# О СООТНОШЕНИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ*

А. В. Лазарев

lazarev_av@sampo.ru

17 мая 2008 г.

**1**°. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ задачу математического программирования

$$\begin{gathered} f(x) \to \inf\,, \\ g_i(x) \leqslant 0\,, \quad i \in 1:s\,; \\ x \in P\,, \end{gathered} \tag{1}$$

и двойственную к ней задачу

$$\varphi(y) := \inf \bigl\{ L(x,y) \mid x \in P \bigr\} \to \sup_{y \in \mathbb{R}^s_+}\,, \tag{2}$$

где $\mathbb{R}^s_+ = \bigl\{ y = (y_1, \ldots, y_s) \mid y_i \geqslant 0,\ i \in 1:s \bigr\}$ и

$$L(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x)$$

— функция Лагранжа. Множество планов задачи (1) обозначим через $X$. Положим

$$f^* = \inf \bigl\{ f(x) \mid x \in X \bigr\}, \qquad \varphi^* = \sup \bigl\{ \varphi(y) \mid y \in \mathbb{R}^s_+ \bigr\}.$$

Нас интересуют условия, при выполнении которых справедливо соотношение двойственности $f^* = \varphi^*$.

Этот фундаментальный вопрос изучался во многих работах (см., например, книги [1–4] и библиографию в них). В данном докладе критерий, обеспечивающий справедливость соотношения двойственности, сформулирован в терминах $\varepsilon$-субдифференциала функции чувствительности задачи (1).

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

**2**°. Начнём с простого утверждения.

**ЛЕММА 1**. *При любых* $x \in X$ *и любых* $y \in \mathbb{R}^s_+$ *выполняется неравенство*

$$f(x) \geqslant \varphi(y)\,. \tag{3}$$

Доказательство. Возьмём $x \in X$ и $y \in \mathbb{R}^s_+$. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x) \leqslant 0\,,$$

то

$$f(x) \geqslant \inf \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x) \,\middle|\, x \in X \right\} \geqslant \inf \big\{ L(x,y) \mid x \in P \big\} = \varphi(y)\,,$$

что и требовалось установить. □

Как следствие получаем неравенство

$$f^* \geqslant \varphi^*. \tag{4}$$

При $X \neq \varnothing$ оно следует из (3). Если же $X = \varnothing$, то $f^* = +\infty$ (по определению $\inf\{\varnothing\} = +\infty$, $\sup\{\varnothing\} = -\infty$). В этом случае неравенство (4) тривиально.

При $X = \varnothing$ соотношение двойственности $f^* = \varphi^*$ может как выполняться, так и не выполняться.

**ПРИМЕР 1**. Рассмотрим задачу минимизации функции одной переменной $f(x)$, тождественно равной нулю, при ограничениях

$$g(x) := x^2 + 1 \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Имеем $X = \varnothing$, $f^* = +\infty$,

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \inf \big\{ y\,(x^2+1) \mid x \in \mathbb{R} \big\} = y \quad \text{при } y \geqslant 0\,, \\ \varphi^* &= \sup \big\{ \varphi(y) \mid y \geqslant 0 \big\} = +\infty\,. \end{aligned}$$

Получили $f^* = \varphi^*$.

**ПРИМЕР 2**. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} f(x) &:= -x^4 \to \inf\,, \\ g(x) &:= x^2 + 1 \leqslant 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Имеем

$$\varphi(y) = \inf\big\{ -x^4 + y\,(x^2+1) \mid x \in \mathbb{R} \big\} = -\infty \quad \text{при всех } y \geqslant 0\,,$$

так что $\varphi^* = -\infty$. Поскольку $f^* = +\infty$, то $f^* \neq \varphi^*$.

Предположим, что $X \neq \varnothing$. Тогда $\varphi^* < +\infty$. В противном случае из (4) следовало бы, что $f^* = +\infty$. Но это возможно лишь тогда, когда $X = \varnothing$.

При $f^* = -\infty$ неравенство (4) обращается в равенство. Но это неинтересный случай. В дальнейшем считаем, что

$$X \neq \varnothing \quad \text{и} \quad f^* > -\infty\,. \tag{5}$$

**3**°. Рассмотрим «возмущённую» задачу

$$\begin{gathered} f(x) \to \inf\,, \\ g_i(x) \leqslant v_i\,,\ i \in 1:s\,; \\ x \in P\,, \end{gathered}$$

где $v = (v_1, \ldots, v_s)$ — произвольный вектор параметров. Множество планов этой задачи обозначим через $X(v)$.

