БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ СВЁРТОК МАЛЫХ ПОРЯДКОВ*

В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков

malv@gamma.math.spbu.ru sc2@pisem.net

18 октября 2005 г.

Напомним, что циклической свёрткой сигналов x, h из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал $u = x * h$ с отсчётами

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, h_{j-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{j} x_k\, h_{j-k} + \sum_{k=j+1}^{N-1} x_k\, h_{N+j-k}\,, \qquad j \in 0 : N-1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Если ввести правоциркулянтную матрицу

$$H_N = \begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{N-1} & \dots & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & h_{N-3} & \dots & h_0 \end{bmatrix},$$

то формулу (1) можно переписать так:

$$u = H_N\, x\,.$$

Рассмотрим вопрос о быстром вычислении циклической свёртки при $N = 2, 3, 4, 5$ на основе факторизации матрицы H_N. Нам потребуется одно элементарное свойство матриц: в предположении, что D — квадратная матрица и определено произведение CGA, справедливо равенство

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & CGA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

1°. Начнём с $N = 2$. Имеем

$$u_0 = h_0\,x_0 + h_1\,x_1\,,$$
$$u_1 = h_1\,x_0 + h_0\,x_1\,.$$

Поскольку

$$u_0 + u_1 = (h_0 + h_1)(x_0 + x_1)\,,$$
$$u_0 - u_1 = (h_0 - h_1)(x_0 - x_1)\,,$$

то

$$u_0 = \tfrac{1}{2}\big[(h_0 + h_1)(x_0 + x_1) + (h_0 - h_1)(x_0 - x_1)\big]\,,$$
$$u_1 = \tfrac{1}{2}\big[(h_0 + h_1)(x_0 + x_1) - (h_0 - h_1)(x_0 - x_1)\big]\,.$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h_0 + h_1 & h_0 - h_1 \\ h_0 + h_1 & -(h_0 - h_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} h_0 + h_1 & 0 \\ 0 & h_0 - h_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2}$$

По существу, получена факторизация матрицы H_2:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} h_0 + h_1 & 0 \\ 0 & h_0 - h_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

или, в компактной записи,

$$H_2 = C_2\,G_2\,A_2\,,$$

где $A_2 = C_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ и G_2 — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц A_2, C_2, G_2 являются константами. Вычисления по формуле (2) требуют 2 умножения и 4 сложения.

2°. Попутно разберёмся с факторизацией матрицы $\begin{bmatrix} h_0 & h_2 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix}$. Пусть

$$v_0 = h_0\,x_0 + h_2\,x_1\,,$$
$$v_1 = h_1\,x_0 + h_0\,x_1\,.$$

Поскольку

$$
\begin{aligned}
v_0 &= (h_2 - h_0)\, x_1 + h_0\, (x_0 + x_1)\,, \\
v_1 &= (h_1 - h_0)\, x_0 + h_0\, (x_0 + x_1)\,,
\end{aligned}
$$

то

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_2 - h_0 & 0 & h_0 \\ 0 & h_1 - h_0 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_0 + x_1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} h_2 - h_0 \\ h_1 - h_0 \\ h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{bmatrix} h_0 & h_2 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} h_2 - h_0 \\ h_1 - h_0 \\ h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}
$$

3°. Обратимся к случаю $N = 4$. Запишем

$$
H_4 = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2^{(0)} & H_2^{(1)} \\ H_2^{(1)} & H_2^{(0)} \end{bmatrix}.
$$

Видно, что матрица H_4 является блочным вариантом матрицы H_2. Согласно (3) получаем

