РАВНОУГОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ И ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

18 сентября 2007 г.

1°. Пусть $\mathbb{H}^n$ — это либо вещественное пространство $\mathbb{R}^n$, либо комплексное пространство $\mathbb{C}^n$.

Система векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ из $\mathbb{H}^n$ называется *равноугольной*, если

$$\|\varphi_k\| = 1 \quad \text{при всех } k \in 1:m \quad \text{и} \quad \big|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\big| = c \quad \text{при } k \neq s.$$

Нас интересует случай $m \geqslant n$. При $m = n$ любой ортонормированный базис в $\mathbb{H}^n$ образует равноугольную систему, у которой $c = 0$.

Равноугольные системы векторов изучались в работах [1–3]. В силу нормированности векторов, входящих в равноугольную систему, для константы c выполняется неравенство $c \leqslant 1$. При $c < 1$ количество элементов m равноугольной системы не превосходит числа $n\,(n+1)/2$ в вещественном случае ($\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n$) и числа n^2 в комплексном случае ($\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n$). По поводу этих результатов авторы [1] ссылаются на [4]. Авторы [3] рассматривают только вещественный случай и указывают в качестве первоисточника [5]. В докладе приводятся доказательства данных результатов, использующие лишь элементарные сведения из линейной алгебры.

Кроме того, установлен критерий, при выполнении которого равноугольная система будет жёстким фреймом.

2°. Начнём с более простого, с упомянутого критерия.

ТЕОРЕМА 1. *Равноугольная система является жёстким фреймом тогда и только тогда, когда*

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}\,. \tag{1}$$

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доказательство. Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — равноугольная система. Вычислим её фреймовый потенциал:

$$P(\Phi) := \sum_{k,s=1}^{m} \left|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\right|^2 = m + m\,(m-1)\,c^2. \tag{2}$$

Напомним [6], что жёсткий фрейм, состоящий из единичных векторов, характеризуется равенством

$$P(\Phi) = \frac{m^2}{n}\,. \tag{3}$$

Таким образом, если равноугольная система Φ является жёстким фреймом, то соотношения (2) и (3) выполняются одновременно. Отсюда очевидным образом следует (1).

Наоборот, если у равноугольной системы Φ величина c определяется формулой (1), то согласно (2) для фреймового потенциала $P(\Phi)$ справедливо равенство (3), характеризующее систему Φ как жёсткий фрейм. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. *При $m = n$ равноугольная система $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ будет жёстким фреймом тогда и только тогда, когда $c = 0$, т. е. когда Φ — ортонормированный базис в $\mathbb{H}^n$.*

3°. При $m = n+1$ примером равноугольной системы, являющейся жёстким фреймом, служит система Мерседес-Бенц $\{b_1^n, \dots, b_{n+1}^n\}$, у которой

$$\langle b_k^n,\, b_s^n \rangle = -\frac{1}{n} \quad \text{при } k \neq s$$

(см. [7]). Отметим, что если из системы Мерседес-Бенц удалить один элемент, то оставшаяся система, не теряя свойства равноугольности и величины c, уже не будет жёстким фреймом.

4°. Приведём нетривиальный пример равноугольного жёсткого фрейма в $\mathbb{R}^3$, состоящего из шести векторов ($n = 3$, $m = 6$). Обозначим

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha, 1, 0)\,, & g_4 &= (\alpha, -1, 0)\,,\\ g_2 &= (0, \alpha, 1)\,, & g_5 &= (0, \alpha, -1)\,,\\ g_3 &= (1, 0, \alpha)\,, & g_6 &= (-1, 0, \alpha)\,, \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, который мы выберем из следующих соображений. Скалярные произведения $\langle g_k, g_s \rangle$ при $k \neq s$ равны либо $\pm\alpha$, либо $\alpha^2 - 1$. Приравняв α к $\alpha^2 - 1$, получим единственный положительный корень $\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. При $\alpha = \alpha_0$ и $k \neq s$

$$\left|\langle g_k, g_s \rangle\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Введём нормированные векторы

$$\varphi_k = \frac{g_k}{\sqrt{1+\alpha_0^2}} = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\, g_k\,.$$

Для них

$$\bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s\rangle\bigr| = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{при } k \neq s.$$

Вместе с тем, при $n = 3$, $m = 6$

$$\sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

На основании теоремы 1 заключаем, что при $\alpha = \alpha_0$ векторы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ образуют равноугольный жёсткий фрейм.

5°. Приведём пример равноугольного жёсткого фрейма в $\mathbb{C}^n$ [8]. При его построении используется тот факт, что при некоторых n и $m = n^2 - n + 1$ существует n целых неотрицательных чисел

$$0 \leqslant d_1 < d_2 < \dots < d_n \leqslant m - 1,$$

таких, что

$$\bigl\{\langle d_k - d_s\rangle_m \mid k \neq s\bigr\} = \{1, 2, \dots, m-1\}. \tag{4}$$

Здесь $\langle d_k - d_s\rangle_m$ — остаток от деления числа $d_k - d_s$ на m.