Функция

$$F(v) = \inf \big\{ f(x) \mid x \in X(v) \big\}$$

называется *функцией чувствительности* задачи (1). Очевидно, что $F(\mathbb{O}) = f^*$ и

$$F(v) \geqslant F(u) \quad \text{при } v \leqslant u\,.$$

В частности, при всех $i \in 1:s$ и $t > 0$

$$f^* \geqslant F(t\,e_i)\,.$$

Допустим, что $F(v) = -\infty$ при некотором $v \in \mathbb{R}^s$. В этом случае существует последовательность точек $x^k \in X(v)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условию $f(x^k) \to -\infty$. Для любого $y \in \mathbb{R}^s_+$ имеем

$$f(x^k) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x^k) \leqslant f(x^k) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, v_i\,.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(y) := \inf \Big\{ f(x) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x) \,\Big|\, x \in P \Big\} = -\infty \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}^s_+\,.$$

Значит, $\varphi^* = -\infty$. Мы предположили, что $f^* > -\infty$, поэтому соотношение двойственности в данном случае выполняться не может. В дальнейшем будем считать, что наряду с (5) выполняется условие

$$F(v) > -\infty \quad \text{при всех } v \in \mathbb{R}^s\,. \tag{6}$$

**ЛЕММА 2**. *При всех $y \in \mathbb{R}^s_+$ справедлива формула*

$$\varphi(y) = \inf\big\{F(v) + \langle y, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\}. \tag{7}$$

Доказательство. Возьмём $y \in \mathbb{R}^s_+$ и произвольный вектор $x \in P$. Обозначим $v_i = g_i(x)$, $i \in 1 : s$; $v = (v_1, \dots, v_s)$. Очевидно, что $x \in X(v)$, поэтому $f(x) \geqslant F(v)$. Далее

$$f(x) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x) \geqslant F(v) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, v_i\,.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(y) \geqslant \inf\big\{F(v) + \langle y, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\}. \tag{8}$$

Допустим, что неравенство (8) выполняется как строгое. По определению инфимума найдётся вектор $w \in \mathbb{R}^s$, такой, что

$$\varphi(y) > F(w) + \langle y, w\rangle.$$

Обозначим через $\varepsilon$ разность между левой и правой частями последнего неравенства. По определению функции чувствительности найдётся точка $x^* \in P$ со свойствами: $g_i(x^*) \leqslant w_i$, $i \in 1 : s$; $f(x^*) \leqslant F(w) + \frac{\varepsilon}{2}$. Принимая во внимание, что $y \in \mathbb{R}^s_+$, получаем

$$F(w) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, w_i \geqslant f(x^*) - \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x^*)\,.$$

В таком случае

$$\varepsilon \leqslant \Big[f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x^*)\Big] - \Big[F(w) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, w_i\Big] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

что невозможно. Лемма доказана. □

**4**°. Множества

$$\partial F(\mathbb{O}) = \big\{y \in \mathbb{R}^s \mid F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle y, v\rangle \text{ при всех } v \in \mathbb{R}^s\big\},$$

$$\partial_\varepsilon F(\mathbb{O}) = \big\{y \in \mathbb{R}^s \mid F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle y, v\rangle - \varepsilon \text{ при всех } v \in \mathbb{R}^s\big\}, \quad \varepsilon > 0\,,$$

называются соответственно *субдифференциалом* и *$\varepsilon$-субдифференциалом* функции чувствительности $F$ в нуле.

Сформулируем основной результат доклада.

**ТЕОРЕМА 1**. *Пусть выполнены условия* (5), (6). *Для того чтобы имело место соотношение двойственности* $f^* = \varphi^*$, *необходимо и достаточно, чтобы множество* $\partial_\varepsilon F(\mathbb{O})$ *было непустым при всех* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f^* = \varphi^*$. Поскольку $f^* = F(\mathbb{O})$, то
$$F(\mathbb{O}) = \varphi^* = \sup\big\{\varphi(y) \mid y \in \mathbb{R}^s_+\big\}.$$
Согласно (7)
$$F(\mathbb{O}) = \sup\Big\{\inf\big\{F(v) + \langle y, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\} \Big| \, y \in \mathbb{R}^s_+\Big\}.$$

Возьмём последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, стремящуюся к нулю. По определению супремума при любом $k$ найдётся вектор $y^k \in \mathbb{R}^s_+$, такой, что
$$F(\mathbb{O}) - \varepsilon_k \leqslant \inf\big\{F(v) + \langle y^k, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\} \leqslant$$
$$\leqslant F(v) + \langle y^k, v\rangle \quad \text{при всех } v \in \mathbb{R}^s.$$
Значит,
$$F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle -y^k, v\rangle - \varepsilon_k \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^s.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $k$ из условия $\varepsilon_k < \varepsilon$. Получим
$$F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle -y^k, v\rangle - \varepsilon \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^s,$$
то есть $-y^k \in \partial_\varepsilon F(\mathbb{O})$. Непустота множества $\partial_\varepsilon F(\mathbb{O})$ установлена.

