ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ДИСКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

14 марта 2009 г.

1°. Напомним определение обобщённой поверхности Кунса, данное в [1].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \ldots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \ldots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : m. \tag{1}$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \ldots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \ldots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n. \tag{2}$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Пусть s — натуральное число. Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v :

$$\mathbf{T}_u = \left\{ \mathbf{g} \colon D_u \to \mathbb{R}^s \,\middle|\, \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^s(u)\big),\ g^k \in T_u \right\},$$
$$\mathbf{T}_v = \left\{ \mathbf{f} \colon D_v \to \mathbb{R}^s \,\middle|\, \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \ldots, f^s(v)\big),\ f^k \in T_v \right\}.$$

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \ldots, L_i^u(g^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^s(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ i \in 1 : m;$$
$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \ldots, L_j^v(f^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \ldots, f^s(u)\big) \in \mathbf{T}_v,\ j \in 1 : n.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{3}$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{c} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s$:

$$\mathbf{c}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{4}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{c}(u,v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса.* В [1] доказано, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}_i^u(\mathbf{c}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), \qquad && i \in 1:m, \qquad && v \in D_v,\\ &\mathbf{L}_j^v(\mathbf{c}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), \qquad && j \in 1:n, \qquad && u \in D_u. \end{aligned} \tag{5}$$

2°. Рассмотрим частный случай обобщённых поверхностей Кунса, в котором в качестве смешивающих функций будут использоваться дискретные периодические сплайны.

Пусть $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$, где m_1, n_1 и m_2, n_2 — натуральные числа, отличные от единицы. Положим $D_u = D_v = \mathbb{Z}$. Определим пространство T_u как множество всех N_1-периодических, а T_v — как множество всех N_2-периодических вещественных функций над $\mathbb{Z}$. Зададим функционалы L_i^u и L_j^v формулами

$$\begin{aligned} L_i^u(g) &= g(in_1), \qquad && i \in 0:m_1-1,\\ L_j^v(f) &= f(jn_2), \qquad && j \in 0:m_2-1. \end{aligned}$$

Пусть r_1, r_2 — натуральные числа. Возьмём в качестве H_0^u интерполяционный сплайн порядка r_1, удовлетворяющий условиям

$$H_0^u(kn_1) = \delta_{m_1}(k), \qquad k \in 0:m_1-1,$$

а в качестве H_0^v — интерполяционный сплайн порядка r_2, удовлетворяющий условиям

$$H_0^v(kn_2) = \delta_{m_2}(k), \qquad k \in 0:m_2-1.$$

Остальные смешивающие функции определим формулами

$$\begin{aligned} H_i^u(u) &= H_0^u(u - in_1), \qquad && i \in 1:m_1-1, \qquad && u \in \mathbb{Z},\\ H_j^v(v) &= H_0^v(v - jn_2), \qquad && j \in 1:m_2-1, \qquad && v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Все функции H_i^u являются дискретными периодическими сплайнами порядка r_1, а все функции H_j^v — дискретными периодическими сплайнами порядка r_2.

Проверим, что выполняются соотношения (1):

$$L_i^u(H_j^u) = H_j^u(in_1) = H_0^u(in_1 - jn_1) = \delta_{m_1}(i-j) = \delta_{ij} \quad \text{при} \quad i,j \in 0 : m_1 - 1.$$

Аналогично проверяются соотношения (2).

Пусть заданы наборы вектор-функций

$$\mathbf{f}_0, \ldots, \mathbf{f}_{m_1-1},\ \mathbf{g}_0, \ldots, \mathbf{g}_{m_2-2} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^s,$$

где вектор-функции $\mathbf{f}_i$ — N_2-периодические, $\mathbf{g}_j$ — N_1-периодические. Условия согласования (3) сведутся к равенствам

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{6}$$

Формула (4) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u,v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(in_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Построенная по ней вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ будет удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \qquad u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \qquad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ясно, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ периодична с периодом N_1 по первому аргументу и с периодом N_2 — по второму.

3°. Обратимся к геометрической интерпретации вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$ при $s = 3$. Опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{g}_j$ задают два набора замкнутых ломаных в пространстве $\mathbb{R}^3$. Условия согласования (6) означают, что каждая из ломаных первого набора пересекается с каждой ломаной второго набора, образуя сетку. Пример сетки опорных кривых приведён на рис. 1. В этом примере $m_1 = 4$, $m_2 = 2$. Вектор-функции $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ задают замкнутые ломаные, полученные из одной ломаной последовательными поворотами на угол 90° вокруг вертикальной оси. Вектор-функции $\mathbf{g}_0$ и $\mathbf{g}_1$ задают замкнутые ломаные, лежащие в горизонтальной плоскости. Точки пересесений ломаных отмечены кружками. Значения n_1 и n_2 равны 20, поэтому ломаные $\mathbf{f}_i$ состоят из 40 отрезков, а ломаные $\mathbf{g}_j$ — из 80 отрезков.

