Санкт-Петербургский государственный университет
математико-механический факультет
кафедра исследования операций

БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ СВЕРТОК МАЛЫХ ПОРЯДКОВ

Дипломная работа
Фролова Дмитрия Александровича

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор .... В. Н. Малозёмов

Рецензент: О. В. Просеков

«Допустить к защите»
зав. каф., д. ф.-м. н., профессор Н. Н. Петров

Санкт-Петербург
2007

Содержание

Введение

Данная работа посвящена быстрому вычислению циклических сверток малых порядков. Представлен современный подход к ускорению вычислений путем уменьшения количества элементарных операций (операций умножения и сложения).

Основная идея работы заключается в получении разложения матрицы циклической свертки в виде $H_N = C\,D\,A$, где D — диагональная матрица, A и C — матрицы, соответствующие предсложениям и постсложениям. Такая задача впервые была поставлена Виноградом, для решения которой им были получены алгоритмы коротких сверток, описанные в книге [1]. Выделение диагональной матрицы было обусловлено тем, что длинные операции имели более высокую сложность вычислений, чем короткие. При этом именно диагональная матрица определяет умножения, необходимые для вычисления свертки. На сегодняшний день в современной технике операция умножения по производительности совпадает с операцией сложения. На первый взгляд это кажется странным, однако существуют алгоритмы, показывающие это. Один из возможных алгоритмов описан в книге [2].

Алгоритмы Винограда вычисления циклических сверток малых порядков являются оптимальными в смысле минимальности числа умножений. Заметим, что в этих алгоритмах внимание числу операций сложения не уделялось. Мы попытаемся оптимизировать общее число операций сложения и умножения.

Хотя существует некоторое количество базовых преобразований и разложений, каждая размерность требует индивидуального подхода. Важным инструментом для решения задачи является применение блочной техники при работе с матрицами.

В статье [4] был рассмотрен вопрос о вычислении циклической свертки при $N = 2, 3, 4, 5$ на основе факторизации матрицы H_N, мы же разберем случаи $N = 6, 7, 8, 9$. Для получения эффективных разложений также будет получена факторизация матрицы Теплица размерности три.

Необходимость получения таких разложений обусловлена тем, что при больших N может быть применен метод простых множителей, и тогда эффективность всего алгоритма будет определяться эффективностью алгоритмов малых порядков.

Матрица D может быть представлена в виде $D = \operatorname{diag} G$, где $G = B\,h$. При получении разложений мы не будем факторизовывать матрицу B, т. к. при решении инженерных задач элементы G могут быть заданы непосредственно в фильтре.

1. Предварительные сведения

Напомним, что циклической сверткой сигналов x, h из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал $u = x * h$ с отсчетами

$$u_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k h_{j-k} = \sum_{k=0}^{j} x_k h_{j-k} + \sum_{k=j+1}^{N-1} x_k h_{N+j-k}, \quad j \in 0 : N-1. \tag{1}$$

Если ввести правоциркулянтную матрицу

$$H_N = \begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{N-1} & \dots & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & h_{N-3} & \dots & h_0 \end{bmatrix},$$

то формулу (1) можно переписать так:

$$u = H_N x.$$

1.1. Система обозначений

Для удобства проведения дальнейших доказательств приведем систему обозначений, которая будет единой для всей работы. Введем в рассмотрение матрицы специального вида

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нам потребуется матрица C_n (размерности $n \times n$) следующего вида

$$C_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{bmatrix}.$$

Отметим, что

$$C_n^{-1} = \frac{1}{n}\, D_n, \text{ где } D_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Введем обозначение для теплицевой матрицы порядка n

$$TZ_n = \begin{bmatrix} h_0 & h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-2} \\ h_1 & h_0 & h_n & \dots & h_{2n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через I_n единичную матрицу размерности n ($I_1 = 1$).

Если A — вещественнозначная матрица произвольной размерности, то A' — ее транспонированная.

1.2. Кронекерово произведение и прямая сумма матриц

Введем в рассмотрение операции кронекерова умножения и прямой суммы матриц.

Пусть $A_{k,l}$ и $B_{m,n}$ — прямоугольные вещественнозначные матрицы порядков $k \times l$ и $m \times n$ соответственно. Тогда *кронекеровым произведением* матриц $A_{k,l}$ и $B_{m,n}$ называется матрица $Q_{km,ln} = A_{k,l} \otimes B_{m,n}$, с элементами

$$Q_{km,ln}[(i-1)m + j, (i'-1)n + j'] = A[i, i']\, B[j, j'].$$

Здесь $i \in 1:k, \quad i' \in 1:l, \quad j \in 1:m, \quad j' \in 1:n.$

Более наглядно

$$Q_{km,ln} = \begin{bmatrix} A_{k,l}[1,1]\, B_{m,n} & A_{k,l}[1,2]\, B_{m,n} & \dots & A_{k,l}[1,l]\, B_{m,n} \\ A_{k,l}[2,1]\, B_{m,n} & A_{k,l}[2,2]\, B_{m,n} & \dots & A_{k,l}[2,l]\, B_{m,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{k,l}[k,1]\, B_{m,n} & A_{k,l}[k,2]\, B_{m,n} & \dots & A_{k,l}[k,l]\, B_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Прямой суммой матриц $A_{k,l}$ и $B_{m,n}$ называется матрица $S_{k+m,l+n} = A_{k,l} \oplus B_{m,n}$, с элементами

$$S_{k+m,l+n}[i,j] = \begin{cases} A_{k,l}[i,j], & \text{если } 1 \le i \le k, 1 \le j \le l; \\ B_{m,n}[i,j], & \text{если } i > k, j > l; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $i \in 1:k+m, \quad j \in 1:l+n.$

Более наглядно

$$S_{k+m,l+n} = \begin{bmatrix} A_{k,l} & 0_{k,n} \\ 0_{m,l} & B_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Если определено произведение CDA и B — квадратная матрица, то справедливо равенство

$$(B \oplus CDA) = (I \oplus C)\,(B \oplus D)\,(I \oplus A).$$

Это равенство может быть легко переписано для случая, когда B является прямоугольной матрицей.