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_0 + h_2 & h_3 + h_1 & 0 & 0 \\ h_1 + h_3 & h_0 + h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 - h_2 & h_3 - h_1 \\ 0 & 0 & h_1 - h_3 & h_0 - h_2 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Для факторизации диагональных блоков воспользуемся формулами (3) и (4):

$$
\begin{bmatrix} h_0 + h_2 & h_3 + h_1 \\ h_1 + h_3 & h_0 + h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} (h_0 + h_2) + (h_1 + h_3) \\ (h_0 + h_2) - (h_1 + h_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{6}
$$

$$\begin{bmatrix} h_0-h_2 & h_3-h_1 \\ h_1-h_3 & h_0-h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} -(h_1-h_3)-(h_0-h_2) \\ (h_1-h_3)-(h_0-h_2) \\ h_0-h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Подставив (6), (7) в (5), придём к разложению

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \operatorname{diag} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0+h_2 \\ h_1+h_3 \\ h_0-h_2 \\ h_1-h_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

Из (8) следует, что вычисление четырёхточечной свёртки требует 5 умножений и 15 сложений.

4°. Пусть $N = 3$. Приведём матрицу H_3 к блочно-диагональному виду. Имеем

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0+h_1+h_2 & h_0+h_1-2h_2 & h_0-2h_1+h_2 \\ h_0+h_1+h_2 & -2h_0+h_1+h_2 & h_0+h_1-2h_2 \\ h_0+h_1+h_2 & h_0-2h_1+h_2 & -2h_0+h_1+h_2 \end{bmatrix}.$$

Далее

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \begin{bmatrix} h_0+h_1+h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2h_0-h_1-h_2 & -h_0-h_1+2h_2 \\ 0 & -h_0+2h_1-h_2 & 2h_0-h_1-h_2 \end{bmatrix}.$$

Согласно (4)

$$\begin{bmatrix} 2h_0-h_1-h_2 & -h_0-h_1+2h_2 \\ -h_0+2h_1-h_2 & 2h_0-h_1-h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} -3h_0+3h_2 \\ -3h_0+3h_1 \\ 2h_0-h_1-h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С учётом равенств

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

получаем

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \operatorname{diag} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} h_0+h_1+h_2 \\ -3h_0+3h_2 \\ -3h_0+3h_1 \\ 2h_0-h_1-h_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

На основании (10) заключаем, что вычисление трёхточечной свёртки требует 4 умножения и 11 сложений.

Отметим, что обобщение формулы (9) на матрицы n-го порядка имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

5°. Рассмотрим случай $N = 5$. Обозначим $s = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4$. Тогда

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \\ = 5 \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & B & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} 5h_0 - s & 5h_4 - s & 5h_3 - s & 5h_2 - s \\ 5h_1 - s & 5h_0 - s & 5h_4 - s & 5h_3 - s \\ 5h_2 - s & 5h_1 - s & 5h_0 - s & 5h_4 - s \\ 5h_3 - s & 5h_2 - s & 5h_1 - s & 5h_0 - s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_2^{(0)} & H_2^{(2)} \\ H_2^{(1)} & H_2^{(0)} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Воспользуемся блочным вариантом формулы (4):

$$\begin{bmatrix} H_2^{(0)} & H_2^{(2)} \\ H_2^{(1)} & H_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} H_2^{(2)} - H_2^{(0)} \\ H_2^{(1)} - H_2^{(0)} \\ H_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Поскольку

$$H_2^{(0)} = \begin{bmatrix} s - 5h_0 & s - 5h_4 \\ s - 5h_1 & s - 5h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 5(h_0 - h_4) \\ 5(h_0 - h_1) \\ s - 5h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2^{(1)} - H_2^{(0)} = \begin{bmatrix} s-5h_2 & s-5h_1 \\ s-5h_3 & s-5h_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s-5h_0 & s-5h_4 \\ s-5h_1 & s-5h_0 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} h_0-h_2 & h_4-h_1 \\ h_1-h_3 & h_0-h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} 5\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix} -(h_1-h_4)-(h_0-h_2) \\ (h_1-h_3)-(h_0-h_2) \\ h_0-h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2^{(2)} - H_2^{(0)} = \begin{bmatrix} s-5h_3 & s-5h_2 \\ s-5h_4 & s-5h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s-5h_0 & s-5h_4 \\ s-5h_1 & s-5h_0 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} h_0-h_3 & h_4-h_2 \\ h_1-h_4 & h_0-h_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} 5\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix} -(h_2-h_4)-(h_0-h_3) \\ (h_1-h_4)-(h_0-h_3) \\ h_0-h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то

