 : N_\nu - 1$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} D_\nu(k) &= \tfrac{1}{2}\,[\widetilde{g}_\nu(k)\,E_{\nu-1}(k) + \widetilde{g}_\nu(k + N_\nu)\,E_{\nu-1}(k + N_\nu)]\,,\\ E_\nu(k) &= \tfrac{1}{2}\,[\widetilde{h}_\nu(k)\,E_{\nu-1}(k) + \widetilde{h}_\nu(k + N_\nu)\,E_{\nu-1}(k + N_\nu)]\,. \end{aligned}$$

Набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ называется *полным лифтинговым преобразованием сигнала* z. Отметим, что D_s, E_s — это числа.

3.2. По полному лифтинговому преобразованию $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ легко восстановить спектр E_0 исходного сигнала z. Для этого введём два вспомогательных сигнала

$$h_\nu(k) = 1 + U_\nu(k)\,, \quad g_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k}\bigl(1 - \beta_\nu(k)\,h_\nu(k)\bigr)\,, \qquad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1\,.$$

Согласно (2.6) имеем

$$\begin{gathered} E_{\nu-1}(k) = h_\nu(k)\,E_\nu(k) + g_\nu(k)\,D_\nu(k)\,,\\ E_{\nu-1}(k + N_\nu) = h_\nu(k + N_\nu)\,E_\nu(k) + g_\nu(k + N_\nu)\,D_\nu(k)\,,\\ k \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1\,. \end{gathered} \tag{3.1}$$

При $\nu = 1$ получим $E_0 = \mathcal{F}_N(z)$.

4. Лифтинговые разложения сигнала

4.1. Перепишем (3.1) в виде

$$E_{\nu-1} = h_\nu\, E_\nu + g_\nu\, D_\nu\,, \qquad \nu = s, s-1, \ldots, 1\,. \tag{4.1}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *При любом $t \in 1 : s$ справедлива формула*

$$E_0 = h_1 h_2 \ldots h_t\, E_t + \sum_{\nu=1}^{t} h_1 h_2 \ldots h_{\nu-1}\, g_\nu\, D_\nu. \tag{4.2}$$

Доказательство. При $t = 1$ соотношение (4.2) совпадает с (2.5). Индукционный переход легко осуществить, опираясь на (4.1). □

Введём обозначения $H_\nu = h_1 h_2 \ldots h_\nu$, $G_\nu = h_1 h_2 \ldots h_{\nu-1}\, g_\nu$,

$$\phi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu)\,, \quad \psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu)\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть $N = 2^s$ и $t \in 1 : s$. Для любого сигнала $z \in \mathbb{C}_N$ справедливо разложение*

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\, \phi_t(j - 2^t k) + \sum_{\nu=1}^{t} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j - 2^\nu k)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,, \tag{4.3}$$

где $e_t = \mathcal{F}_{N_t}^{-1}(E_t)$, $d_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$.

Доказательство. Применим к (4.2) обратное преобразование Фурье порядка N. Получим

$$z = \mathcal{F}_N^{-1}\big(H_t E_t\big) + \sum_{\nu=1}^{t} \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu D_\nu)\,. \tag{4.4}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
\big[\mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu D_\nu)\big](j) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_\nu(l) D_\nu(l)\, \omega_N^{lj} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_\nu(l)\, \omega_N^{lj} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \omega_{N_\nu}^{-lk} = \\
\sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k) \Big\{ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_\nu(l)\, \omega_N^{l(j-2^\nu k)} \Big\} &= \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j - 2^\nu k)\,.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично показывается, что

$$\big[\mathcal{F}_N^{-1}(H_t E_t)\big](j) = \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\,\phi_t(j-2^t k)\,. \tag{4.6}$$

Подставив (4.5), (4.6) в (4.4), придём к (4.3). □

Формула (4.3) называется *лифтинговым разложением сигнала* z.

Правая часть (4.3) при каждом $t \in 1:s$ содержит ровно N слагаемых (по размерности пространства $\mathbb{C}_N$). Поскольку разложение (4.3) справедливо для любого сигнала $z \in \mathbb{C}_N$, то система сигналов

$$\Big\{\big\{\phi_t(j-2^t k)\big\}_{k=0}^{N_t-1};\ \big\{\psi_\nu(j-2^\nu k)\big\}_{k=0}^{N_\nu-1},\quad \nu=1,\ldots,t\Big\}$$

необходимо является базисом в $\mathbb{C}_N$.

4.2. При $t = s$ формула (4.3) *называется полным лифтинговым разложением сигнала* z. Первая сумма в правой части такого разложения вырождается до одного слагаемого $e_s(0)\,\phi_s(j)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Имеет место тождество* $\phi_s(j) \equiv 1$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $H_s = N\delta_N$.

Напомним, что

$$h_\nu(k) = 1 + U_\nu(k) = \frac{2\big(\cos\frac{\pi k}{2N_\nu}\big)^{2r}}{\big(\cos\frac{\pi k}{2N_\nu}\big)^{2r} + \big(\sin\frac{\pi k}{2N_\nu}\big)^{2r}}$$

и

$$H_s(k) = \prod_{\nu=1}^{s} h_\nu(k)\,.$$

Ясно, что $H_s(0) = N$. Нужно показать, что $H_s(k) = 0$ при $k \in 1:N-1$.

Возьмём $k \in 1:N-1$ и представим его в виде

$$k = \big(k_{s-1},\ldots,k_{s-p+1},1,0\ldots,0\big)_2 = (2n+1)N_p$$

при некотором $p \in 1:s$. Так как

$$\cos\tfrac{\pi k}{2N_p} = \cos\tfrac{\pi}{2}\big(2n+1\big) = 0\,,$$

то $h_p(k) = 0$. Значит, и $H_s(k) = 0$. Предложение доказано. □

На основании предложений 8 и 9 заключаем, что полное лифтинговое разложение сигнала $z \in \mathbb{C}_N$ имеет вид

$$z(j) = e_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\,\psi_\nu(j-2^\nu k)\,,\quad j \in \mathbb{Z}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жёлудев В. А., Певный А. Б. *Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами* // Журн. выч. мат. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 4. С. 537–548.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. выч. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.