1.3. Известные результаты

Приведем результаты, полученные в работе [4], с использованием новой системы обозначений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для матрицы H_2 имеет место разложение:*

$$H_2 = D_2\,(\operatorname{diag} G)\,D_2, \tag{2}$$

где

$$G = \frac{1}{2}\,D_2 \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для матрицы TZ_2 имеет место разложение:*

$$TZ_2 = T_1\,(\operatorname{diag} G)\,T_1^{'}\,P_1, \tag{3}$$

где

$$G = \begin{bmatrix} -h_0 + h_2 \\ -h_0 + h_1 \\ h_0 \end{bmatrix}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для матрицы H_3 имеет место разложение:*

$$H_3 = D_3\,(I_1 \oplus T_1)\operatorname{diag} G\,(I_1 \oplus T_1^{'})\,D_3\,(I_1 \oplus P_1), \tag{4}$$

где

$$G = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} h_0 + h_1 + h_2 \\ -3h_0 + 3h_2 \\ -3h_0 + 3h_1 \\ 2h_0 - h_1 - h_2 \end{bmatrix}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для матрицы H_4 имеет место разложение:*

$$H_4 = (D_2 \otimes I_2)\,(D_2 \oplus T_1)\,\mathrm{diag}\,G\,(D_2 \oplus T_1^{'})\,(I_2 \oplus P_1)\,(D_2 \otimes I_2), \tag{5}$$

где

$$G = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 \\ -2h_0 - 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 \\ -2h_0 + 2h_1 + 2h_2 - 2h_3 \\ 2h_0 - 2h_2 \end{bmatrix}.$$

2. Полученные результаты

2.1. Факторизация матрицы Теплица порядка 3

Рассмотрим вопрос о факторизации матрицы Теплица порядка три

$$TZ_3 = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_4 \\ h_1 & h_0 & h_3 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Для матрицы TZ_3 имеет место разложение:*

$$TZ_3 = T_2\,T_3\,(\mathrm{diag}\,G)\,T_4\,T_2^{'}, \tag{6}$$

где вектор G определяется формулой (7).

Доказательство. Используем ход доказательства изнутри, т.е. сначала укажем диагональную матрицу, после чего с помощью линейных преобразований над ней получим матрицу Теплица.

Фиксируем диагональную матрицу

$$D = \mathrm{diag}\,G = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 - h_1 \\ h_3 - h_0 \\ h_4 - h_3 \\ h_3 - h_0 \\ h_2 - h_1 \\ h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

Необходимо в первой строке получить элементы h_0, h_3, h_4.

1.*Выполним преобразование L_1, где*

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_1 \operatorname{diag} G =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & h_3 - h_0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 - h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

2. *Выполним преобразование L_2, где*

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_1 \left(\operatorname{diag} G\right) L_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & \mathbf{h_3} & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 - h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

3. *Выполним преобразование* L_3, *где*

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_1\,(\operatorname{diag} G)\,L_2\,L_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & \mathbf{h_3} & \mathbf{h_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 - h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в первой строке в столбцах 1, 3 и 4 стоят необходимые элементы. Теперь получим во второй строке элементы h_1, h_0, h_3 в указанном порядке.

4. *Выполним преобразование* L_4, *где*

$$L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_4 L_1\,(\operatorname{diag} G)\,L_2\,L_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & \mathbf{h_3} & \mathbf{h_4} & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & h_0 - h_1 & \mathbf{h_0} & h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

5. *Выполним преобразование* L_5, *где*

$$L_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_4\, L_1\, (\operatorname{diag} G)\, L_2\, L_3\, L_5 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & \mathbf{h_3} & \mathbf{h_4} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{h_1} & h_0 - h_1 & \mathbf{h_0} & \mathbf{h_3} & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 - h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

Значит, в столбцах 1, 3 и 4 получены первые две строки матрицы Теплица. Далее нам остается получить в одной из оставшихся строк элементы h_2, h_1, h_0 третьей строки матрицы TZ_3.

6. *Выполним преобразование* L_6, *где*

$$L_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_6\, L_4\, L_1\, (\operatorname{diag} G)\, L_2\, L_3\, L_5 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & \mathbf{h_3} & \mathbf{h_4} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{h_1} & h_0 - h_1 & \mathbf{h_0} & \mathbf{h_3} & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 - h_1 & h_0 & \mathbf{h_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

7. *Выполним преобразование* L_7*, где*

$$L_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_6\, L_4\, L_1\, (\operatorname{diag} G)\, L_2\, L_3\, L_5\, L_7 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & \mathbf{h_3} & \mathbf{h_4} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{h_1} & h_0 - h_1 & \mathbf{h_0} & \mathbf{h_3} & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 - h_1 & h_0 & \mathbf{h_0} & 0 & 0 & 0 \\ h_2 - h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 - h_0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

8. *Выполним преобразование* L_8*, где*

$$L_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_8\, L_6\, L_4\, L_1\, (\operatorname{diag} G)\, L_2\, L_3\, L_5\, L_7 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h_0} & 0 & \mathbf{h_3} & \mathbf{h_4} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{h_1} & h_0 - h_1 & \mathbf{h_0} & \mathbf{h_3} & h_3 - h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - h_0 & h_3 - h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{h_2} & h_0 - h_1 & \mathbf{h_1} & \mathbf{h_0} & 0 & h_2 - h_1 & h_1 - h_0 \\ h_2 - h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 - h_0 & 0 & 0 & 0 & h_1 - h_0 \end{bmatrix}.$$

Остается выделить из общей матрицы необходимые девять элементов (выделенные жирным), которые сформируют матрицу TZ_3.