$$\mathrm{diag}\begin{bmatrix} H_2^{(2)} - H_2^{(0)} \\ H_2^{(1)} - H_2^{(0)} \\ H_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix} -5(h_2-h_4)-5(h_0-h_3) \\ 5(h_1-h_4)-5(h_0-h_3) \\ 5(h_0-h_3) \\ -5(h_1-h_4)-5(h_0-h_2) \\ 5(h_1-h_3)-5(h_0-h_2) \\ 5(h_0-h_2) \\ 5(h_0-h_4) \\ 5(h_0-h_1) \\ s-5h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Объединяя формулы (12)–(15) и учитывая (11) при $n = 5$, приходим к разложению

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$
\times \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} g_0\\ g_1\\ g_2\\ g_3\\ g_4\\ g_5\\ g_6\\ g_7\\ g_8\\ g_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&-1&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0\\ 1&0&0&-1&0\\ 1&0&0&0&-1 \end{bmatrix}, \tag{16}
$$

где

$$
\begin{bmatrix} g_0\\ g_1\\ g_2\\ g_3\\ g_4\\ g_5\\ g_6\\ g_7\\ g_8\\ g_9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -s\\ -5(h_2-h_4)-5(h_0-h_3)\\ 5(h_1-h_4)-5(h_0-h_3)\\ 5(h_0-h_3)\\ -5(h_1-h_4)-5(h_0-h_2)\\ 5(h_1-h_3)-5(h_0-h_2)\\ 5(h_0-h_2)\\ 5(h_0-h_4)\\ 5(h_0-h_1)\\ s-5h_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1\\ 5\\ 5\\ -5\\ 5\\ 5\\ -5\\ -5\\ -5\\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&0&1&-1&-1\\ 1&-1&0&-1&1\\ 1&0&0&-1&0\\ 1&1&-1&0&-1\\ 1&-1&-1&1&0\\ 1&0&-1&0&0\\ 1&0&0&0&-1\\ 1&-1&0&0&0\\ 4&-1&-1&-1&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0\\ h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4 \end{bmatrix}.
$$

Для полноты картины факторизуем матрицу, стоящую после диагональной:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&-1&-1\\1&-1&0&-1&1\\1&0&0&-1&0\\1&1&-1&0&-1\\1&-1&-1&1&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&0&-1\\1&-1&0&0&0\\4&-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&-1&1&1\\0&1&0&1&-1\\0&0&0&1&0\\0&-1&1&0&1\\0&1&1&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&-1&0\\1&0&0&0&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&-1&0\\1&0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

С учётом равенств

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&-1&0\\1&0&0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&-1\\1&0&0&-1&0\\1&0&-1&0&0\\1&-1&0&0&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&-1&0\\1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

формулу (16) можно переписать так:

$$H_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&-1&0\\1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\operatorname{diag}\begin{bmatrix}g_0\\g_1\\g_2\\g_3\\g_4\\g_5\\g_6\\g_7\\g_8\\g_9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&-1&0\\1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}. \quad (17)$$

Формула (17) показывает, что пятиточечную свёртку можно вычислить, используя 10 умножений и 31 сложение.

6°. В докладе представлен матричный подход к построению быстрых алгоритмов циклических свёрток. Другой (полиномиальный) подход описан в [1] и в [2, с. 105–111].

Доклад примыкает к работе авторов [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агарвал Р. К., Кули Дж. У. *Новые алгоритмы для цифровой свёртки.* В кн.: Макклелан Дж. Х., Рейдер Ч. М. *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов.* М.: Радио и связь, 1983. С. 91–117.

2. Блейхут Р. *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.* М.: Мир, 1989. 448 с.

3. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *О быстром преобразовании Фурье малых порядков* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып. 1 (№ 1). С. 36–45.