Например, при $n = 3$, $m = 7$ можно взять $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 6$. В этом случае

$$\begin{aligned} &\langle d_2 - d_1\rangle_7 = 1, \qquad &&\langle d_1 - d_2\rangle_7 = 6,\\ &\langle d_3 - d_1\rangle_7 = 5, \qquad &&\langle d_1 - d_3\rangle_7 = 2,\\ &\langle d_3 - d_2\rangle_7 = 4, \qquad &&\langle d_2 - d_3\rangle_7 = 3. \end{aligned}$$

Такие последовательности $\{d_k\}_{k=1}^n$ гарантированно можно построить при $n = p^l + 1$, где p — простое и l — натуральное числа [9].

Допустим, что n, $m = n^2 - n + 1$ и $\{d_k\}_{k=1}^n$ уже выбраны. Введём m векторов из $\mathbb{C}^n$:

$$\varphi_k(j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega_m^{kd_j}, \qquad j \in 1:n, \quad k \in 1:m,$$

где $\omega_m = \exp(2\pi i/m)$. Очевидно, что $\|\varphi_k\| = 1$ при всех $k \in 1:m$. При $k \neq s$ согласно (4) имеем

$$\bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s\rangle\bigr|^2 = \langle \varphi_k, \varphi_s\rangle\langle \varphi_s, \varphi_k\rangle = \Bigl(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \omega_m^{(k-s)d_j}\Bigr)\Bigl(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \omega_m^{-(k-s)d_j}\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{j,l=1}^{n} \omega_m^{(k-s)(d_j-d_l)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{j \neq l} \omega_m^{(k-s)\langle d_j-d_l \rangle_m} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \biggl(\sum_{r=0}^{m-1} \omega_m^{(k-s)r} - 1 \biggr).$$

Как известно [10], сумма по r равна $m\,\delta_m(k-s)$, а поскольку $k \neq s$ и $|k-s| \leqslant$ $\leqslant m-1$, то $m\,\delta_m(k-s) = 0$. Значит,

$$\bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr|^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}\,,$$

так что

$$\bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr| = \frac{\sqrt{n-1}}{n} \quad \text{при } k \neq s. \tag{5}$$

Принимая во внимание, что в данном случае

$$\sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}} = \frac{n-1}{\sqrt{n(n^2-n)}} = \frac{\sqrt{n-1}}{n}\,,$$

на основании (5) и теоремы 1 заключаем, что $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм.

6°. Напомним, что векторы в равноугольной системе $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — единичные, поэтому в равенстве $|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle| = c$ константа c не превосходит единицы. Она равна единице только тогда, когда $\varphi_k = \xi_k\, \varphi_1$ при $k \in 2:m$, где комплексные коэффициенты ξ_k по модулю равны единице. В этом случае количество элементов m в равноугольной системе может быть произвольным. Принципиальный факт заключается в том, что при $c < 1$ число m ограничено сверху.

Сначала рассмотрим вещественный случай, $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, $m \geqslant n$, *— равноугольная система в* $\mathbb{R}^n$ *и* $c \in [0, 1)$. *Тогда*

$$m \leqslant \frac{n\,(n+1)}{2}\,. \tag{6}$$

Доказательство. Введём симметричные матрицы $P_k = \varphi_k\, \varphi_k^T$, $k \in 1:m$, с элементами

$$P_k[i,j] = \varphi_k(i)\, \varphi_k(j), \qquad i,j \in 1:n.$$

Покажем, что если при некоторых вещественных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ будет

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, P_k = 0, \tag{7}$$

то необходимо все λ_k равны нулю.

Рассмотрим скалярное произведение матриц

$$\langle P_k, P_s\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} P_k[i,j]\, P_s[i,j].$$

В силу определения P_k

$$\langle P_k, P_s\rangle = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} \varphi_k(i)\varphi_s(i)\Bigr)\Bigl(\sum_{j=1}^{n} \varphi_k(j)\varphi_s(j)\Bigr) = \bigl[\langle \varphi_k, \varphi_s\rangle\bigr]^2.$$

Умножим обе части равенства (7) скалярно на P_s. Получим

$$\sum_{k=1}^{m} \bigl[\langle \varphi_k, \varphi_s\rangle\bigr]^2 \lambda_k = 0, \qquad s \in 1:m. \tag{8}$$

Нужно показать, что система (8) имеет только нулевое решение.

Матрица G системы (8) в силу условий $\|\varphi_k\| = 1$ при $k \in 1:m$ и $|\langle \varphi_s, \varphi_k\rangle| = c$ при $s \neq k$ имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & c^2 & c^2 & \dots & c^2 \\ c^2 & 1 & c^2 & \dots & c^2 \\ c^2 & c^2 & 1 & \dots & c^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^2 & c^2 & c^2 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

При $c \in [0,1)$ она невырождена. Более того, она положительно определена. Действительно,

$$\langle G\lambda, \lambda\rangle = \|\lambda\|^2 + c^2 \sum_{s\neq k} \lambda_s\, \lambda_k = (1-c^2)\|\lambda\|^2 + c^2 \sum_{s,k=1}^{m} \lambda_s\, \lambda_k =$$

$$= (1-c^2)\|\lambda\|^2 + c^2 \Bigl\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Bigr\|^2 \geqslant (1-c^2)\|\lambda\|^2.$$

Значит, система (8) имеет только нулевое решение.