Достаточность. Пусть $\partial_\varepsilon F(\mathbb{O}) \neq \varnothing$ при всех $\varepsilon > 0$. Возьмём последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, стремящуюся к нулю. При каждом $k$ найдётся вектор $y^k \in \mathbb{R}^s$, такой, что
$$F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle y^k, v\rangle - \varepsilon_k \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^s. \tag{9}$$
В частности, при всех $i \in 1 : s$ и $t > 0$
$$f^* \geqslant F(t\, e_i) \geqslant F(\mathbb{O}) + t\, y^k_i - \varepsilon_k\,.$$
Отсюда следует, что $y^k \leqslant \mathbb{O}$ или $-y^k \in \mathbb{R}^s_+$. На основании (9) получаем
$$\inf\big\{F(v) + \langle -y^k, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\} \geqslant F(\mathbb{O}) - \varepsilon_k\,,$$
так что
$$\varphi^* \geqslant \varphi(-y^k) \geqslant F(\mathbb{O}) - \varepsilon_k = f^* - \varepsilon_k\,.$$
В пределе при $k \to +\infty$ приходим к неравенству $\varphi^* \geqslant f^*$, которое вместе с (4) гарантирует справедливость равенства $\varphi^* = f^*$.

Теорема доказана. $\square$

**5**$^\circ$. Вернёмся к двойственной задаче (2), в которой максимизируется вогнутая функция $\varphi(y)$ на множестве $\mathbb{R}^s_+$.

**ТЕОРЕМА 2**. *Предположим, что $f^* = \varphi^*$. Тогда множество решений задачи (2) совпадает с $-\partial F(\mathbb{O})$.*

Доказательство. Возьмём вектор $y^* \in -\partial F(\mathbb{O})$. По определению субдифференциала

$$F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle -y^*, v\rangle \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^s.$$

Так же, как в теореме 1, проверяется, что $y^* \in \mathbb{R}^s_+$. Имеем

$$f^* = F(\mathbb{O}) \leqslant F(v) + \langle y^*, v\rangle \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^s,$$

так что согласно лемме 2

$$f^* \leqslant \inf\big\{F(v) + \langle y^*, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\} = \varphi(y^*) \leqslant \varphi^*.$$

Поскольку $f^* = \varphi^*$, то $y^*$ — решение двойственной задачи.

Наоборот, пусть $y^*$ — решение двойственной задачи. Тогда

$$f^* = \varphi^* = \inf\big\{F(v) + \langle y^*, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\}.$$

Значит, при всех $v \in \mathbb{R}^s$ справедливо неравенство

$$f^* = F(\mathbb{O}) \leqslant F(v) + \langle y^*, v\rangle.$$

Отсюда следует, что $-y^* \in \partial F(\mathbb{O})$. Теорема доказана. □

**6**$^\circ$. Наиболее интересен случай, когда $f^* = \varphi^*$ и двойственная задача (2) имеет решение $y^*$.

Обозначим

$$X^* = \big\{x \in X \mid f(x) = f^*\big\}, \quad X^*(y^*) = \big\{x \in P \mid L(x, y^*) = \varphi^*\big\}.$$

**ТЕОРЕМА 3**. *Справедливо включение $X^* \subset X^*(y^*)$. При этом для любого $x^* \in X^*$ выполняется условие дополнительности*

$$y_i^*\, g_i(x^*) = 0, \qquad i \in 1 : s\,. \tag{10}$$

Доказательство. Возьмём $x^* \in X^*$. Учитывая, что $x^* \in P$, $g_i(x^*) \leqslant 0$ при $i \in 1 : s$ и $y^* \in \mathbb{R}^s_+$, получаем

$$\begin{aligned} L(x^*, y^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} y_i^*\, g_i(x^*) \leqslant f(x^*) = f^* = \\ = \varphi^* = \varphi(y^*) = \inf\big\{L(x, y^*) \mid x \in P\big\} \leqslant L(x^*, y^*)\,. \end{aligned}$$

Значит,
$$L(x^*, y^*) = \varphi^* \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s} y_i^*\, g_i(x^*) = 0\,.$$
Первое равенство свидетельствует о том, что $x^* \in X^*(y^*)$, а из второго в силу неположительности слагаемых следует условие дополнительности (10). Теорема доказана. □

Отметим, что в общем случае равенство $X^* = X^*(y^*)$ гарантировать нельзя.