9. *Выполним преобразования* L_9 *и* L_{10}*, где*

$$L_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$L_{10}\, L_8\, L_6\, L_4\, L_1\, (\operatorname{diag} G)\, L_2\, L_3\, L_5\, L_7\, L_9 = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_4 \\ h_1 & h_0 & h_3 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}.$$

Перемножая последовательно матрицы преобразований, получаем

$$TZ_3 = L_{10}\, L_8\, L_6\, L_4\, L_1\, (\operatorname{diag} G)\, L_2\, L_3\, L_5\, L_7\, L_9 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} G \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Несложно проверить, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = T_2\,T_3, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T_4\,T_2^{'}.$$

Окончательно получаем

$$TZ_3 = T_2\,T_3\,(\operatorname{diag} G)\,T_4\,T_2^{'},$$

где

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Таким образом, для вычисления преобразования Теплица порядка три требуется 8 сложений и 7 умножений, т.е. 15 операций.

□

З а м е ч а н и е 1. Выбор матрицы G не является случайным. В исходной матрице TZ_3 в общем случае имеется пять различных элементов: h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, каждый из которых может быть получен линейной комбинацией строк и столбцов матрицы $\operatorname{diag} G$. Необходимость двух последних элементов G, а именно $h_2 - h_1$ и $h_1 - h_0$, видна из хода доказательства.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что вычисление циклической свертки порядка три также требует 15 операций.

2.2. Факторизация правоциркулянтной матрицы порядка 6

Далее будут представлены два возможных варианта факторизации матрицы H_6, имеющие различную эффективность.

Вариант наиболее эффективной факторизации.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Для матрицы H_6 имеет место разложение:*

$$H_6 = (D_2 \otimes I_3)\,(I_2 \otimes D_3)\,\big(I_2 \otimes (I_1 \oplus T_1)\big)\,\mathrm{diag}\,G \times$$
$$\times\,\big(I_2 \otimes (I_1 \oplus T_1^{'})\,\big)(I_2 \otimes D_3)\,\big(I_2 \otimes (I_1 \oplus P_1)\big)\,(D_2 \otimes I_3),$$

где вектор G определяется формулой (11).

Доказательство. Запишем

$$H_6 = \begin{bmatrix} h_0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_5 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_5 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_5 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_3^{(0)} & H_3^{(1)} \\ H_3^{(1)} & H_3^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Видно, что матрица H_6 является блочным вариантом матрицы H_2. Тогда согласно (2) получаем:

$$\begin{bmatrix} H_3^{(0)} & H_3^{(1)} \\ H_3^{(1)} & H_3^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\,(D_2 \otimes I_3)\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix} H_3^{(0)} + H_3^{(1)} \\ H_3^{(0)} - H_3^{(1)} \end{bmatrix}(D_2 \otimes I_3). \tag{8}$$

Факторизуем каждый блок отдельно:

$$H_3^{(0)} + H_3^{(1)} = \begin{bmatrix} h_0+h_3 & h_5+h_2 & h_4+h_1 \\ h_1+h_4 & h_0+h_3 & h_5+h_2 \\ h_2+h_5 & h_1+h_4 & h_0+h_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,D_3\,(I_1 \oplus T_1)\,B_4^{(0)} \times$$
$$\times\,(I_1 \oplus T_1^{'})\,D_3\,(I_1 \oplus P_1),$$

$$H_3^{(0)} - H_3^{(1)} = \begin{bmatrix} h_0-h_3 & h_5-h_2 & h_4-h_1 \\ h_1-h_4 & h_0-h_3 & h_5-h_2 \\ h_2-h_5 & h_1-h_4 & h_0-h_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,D_3\,(I_1 \oplus T_1)\,B_4^{(1)} \times$$
$$\times\,(I_1 \oplus T_1^{'})\,D_3\,(I_1 \oplus P_1),$$

где

$$B_4^{(0)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} h_0+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5 \\ -3h_0-3h_3+3h_2+3h_5 \\ -3h_0-3h_3+3h_1+3h_4 \\ 2h_0+2h_3-h_1-h_4-h_2-h_5 \end{bmatrix},$$

$$B_4^{(1)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} h_0+h_1+h_2-h_3-h_4-h_5 \\ -3h_0+3h_3+3h_2-3h_5 \\ -3h_0+3h_3+3h_1-3h_4 \\ 2h_0-2h_3-h_1+h_4-h_2+h_5 \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные разложения в (8), получаем

$$\begin{aligned} H_6 = \tfrac{1}{6}\left(D_2\otimes I_3\right)\Big(\big[D_3\left(I_1\oplus T_1\right)B_4^{(0)}\left(I_1\oplus T_1^{'}\right)D_3\left(I_1\oplus P_1\right)\big]\oplus \\ \oplus\big[D_3\left(I_1\oplus T_1\right)B_4^{(1)}\left(I_1\oplus T_1^{'}\right)D_3\left(I_1\oplus P_1\right)\big]\Big)\left(D_2\otimes I_3\right) = \\ = \left(D_2\otimes I_3\right)\left(I_2\otimes D_3\right)\big(I_2\otimes\left(I_1\oplus T_1\right)\big)\tfrac{1}{6}\,(B_4^{(0)}\oplus B_4^{(1)})\times \\ \times\big(I_2\otimes(I_1\oplus T_1^{'})\big)\left(I_2\otimes D_3\right)\big(I_2\otimes\left(I_1\oplus P_1\right)\big)\left(D_2\otimes I_3\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим

$$\operatorname{diag} G := \tfrac{1}{6}\,(B_4^{(0)}\oplus B_4^{(1)}) = \operatorname{diag}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} h_0+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5 \\ -3h_0-3h_3+3h_2+3h_5 \\ -3h_0-3h_3+3h_1+3h_4 \\ 2h_0+2h_3-h_1-h_4-h_2-h_5 \\ h_0+h_1+h_2-h_3-h_4-h_5 \\ -3h_0+3h_3+3h_2-3h_5 \\ -3h_0+3h_3+3h_1-3h_4 \\ 2h_0-2h_3-h_1+h_4-h_2+h_5 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Для представления матрицы G нам потребуются матрицы $A_{4,3}$ и P:

$$A_{4,3} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}(I_1\oplus T_1^{'}), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$G = \tfrac{1}{6}\left(D_2 \otimes A_{4,3}\right) \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{6}\left(P \otimes I_4\right)\left(2I_4 \oplus I_4\right)\big(A_{4,3} \oplus (-A_{4,3})\big)\left(P' \otimes I_3\right) \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При этом

$$\big(A_{4,3} \oplus (-A_{4,3})\big) = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \big(I_2 \otimes (I_1 \oplus T_1')\big)\left(I_2 \otimes D_3\right)\big(I_2 \otimes (I_1 \oplus P_1)\big).$$