Установлено, что соотношение (7) выполняется только тогда, когда все коэффициенты λ_k равны нулю.

Теперь введём векторы A_k, $k \in 1:m$, с компонентами $P_k[i,j]$, $i \leqslant j$. Их размерность равна $n\,(n+1)/2$. Покажем, что они линейно независимы.

Запишем соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, A_k \,=\, \mathbb{O}. \tag{9}$$

В силу симметричности матриц P_k из (9) следует (7), а тогда по доказанному все коэффициенты λ_k необходимо равны нулю. Это гарантирует линейную независимость векторов $A_1, \dots, A_m$. Неравенство (6) основано на том, что количество линейно независимых векторов не превосходит их размерности.

Теорема доказана. $\square$

Отметим, что в примере из п. 3° построен равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^3$ с максимально возможным количеством элементов ($n = 3$, $m = 6$).

7°. Обратимся к комплексному случаю, $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $m \geqslant n$, *— равноугольная система в* $\mathbb{C}^n$ *и* $c \in [0, 1)$. *Тогда*

$$m \leqslant n^2. \tag{10}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и предыдущее. Введём матрицы $P_k = \varphi_k \, \varphi_k^*$, $k \in 1 : m$, с элементами

$$P_k[i, j] = \varphi_k(i) \, \overline{\varphi_k(j)}, \qquad i, \; j \in 1 : n.$$

Ясно, что P_k — эрмитовы матрицы. В частности, их диагональные элементы вещественны. Покажем, что если при некоторых вещественных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ будет

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, P_k \; = \; 0, \tag{11}$$

то необходимо все λ_k равны нулю.

Рассмотрим скалярное произведение комплексных матриц

$$\langle P_k, P_s \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} P_k[i, j] \, \overline{P_s[i, j]}.$$

В силу определения P_k

$$\langle P_k, P_s \rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_k(i) \, \overline{\varphi_s(i)} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi_k(j)} \, \varphi_s(j) \right) = \big| \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle \big|^2.$$

Умножим обе части равенства (11) скалярно на P_s. Получим

$$\sum_{k=1}^{m} \big| \langle \varphi_s, \varphi_k \rangle \big|^2 \lambda_k = 0, \qquad s \in 1 : m.$$

Эта система уравнений не отличается от (8) и так же, как (8), имеет только нулевое решение. Значит, соотношение (11) выполняется только тогда, когда все коэффициенты λ_k равны нулю.

Теперь введём вещественные векторы A_k, $k \in 1:n$, с компонентами

$$P_k[i,i] \quad \text{при } i \in 1:n; \quad \operatorname{Re} P_k[i,j], \quad \operatorname{Im} P_k[i,j] \quad \text{при } i < j.$$

Их размерность равна $n + n(n-1) = n^2$. Покажем, что они линейно независимы. Запишем соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, A_k \; = \; \mathbb{O}. \tag{12}$$

В силу эрмитовости матриц P_k из (12) следует (11), а тогда по доказанному все коэффициенты λ_k равны нулю. Это гарантирует линейную независимость векторов $A_1, \ldots, A_m$. Неравенство (10) основано на том, что в евклидовом пространстве количество линейно независимых векторов не превосходит их размерности. Теорема доказана. $\square$

Идея доказательства теорем 2 и 3 взята из работы [3]. При этом авторы [3] ссылаются на [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Strohmer T., Heath R. W. *Grassmannian frames with applications to coding and communication* // Appl. Comput. Harmonic Anal. 2003. V. 14. No. 3. P. 257–275.

2. Waldron S., Hay N. *On computing all harmonic frames of n vectors in* $\mathbb{C}^d$ // Appl. Comput. Harmonic Anal. 2006. V. 21. P. 168–181.

3. Benedetto J. J., Kolesar J. D. *Geometric properties of Grassmannian frames for* $\mathbb{R}^2$ *and* $\mathbb{R}^3$ // EURASIP J. Applied Signal Proc. 2006. Article ID 49850. P. 1–17.

4. Delsarte P., Goetals J. M., Seidel J. J. *Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials* // Philips Res. Repts. 1975. V. 30. No. 3. P. 91–105.

5. Lemmens P. W. H., Seidel J. J. *Equiangular lines* // J. of Algebra. 1973. V. 24. No. 3. P. 494–512.

6. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Четвёртое определение жёсткого фрейма* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные докдады. 30 мая 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530`)

7. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`)

8. König H. *Cubatures formulas on spheres* // Math. Res. 1999. V. 107. P. 201–211.

9. Halberstam H., Roth K. *Sequences*. Springer, 1982.

10. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть первая. СПб: НИИМ СПбГУ, 2003.