**ПРИМЕР 3** ([1, с. 159]). Рассмотрим экстремальную задачу
$$\begin{aligned}
&f(x) := \max\left\{0, x_1 + \tfrac{1}{x_2}\right\} \to \inf\,,\\
&g(x) := -x_1 \leqslant 0\,, \quad x \in P := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 1\}.
\end{aligned}$$
В данном случае $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 1\}$. Функция $f(x)$ положительна на $X$ и $f(x^k) \to 0$ на последовательности $x^k = (0, k)$, $k = 1, 2, \ldots$, точек из $X$. Значит, $f^* := \inf\left\{f(x) \mid x \in X\right\} = 0$, но инфимум не достигается, то есть $X^* = \varnothing$.

Обратимся к двойственной задаче. Имеем
$$L(x, y) = \max\left\{0, x_1 + \tfrac{1}{x_2}\right\} - y\, x_1\,, \quad x \in P,\ y \in \mathbb{R}_+\,,$$
и
$$\varphi(0) = \inf\left\{\max\left\{0, x_1 + \tfrac{1}{x_2}\right\} \,\middle|\, x \in P\right\} = 0\,.$$
Инфимум достигается на точках $x \in P$, у которых $x_1 + \frac{1}{x_2} \leqslant 0$.

Далее
$$\varphi^* = \sup\left\{\varphi(y) \mid y \in \mathbb{R}_+\right\} \geqslant \varphi(0) = 0 = f^*.$$
Учитывая (4), получаем $\varphi^* = f^*$ и $\varphi(0) = \varphi^*$. Таким образом, точка $y^* = 0$ является решением двойственной задачи. Множество $X^*(y^*)$ состоит из точек $x = (x_1, x_2)$, у которых $x_2 \geqslant 1$ и $x_1 + \frac{1}{x_2} \leqslant 0$.

Видим, что $X^* \neq X^*(y^*)$.

Вместе с тем, легко доказать такое утверждение:

*Пусть $f^* = \varphi^*$ и $y^*$ — решение двойственной задачи. Если $x^* \in X$, $x^* \in X^*(y^*)$ и выполнено условие дополнительности* (10), *то $x^* \in X^*$.*

Действительно,
$$f^* = \varphi^* = \varphi(y^*) = L(x^*, y^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} y_i^*\, g_i(x^*) = f(x^*)\,,$$
так что $x^* \in X^*$.

**7**°. Отметим ещё одно свойство двойственной задачи.

**ТЕОРЕМА 4**. *Пусть* $f^* = \varphi^*$ *и двойственная задача* (2) *не имеет решения. Тогда любая максимизирующая последовательность* $\{y^k\}$ *точек из* $\mathbb{R}^s_+$, *такая, что* $\varphi(y^k) \to \varphi^*$ *при* $k \to +\infty$, *является неограниченной.*

Доказательство. Допустим противное, что существует ограниченная максимизирующая последовательность $\{y^k\}$ точек из $\mathbb{R}^s_+$. Для определённости будем считать, что $y^k \to y^*$ при $k \to +\infty$, $y^* \in \mathbb{R}^s_+$. Обозначим

$$\varepsilon_k = \varphi^* - \varphi(y^k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

По условию последовательность $\{\varepsilon_k\}$ стремится к нулю.

Имеем

$$\varphi(y^k) = \varphi^* - \varepsilon_k = f^* - \varepsilon_k = F(\mathbb{O}) - \varepsilon_k\,.$$

Согласно (7)

$$\inf\left\{F(v) + \langle y^k, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\right\} \geqslant F(\mathbb{O}) - \varepsilon_k\,,$$

так что

$$F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle -y^k, v\rangle - \varepsilon_k \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^s.$$

В пределе получаем

$$F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle -y^*, v\rangle \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^s.$$

Это значит, что $-y^* \in \partial F(\mathbb{O})$. По теореме 2 вектор $y^*$ является решением двойственной задачи. Но по условию двойственная задача не имеет решения. Получили противоречие. Теорема доказана. □

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Фёдоров В. В. *Курс методов оптимизации.* М.: Наука, 1986.

2. Эльстер К.-Х., Рейнгардт Р., Шойбле М., Донат Г. *Введение в нелинейное программирование.* М.: Мир, 1985.

3. Лоран П.-Ж. *Аппроксимация и оптимизация.* М.: Мир, 1975.

4. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.