Вектор-фунция $\mathbf{c}(u,v)$ задаёт набор точек в $\mathbb{R}^3$. Соединяя наборы из четырёх соседних точек

$$\mathbf{c}(u,v),\ \mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1) \text{ и } \mathbf{c}(u+1,v+1)$$

билинейной поверхностью для всех пар u и v, получим замкнутую кусочно-билинейную поверхность. Согласно условиям (8) полученная поверхность будет проходить через все опорные ломаные. На рис. 2 показана дискретная поверхность Кунса, построенная по опорным кривым, изображённым на рис. 1 для параметров $r_1 = r_2 = 3$.

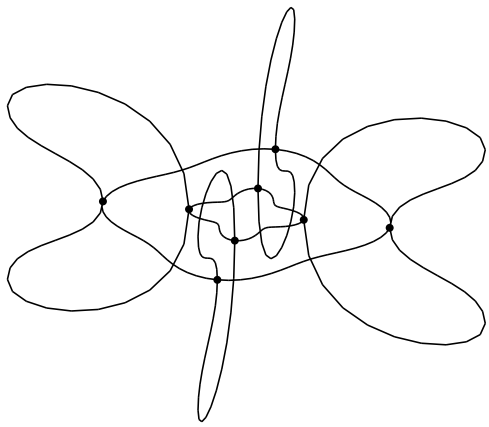

Рис. 1. Опорные кривые

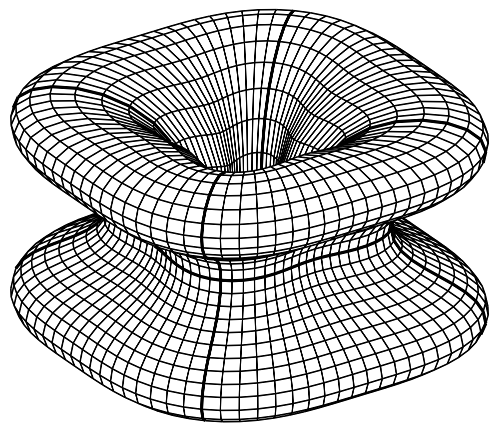

Рис. 2. Дискретная поверхность Кунса

4°. Установим экстремальное свойство дискретной поверхности Кунса.

Пусть $\mathbf{T}_{uv}$ — пространство всех вектор-функций от двух целочисленных аргументов, имеющих период N_1 по первому аргументу и N_2 — по второму. Положим

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^i\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^j\,\mathbf{a}(u+i,v+j). \tag{9}$$

Отображение Δ^{r_1,r_2} является линейным оператором над $\mathbf{T}_{uv}$. Последовательно подставляя в (9) ноль вместо r_1 и r_2, получаем

$$\Delta^{r_1,0}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^i\,\mathbf{a}(u+i,v),$$

$$\Delta^{0,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^j\,\mathbf{a}(u,v+j).$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) = \Delta^{r_1,0}\,\Delta^{0,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) = \Delta^{0,r_2}\,\Delta^{r_1,0}\,\mathbf{a}(u,v). \tag{10}$$

Если вектор-функция $\mathbf{a}(u,v)$ представима в виде $\mathbf{a}(u,v) = \mathbf{x}(u)\,\mathbf{y}(v)$, то

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) = \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{x}(u+i)\,\mathbf{y}(v+j) =$$
$$= \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\mathbf{x}(u+i)\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{y}(v+j).$$

Таким образом, выполняется равенство

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) = \Delta^{r_1}\,\mathbf{x}(u)\,\Delta^{r_2}\,\mathbf{y}(v). \tag{11}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} F(\mathbf{a}) := \sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\big\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\big\|^2 \to \inf, \\ \mathbf{a}(\cdot, jn_2) = \mathbf{g}_j, \qquad j \in 0 : m_2-1, \\ \mathbf{a}(in_1, \cdot) = \mathbf{f}_i, \qquad i \in 0 : m_1-1, \\ \mathbf{a} \in \mathbf{T}_{uv}. \end{gathered} \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 1. *Вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$*, построенная по формуле* (7)*, является единственным решением экстремальной задачи* (12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{a}(u,v)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (12), а $\mathbf{c}(u,v)$ — вектор-функция, построенная по формуле (7). Положим $\boldsymbol{\eta}(u,v) = \mathbf{a}(u,v) - \mathbf{c}(u,v)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(in_1,\cdot) &= 0, \qquad i \in 0 : m_1-1, \\ \boldsymbol{\eta}(\cdot, jn_2) &= 0, \qquad j \in 0 : m_2-1. \end{aligned} \tag{13}$$