Объединяя (9), (10), (11), получаем конечное представление для H_6:

$$H_6 = \left(D_2 \otimes I_3\right)\left(I_2 \otimes D_3\right)\big(I_2 \otimes (I_1 \oplus T_1)\big) \operatorname{diag} G \times$$
$$\times \big(I_2 \otimes (I_1 \oplus T_1')\big)(I_2 \otimes D_3)\big(I_2 \otimes (I_1 \oplus P_1)\big)\left(D_2 \otimes I_3\right).$$

□

З а м е ч а н и е 3. Из последнего равенства следует, что вычисление шеститочечной свертки требует 34 сложения и 8 умножений, т.е. 42 операции.

З а м е ч а н и е 4. Факторизация, приведенная в работе [1], требует 52 операции.

С другой стороны, можно представить матрицу H_6 иначе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Для матрицы H_6 имеет место разложение:*

$$H_6 = \left(D_3 \otimes I_2\right)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_2\big) \times$$
$$\times \big(D_2 \oplus (I_3 \otimes T_1)\big) \operatorname{diag} G \big(D_2 \oplus (I_3 \otimes T_1')\big) \times$$
$$\times \big(I_2 \oplus (I_3 \otimes P_1)\big)\big((I_1 \oplus T_1') \otimes I_2\big)(D_3 \otimes I_2)\big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_2\big),$$

где вектор G определяется формулой (15).

Доказательство. Запишем

$$H_6 = \begin{bmatrix} h_0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_5 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_5 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_5 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2^{(0)} & H_2^{(2)} & H_2^{(1)} \\ H_2^{(1)} & H_2^{(0)} & H_2^{(2)} \\ H_2^{(2)} & H_2^{(1)} & H_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся блочным вариантом матрицы H_3. В соответствии с (4) получаем:

$$H_6 = (D_3 \otimes I_2)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_2\big) \operatorname{diag} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} H_2^{(0)} + H_2^{(1)} + H_2^{(2)} \\ -3H_2^{(0)} + 3H_2^{(2)} \\ -3H_2^{(0)} + 3H_2^{(1)} \\ 2H_2^{(0)} - H_2^{(1)} - H_2^{(2)} \end{bmatrix} \times \tag{12}$$

$$\times \big((I_1 \oplus T_1') \otimes I_2\big) (D_3 \otimes I_2) \big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_2\big).$$

Факторизуем каждый блок отдельно:

$$H_2^{(0)} + H_2^{(1)} + H_2^{(2)} = \begin{bmatrix} h_0 + h_2 + h_4 & h_1 + h_3 + h_5 \\ h_1 + h_3 + h_5 & h_0 + h_2 + h_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} D_2\, B_2^{(0)}\, D_2,$$

$$-3H_2^{(0)} + 3H_2^{(2)} = 3 \begin{bmatrix} -h_0 + h_4 & h_3 - h_5 \\ -h_1 + h_5 & -h_0 + h_4 \end{bmatrix} = 3\, T_1\, B_3^{(0)}\, T_1'\, P_1,$$

$$-3H_2^{(0)} + 3H_2^{(1)} = 3 \begin{bmatrix} -h_0 + h_2 & h_1 - h_5 \\ -h_1 + h_3 & -h_0 + h_2 \end{bmatrix} = 3\, T_1\, B_3^{(1)}\, T_1'\, P_1,$$

$$2H_2^{(0)} - H_2^{(1)} - H_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 2h_0 - h_2 - h_4 & -h_1 - h_3 + 2h_5 \\ 2h_1 - h_3 - h_5 & 2h_0 - h_2 - h_4 \end{bmatrix} = T_1\, B_3^{(2)}\, T_1'\, P_1,$$

где

$$B_2^{(0)} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(0)} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} h_0 + h_3 - h_4 - h_5 \\ h_0 - h_1 - h_4 + h_5 \\ -h_0 + h_4 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(1)} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} h_0 + h_1 - h_2 - h_5 \\ h_0 - h_1 - h_2 + h_3 \\ -h_0 + h_2 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(2)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} -2h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 + 2h_5 \\ -2h_0 + 2h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 \\ 2h_0 - h_2 - h_5 \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные разложения в (12), получаем

$$\begin{aligned} H_6 = {} & (D_3 \otimes I_2)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_2\big)\big(D_2 \oplus (I_3 \otimes T_1)\big)\times \\ & \times \big(\tfrac{1}{6}\, B_2^{(0)} \oplus B_3^{(0)} \oplus B_3^{(1)} \oplus \tfrac{1}{3} B_3^{(2)}\big)\big(D_2 \oplus (I_3 \otimes T_1^{'})\big)\times \\ & \times \big(I_2 \oplus (I_3 \otimes P_1)\big)\big((I_1 \oplus T_1^{'}) \otimes I_2\big)(D_3 \otimes I_2)\big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_2\big). \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначим

$$\operatorname{diag} G := \big(\tfrac{1}{6}\, B_2^{(0)} \oplus B_3^{(0)} \oplus B_3^{(1)} \oplus \tfrac{1}{3}\, B_3^{(2)}\big) =$$

$$= \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \frac{1}{6}(h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) \\ \frac{1}{6}(h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5) \\ h_0 + h_3 - h_4 - h_5 \\ h_0 - h_1 - h_4 + h_5 \\ -h_0 + h_4 \\ h_0 + h_1 - h_2 - h_5 \\ h_0 - h_1 - h_2 + h_3 \\ -h_0 + h_2 \\ \frac{1}{3}(-2h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 + 2h_5) \\ \frac{1}{3}(-2h_0 + 2h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5) \\ \frac{1}{3}(2h_0 - h_2 - h_4) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Вектор G имеет вид

$$G = \frac{1}{6}\operatorname{diag}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Объединяя (13), (14), (15), окончательно получаем

$$\begin{aligned} H_6 = (D_3 \otimes I_2)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_2\big) \times \\ \times \big(D_2 \oplus (I_3 \otimes T_1)\big) \operatorname{diag} G\big(D_2 \oplus (I_3 \otimes T_1^{'})\big) \times \\ \times \big(I_2 \oplus (I_3 \otimes P_1)\big)\big((I_1 \oplus T_1^{'}) \otimes I_2\big)(D_3 \otimes I_2)\big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_2\big). \end{aligned}$$

□

З а м е ч а н и е 5. Из последнего равенства следует, что вычисление шеститочечной свертки требует 35 сложений и 11 умножений, т.е. 46 операций.

2.3. Факторизация правоциркулянтной матрицы порядка 7

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Для матрицы H_7 имеет место разложение:*

$$\begin{aligned} H_7 = D_7\,(I_1 \oplus \big(T_1 \otimes I_3\big))\,(I_1 \oplus \big(I_3 \otimes T_2\big))\times \\ \times (I_1 \oplus \big(I_3 \otimes T_3\big))\,\operatorname{diag} G\,(I_1 \oplus \big(I_3 \otimes T_4\big))\times \\ \times (I_1 \oplus \big(I_3 \otimes T_2^{'}\big))\,(I_1 \oplus \big(T_1^{'} \otimes I_3\big))\,(I_1 \oplus \big(P_1 \otimes I_3\big))\,D_7, \end{aligned}$$

где вектор G определяется формулой (19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем

$$H_7 = \begin{bmatrix} h_0 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_5 & h_4 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_5 & h_5 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_6 \\ h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $s = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6$.

Тогда

$$C_7\,H_7\,C_7 = 7\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & B & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix},$$

где

$$B = \begin{bmatrix} 7h_0 - s & 7h_6 - s & 7h_5 - s & 7h_4 - s & 7h_3 - s & 7h_2 - s \\ 7h_1 - s & 7h_0 - s & 7h_6 - s & 7h_5 - s & 7h_4 - s & 7h_3 - s \\ 7h_2 - s & 7h_1 - s & 7h_0 - s & 7h_6 - s & 7h_5 - s & 7h_4 - s \\ 7h_3 - s & 7h_2 - s & 7h_1 - s & 7h_0 - s & 7h_6 - s & 7h_5 - s \\ 7h_4 - s & 7h_3 - s & 7h_2 - s & 7h_1 - s & 7h_0 - s & 7h_6 - s \\ 7h_5 - s & 7h_4 - s & 7h_3 - s & 7h_2 - s & 7h_1 - s & 7h_0 - s \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} H_3^{(0)} & H_3^{(2)} \\ H_3^{(1)} & H_3^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Используем блочный вариант формулы (3). Получим

$$B = \begin{bmatrix} H_3^{(0)} & H_3^{(2)} \\ H_3^{(1)} & H_3^{(0)} \end{bmatrix} = (T_1 \otimes I_3)\,\mathrm{diag} \begin{bmatrix} H_3^{(2)} - H_3^{(0)} \\ H_3^{(1)} - H_3^{(0)} \\ H_3^{(0)} \end{bmatrix} (T_1^{'} \otimes I_3)\,(P_1 \otimes I_3). \tag{16}$$

Будем по отдельности факторизовывать блоки диагональной матрицы. Применим формулу (6) для представлением матрицы Теплица:

$$H_3^{(2)} - H_3^{(0)} = \begin{bmatrix} -7h_0 + 7h_4 & 7h_3 - 7h_6 & 7h_2 - 7h_5 \\ -7h_1 + 7h_5 & -7h_0 + 7h_4 & 7h_3 - 7h_6 \\ -7h_2 + 7h_6 & -7h_1 + 7h_5 & -7h_0 + 7h_4 \end{bmatrix} =$$

$$= 7\,T_2\,T_3\,B_7^{(0)}\,T_4\,T_2^{'},$$

$$H_3^{(1)} - H_3^{(0)} = \begin{bmatrix} -7h_0 - 7h_3 & 7h_2 - 7h_6 & 7h_1 - 7h_5 \\ -7h_1 + 7h_4 & -7h_0 + 7h_3 & 7h_2 - 7h_6 \\ -7h_2 + 7h_5 & -7h_1 + 7h_4 & -7h_0 + 7h_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 7\,T_2\,T_3\,B_7^{(1)}\,T_4\,T_2^{'},$$

$$H_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 7h_0 - s & 7h_6 - s & 7h_5 - s \\ 7h_1 - s & 7h_0 - s & 7h_6 - s \\ 7h_2 - s & 7h_1 - s & 7h_0 - s \end{bmatrix} =$$

$$= T_2\,T_3\,B_7^{(2)}\,T_4\,T_2^{'},$$

где

$$B_7^{(0)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} -h_0+h_4 \\ -h_0+h_1+h_4-h_5 \\ h_0+h_3-h_4-h_6 \\ h_2-h_3-h_5+h_6 \\ h_0+h_3-h_4-h_6 \\ h_1-h_2-h_5+h_6 \\ h_0-h_1-h_4+h_5 \end{bmatrix}, \quad B_7^{(1)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} -h_0+h_3 \\ -h_0+h_1+h_3-h_4 \\ h_0+h_2-h_3-h_6 \\ h_1-h_2-h_5+h_6 \\ h_0+h_2-h_3-h_6 \\ h_1-h_2-h_4+h_5 \\ h_0-h_1-h_3+h_4 \end{bmatrix}$$