Через $c^d(u,v)$, $\eta^d(u,v)$, $f_i^d(v)$, $g_j^d(u)$ будем обозначать координаты с индексом d векторов $\mathbf{c}(u,v)$, $\boldsymbol{\eta}(u,v)$, $\mathbf{f}_i(v)$ и $\mathbf{g}_j(u)$ соответственно. В силу линейности оператора Δ^{r_1,r_2} имеем

$$F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c}+\eta) = \sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\big\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{c}(u,v) + \Delta^{r_1,r_2}\,\boldsymbol{\eta}(u,v)\big\|^2 =$$

$$= F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta}) + 2 \sum_{u=0}^{N_1-1} \sum_{v=0}^{N_2-1} \Big\langle \Delta^{r_1,r_2}\, \mathbf{c}(u,v), \Delta^{r_1,r_2}\, \boldsymbol{\eta}(u,v) \Big\rangle =$$

$$= F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta}) + 2 \sum_{d=1}^{3} l^d(c^d),$$

где

$$l^d(c^d) = \sum_{u=0}^{N_1-1} \sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_1,r_2}\, c^d(u,v)\, \Delta^{r_1,r_2}\, \eta^d(u,v).$$

Формулу (7) для координаты с индексом d можно переписать в виде

$$c^d(u,v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_i^u(u)\, f_i^d(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u), \tag{14}$$

где $\widehat{g}_j^d(u) = g_j^d(u) - \sum_{i=0}^{m_1-1} H_i^u(u)\, g_j^d(in_1)$.

Применяя формулу (11), получаем

$$l^d\big(H_i^u(u)\, f_i^d(v)\big) = \sum_{u=0}^{N_1-1} \sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_1} H_i^u(u)\, \Delta^{r_2} f_i^d(v)\, \Delta^{r_1,r_2}\, \eta^d(u,v) =$$

$$= \sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} f_i^d(v) \sum_{u=0}^{N_1-1} \Delta^{r_1} H_i^u(u)\, \Delta^{r_1,0}\, \Delta^{0,r_2}\, \eta^d(u,v).$$

Зафиксируем произвольное v. Из (13) следует, что $\Delta^{0,r_2}\, \eta^d(in_1, v) = 0$ для всех $i \in 0 : m_1 - 1$. Принимая во внимание, что H_i^u является дискретным периодическим сплайном порядка r_1, по теореме 3.2 из [2, с. 20] получаем

$$\sum_{u=0}^{N_1-1} \Delta^{r_1} H_i^u(u)\, \Delta^{r_1,0}\, \Delta^{0,r_2}\, \eta^d(u,v) = 0.$$

Следовательно, $l^d\big(H_i^u(u)\, f_i^d(v)\big) = 0$.

Аналогично, применяя формулу (11) и используя равенство (10), получаем

$$l^d\big(H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u)\big) = \sum_{u=0}^{N_1-1} \sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} H_j^v(v)\, \Delta^{r_2}\, \widehat{g}_j^d(u)\, \Delta^{r_1,r_2}\, \eta^d(u,v) =$$

$$= \sum_{u=0}^{N_1-1} \Delta^{r_1}\, \widehat{g}_j^d(u) \sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} H_j^v(v)\, \Delta^{0,r_2}\, \Delta^{r_1,0}\, \eta^d(u,v).$$

Зафиксируем произвольное u. Из (13) следует, что $\Delta^{r_1,0}\,\eta^d(u, jn_2) = 0$ для всех $j \in 0 : m_2 - 1$. Принимая во внимание, что H_j^v является дискретным периодическим сплайном порядка r_2, получаем

$$\sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} H_j^v(v)\, \Delta^{0,r_2}\, \Delta^{r_1,0}\, \eta^d(u,v) = 0.$$

Следовательно, $l^d\big(H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^{\,d}(u)\big) = 0$.

Итак, отображение l^d обращается в ноль на всех слагаемых выражения (14). А так как l^d линейно, то $l^d(c^d)$ также равно нулю. Значит, $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta})$. Отсюда следует неравенство $F(\mathbf{a}) \geqslant F(\mathbf{c})$, что гарантирует оптимальность плана $\mathbf{c}(u, v)$ в задаче (12).

Проверим единственность решения. Допустим, что $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c})$. Тогда $F(\boldsymbol{\eta}) = 0$, что влечёт $\Delta^{r_1,r_2}\,\boldsymbol{\eta}(u, v) \equiv 0$. Зафиксируем произвольное u и положим $\boldsymbol{\mu}(v) = \Delta^{r_1,0}\,\boldsymbol{\eta}(u, v)$. Имеем $\Delta^{r_2}\,\boldsymbol{\mu}(v) \equiv 0$ и, согласно (13), $\boldsymbol{\mu}(0) = 0$. Значит, $\boldsymbol{\mu}(v) \equiv 0$, то есть $\Delta^{r_1,0}\,\boldsymbol{\eta}(u, v) = 0$ для всех u и v. Теперь зафиксируем произвольное v. Так как $\boldsymbol{\eta}(0, v) = 0$, то $\boldsymbol{\eta}(u, v) \equiv 0$. Из последнего тождества следует равенство $\mathbf{a} = \mathbf{c}$. Таким образом, единственность решения доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.