$$B_7^{(2)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} 7h_0-s \\ 7h_0-7h_1 \\ 7h_6-7h_0 \\ 7h_5-7h_6 \\ 7h_6-7h_0 \\ 7h_2-7h_1 \\ 7h_1-7h_0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные разложения в (16), получаем

$$B = (T_1 \otimes I_3)\,(I_3 \otimes T_2)\,(I_3 \otimes T_3)\left(7\,B_7^{(0)} \oplus 7\,B_7^{(1)} \oplus B_7^{(2)}\right)\times$$
$$\times\,(I_3 \otimes T_4)\,(I_3 \otimes T_2')\,(T_1' \otimes I_3)\,(P_1 \otimes I_3).$$

Отсюда следует, что

$$C_7\,H_7\,C_7 = 7\,(I_1 \oplus \left(T_1 \otimes I_3\right))\,(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_2\right))\,(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_3\right))\times$$
$$\times\,\left(s \oplus 7\,B_7^{(0)} \oplus 7\,B_7^{(1)} \oplus B_7^{(2)}\right)(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_4\right))\,(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_2'\right))\times$$
$$\times\,(I_1 \oplus \left(T_1' \otimes I_3\right))\,(I_1 \oplus \left(P_1 \otimes I_3\right)).$$

Для получения окончательного результата нам остается выразить H_7:

$$H_7 = \tfrac{1}{7}\,D_7\,(I_1 \oplus \left(T_1 \otimes I_3\right))\,(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_2\right))\,(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_3\right))\times$$
$$\times\,\left(s \oplus 7\,B_7^{(0)} \oplus 7\,B_7^{(1)} \oplus B_7^{(2)}\right)(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_4\right))\,(I_1 \oplus \left(I_3 \otimes T_2'\right))\times \qquad (17)$$
$$\times\,(I_1 \oplus \left(T_1' \otimes I_3\right))\,(I_1 \oplus \left(P_1 \otimes I_3\right))\,D_7.$$

Обозначим

$$\operatorname{diag} G := \tfrac{1}{7}\left(s \oplus 7\,B_7^{(0)} \oplus 7\,B_7^{(1)} \oplus B_7^{(2)}\right), \tag{18}$$

где

$$G = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Объединяя (17), (18), (19), окончательно получаем

$$\begin{aligned} H_7 = D_7\,&(I_1 \oplus (T_1 \otimes I_3))\,(I_1 \oplus (I_3 \otimes T_2))\times \\ &\times (I_1 \oplus (I_3 \otimes T_3))\ \operatorname{diag} G\,(I_1 \oplus (I_3 \otimes T_4))\times \\ &\times (I_1 \oplus (I_3 \otimes T_2'))\,(I_1 \oplus (T_1' \otimes I_3))\,(I_1 \oplus (P_1 \otimes I_3))\,D_7. \end{aligned}$$

□

З а м е ч а н и е 6. Из последнего равенства следует, что вычисление семиточечной свертки требует 57 сложений и 22 умножения, т.е. 79 операций.

З а м е ч а н и е 7. Факторизация, приведенная в книге [3], требует 86 операций.

2.4. Факторизация правоциркулянтной матрицы порядка 8

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Для матрицы H_8 имеет место разложение:*

$$H_8 = (D_2 \otimes I_4)\big((D_2 \oplus T_1) \otimes I_2\big)\big(D_2 \oplus (I_4 \otimes T_1)\big) \operatorname{diag} G \left(I_2 \oplus (I_4 \otimes T_1^{'})\right) \times$$
$$\times \big(D_2 \oplus (I_4 \otimes P_1)\big)\big((D_2 \oplus T_1^{'}) \otimes I_2\big)\big((I_2 \oplus P_1) \otimes I_2\big)(D_2 \otimes I_4),$$

где вектор G определяется формулой (23).

Доказательство. Запишем

$$H_8 = \begin{bmatrix} h_0 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_7 & h_6 & h_5 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_7 & h_6 \\ h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_7 \\ h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2^{(0)} & H_2^{(3)} & H_2^{(2)} & H_2^{(1)} \\ H_2^{(1)} & H_2^{(0)} & H_2^{(3)} & H_2^{(2)} \\ H_2^{(2)} & H_2^{(1)} & H_2^{(0)} & H_2^{(3)} \\ H_2^{(3)} & H_2^{(2)} & H_2^{(1)} & H_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Матрица H_8 является блочным вариантом матрицы H_4. Согласно (5),

$$H_8 = (D_2 \otimes I_4)\big((D_2 \oplus T_1) \otimes I_2\big) \operatorname{diag} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} H_2^{(0)} + H_2^{(1)} + H_2^{(2)} + H_2^{(3)} \\ H_2^{(0)} - H_2^{(1)} + H_2^{(2)} - H_2^{(3)} \\ -2H_2^{(0)} - 2H_2^{(1)} + 2H_2^{(2)} + 2H_2^{(3)} \\ -2H_2^{(0)} + 2H_2^{(1)} + 2H_2^{(2)} - 2H_2^{(3)} \\ 2H_2^{(0)} - 2H_2^{(2)} \end{bmatrix} \times \qquad (20)$$

$$\times \big((D_2 \oplus T_1^{'}) \otimes I_2\big)\big((I_2 \oplus P_1) \otimes I_2\big)(D_2 \otimes I_4).$$

Факторизуем каждый блок отдельно:

$$H_2^{(0)} + H_2^{(1)} + H_2^{(2)} + H_2^{(3)} = \begin{bmatrix} h_0 + h_2 + h_4 + h_6 & h_1 + h_3 + h_5 + h_7 \\ h_1 + h_3 + h_5 + h_7 & h_0 + h_2 + h_4 + h_6 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} D_2 \, B_2^{(0)} \, D_2,$$

$$H_2^{(0)} - H_2^{(1)} + H_2^{(2)} - H_2^{(3)} = \begin{bmatrix} h_0 - h_2 + h_4 - h_6 & -h_1 + h_3 - h_5 + h_7 \\ h_1 - h_3 + h_5 - h_7 & h_0 - h_2 + h_4 - h_6 \end{bmatrix} =$$
$$= T_1 \, B_3^{(0)} \, T_1^{'} \, P_1,$$

$$-2H_2^{(0)} - 2H_2^{(1)} + 2H_2^{(2)} + 2H_2^{(3)} = 2\begin{bmatrix} -h_0 - h_2 + h_4 + h_6 & -h_1 + h_3 + h_5 - h_7 \\ -h_1 - h_3 + h_5 + h_7 & -h_0 - h_2 + h_4 + h_6 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\,T_1\,B_3^{(1)}\,T_1'\,P_1,$$

$$-2H_2^{(0)} + 2H_2^{(1)} + 2H_2^{(2)} - 2H_2^{(3)} = 2\begin{bmatrix} -h_0 + h_2 + h_4 - h_6 & h_1 + h_3 - h_5 - h_7 \\ -h_1 + h_3 + h_5 - h_7 & -h_0 + h_2 + h_4 - h_6 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\,T_1\,B_3^{(2)}\,T_1'\,P_1,$$

$$2H_2^{(0)} - 2H_2^{(2)} = 2\begin{bmatrix} h_0 - h_4 & -h_3 + h_7 \\ h_1 - h_5 & h_0 - h_4 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\,T_1\,B_3^{(3)}\,T_1'\,P_1,$$

где

$$B_2^{(0)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7 \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 + h_6 - h_7 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(0)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} -h_0 - h_1 + h_2 + h_3 - h_4 - h_5 + h_6 + h_7 \\ -h_0 + h_1 + h_2 - h_3 - h_4 + h_5 + h_6 - h_7 \\ h_0 - h_2 + h_4 - h_6 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(1)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} h_0 - h_1 + h_2 + h_3 - h_4 + h_5 - h_6 - h_7 \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 - h_4 + h_5 - h_6 + h_7 \\ -h_0 - h_2 + h_4 + h_6 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(2)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} h_0 + h_1 - h_2 + h_3 - h_4 - h_5 + h_6 - h_7 \\ h_0 - h_1 - h_2 + h_3 - h_4 + h_5 + h_6 - h_7 \\ -h_0 + h_2 + h_4 - h_6 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(3)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} -h_0 - h_3 + h_4 + h_7 \\ -h_0 + h_1 + h_4 - h_5 \\ h_0 - h_4 \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные разложения в (20), получаем

$$\begin{aligned} H_8 = {} & (D_2 \otimes I_4)\big((D_2 \oplus T_1) \otimes I_2\big)\big(D_2 \oplus (I_4 \otimes T_1)\big)\times \\ & \times \big(\tfrac{1}{8}\,B_2^{(0)} \oplus \tfrac{1}{4}\,B_3^{(0)} \oplus \tfrac{1}{2}\,B_3^{(1)} \oplus \tfrac{1}{2}\,B_3^{(2)} \oplus \tfrac{1}{2}\,B_3^{(3)}\big)\big(I_2 \oplus (I_4 \otimes T_1')\big)\times \\ & \times \big(D_2 \oplus (I_4 \otimes P_1)\big)\big((D_2 \oplus T_1') \otimes I_2\big)\big((I_2 \oplus P_1) \otimes I_2\big)(D_2 \otimes I_4). \end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим

$$\operatorname{diag} G := \big(\tfrac{1}{8}\,B_2^{(0)} \oplus \tfrac{1}{4}\,B_3^{(0)} \oplus \tfrac{1}{2}\,B_3^{(1)} \oplus \tfrac{1}{2}\,B_3^{(2)} \oplus \tfrac{1}{2}\,B_3^{(3)}\big), \tag{22}$$

где

$$G = \frac{1}{8}\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 2\\ 2\\ 4\\ 4\\ 4\\ 4\\ 4\\ 4\\ 4\\ 4\\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0\\ h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4\\ h_5\\ h_6\\ h_7 \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Объединяя (21), (22), (23), приходим к разложению

$$H_8 = (D_2 \otimes I_4)\big((D_2 \oplus T_1) \otimes I_2\big)\big(D_2 \oplus (I_4 \otimes T_1)\big)\,\mathrm{diag}\,G\,\big(I_2 \oplus (I_4 \otimes T_1^{'})\big)\times$$
$$\times\big(D_2 \oplus (I_4 \otimes P_1)\big)\big((D_2 \oplus T_1^{'}) \otimes I_2\big)\big((I_2 \oplus P_1) \otimes I_2\big)(D_2 \otimes I_4).$$

□

З а м е ч а н и е 8. Из последнего равенства следует, что вычисление восьмиточечной свертки требует 46 сложений и 14 умножений, т.е. 60 операций.

З а м е ч а н и е 9. Если разбить матрицу H_8 на блоки размерности 4×4, т.е.

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4^{(0)} & H_4^{(2)}\\ H_4^{(1)} & H_4^{(0)} \end{bmatrix},$$

то можно получить разложение, требующее то же количество операций умножения и сложения.

З а м е ч а н и е 10. Факторизация, приведенная в книге [3], также требует 60 операций.

2.5. Факторизация правоциркулянтной матрицы порядка 9

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Для матрицы H_9 имеет место разложение:*

$$H_9 = (D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_3\big)\big(D_3 \oplus (I_3 \otimes T_2)\big) \times$$
$$\times \big(I_1 \oplus T_1 \oplus (I_3 \otimes T_3)\big) \operatorname{diag} G \big(I_1 \oplus T_1^{'} \oplus (I_3 \otimes T_4)\big)\big(D_3 \oplus (I_3 \otimes T_2^{'})\big) \times$$
$$\times \ (I_1 \oplus P_1 \oplus I_9)\big((I_1 \oplus T_1^{'}) \otimes I_3\big)(D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_3\big),$$

где вектор G определяется формулой (27)*.*

Доказательство. Запишем

$$H_9 = \begin{bmatrix} h_0 & h_8 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_8 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_8 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_8 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_8 & h_7 & h_6 & h_5 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_8 & h_7 & h_6 \\ h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_8 & h_7 \\ h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_8 \\ h_8 & h_7 & h_6 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_3^{(0)} & H_3^{(2)} & H_3^{(1)} \\ H_3^{(1)} & H_3^{(0)} & H_3^{(2)} \\ H_3^{(2)} & H_3^{(1)} & H_8^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Матрица H_9 является блочным вариантом матрицы H_3. Согласно (4),

$$H_9 = (D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_3\big) \operatorname{diag} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} H_3^{(0)} + H_3^{(1)} + H_3^{(2)} \\ -3H_3^{(0)} + 3H_3^{(2)} \\ -3H_3^{(0)} + 3H_3^{(1)} \\ 2H_3^{(0)} - H_3^{(1)} - H_3^{(2)} \end{bmatrix} \times \tag{24}$$
$$\times \big((I_1 \oplus T_1^{'}) \otimes I_3\big)(D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_3\big).$$

Факторизуем каждый блок отдельно:

$$H_3^{(0)} + H_3^{(1)} + H_3^{(2)} = \begin{bmatrix} h_0 + h_3 + h_6 & h_2 + h_5 + h_8 & h_1 + h_4 + h_7 \\ h_1 + h_4 + h_7 & h_0 + h_3 + h_6 & h_2 + h_5 + h_8 \\ h_2 + h_5 + h_8 & h_1 + h_4 + h_7 & h_0 + h_3 + h_6 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} D_3 (I_1 \oplus T_1) B_4^{(0)} (I_1 \oplus T_1^{'}) D_3 (I_1 \oplus P_1).$$

Воспользуемся представлением из (6):

$$-3H_3^{(0)}+3H_3^{(2)}=3\begin{bmatrix}-h_0+h_6 & h_5-h_8 & h_4-h_7\\ -h_1+h_7 & -h_0+h_6 & h_5-h_8\\ -h_2+h_8 & -h_1+h_7 & -h_0+h_6\end{bmatrix}=$$

$$=3\,T_2\,T_3\,B_7^{(0)}\,T_4\,T_2',$$

$$-3H_3^{(0)}+3H_3^{(1)}=3\begin{bmatrix}-h_0+h_3 & h_2-h_8 & h_1-h_7\\ -h_1+h_4 & -h_0+h_3 & h_2-h_8\\ -h_2+h_5 & -h_1+h_4 & -h_0+h_3\end{bmatrix}=$$

$$=3\,T_2\,T_3\,B_7^{(1)}\,T_4\,T_2',$$

$$2H_3^{(0)}-H_3^{(1)}-H_3^{(2)}=\begin{bmatrix}2h_0-h_3-h_6 & -h_2-h_5+2h_8 & -h_1-h_4+2h_7\\ 2h_1-h_4-h_7 & 2h_0-h_3-h_6 & -h_2-h_5+2h_8\\ 2h_2-h_5-h_8 & 2h_1-h_4-h_7 & 2h_0-h_3-h_6\end{bmatrix}=$$

$$=T_2\,T_3\,B_7^{(2)}\,T_4\,T_2'\,P_1,$$

где

$$B_4^{(0)}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}h_0+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6+h_7+h_8\\ -3h_0+3h_2-3h_3+3h_5-3h_6+3h_8\\ -3h_0+3h_1-3h_3+3h_4-3h_6+3h_7\\ 2h_0-h_1-h_2+2h_3-h_4-h_5+2h_6-h_7-h_8\end{bmatrix},$$

$$B_7^{(0)}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}-h_0+h_6\\ -h_0+h_1+h_6-h_7\\ h_0+h_5-h_6-h_8\\ h_4-h_5-h_7+h_8\\ h_0+h_5-h_6-h_8\\ h_1-h_2-h_7+h_8\\ h_0-h_1-h_6+h_7\end{bmatrix},\quad B_7^{(1)}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}-h_0+h_3\\ -h_0+h_1+h_3-h_4\\ h_0+h_2-h_3-h_8\\ h_1-h_2-h_7+h_8\\ h_0+h_2-h_3-h_8\\ h_1-h_2-h_4+h_5\\ h_0-h_1-h_3+h_4\end{bmatrix},$$

$$B_7^{(2)}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}2h_0-h_3-h_6\\ 2h_0-2h_1-h_3+h_4-h_6+h_7\\ -2h_0-h_2+h_3-h_5+h_6+2h_8\\ -h_1+h_2-h_4+h_5+2h_7-2h_8\\ -2h_0-h_2+h_3-h_5+h_6+2h_8\\ -2h_1+2h_2+h_4-h_5+h_7-h_8\\ -2h_0+2h_1+h_3-h_4+h_6-h_7\end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные разложения в (24), получаем

$$
\begin{aligned}
H_9 = {} & (D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_3\big)\big(D_3 \oplus (I_3 \otimes T_2)\big)\big(I_1 \oplus T_1 \oplus (I_3 \otimes T_3)\big)\times \\
& \times \big(\tfrac{1}{9}\, B_4^{(0)} \oplus B_7^{(0)} \oplus B_7^{(1)} \oplus \tfrac{1}{3} B_7^{(2)}\big)\big(I_1 \oplus T_1' \oplus (I_3 \otimes T_4)\big)\big(D_3 \oplus (I_3 \otimes T_2')\big)\times \\
& \times (I_1 \oplus P_1 \oplus I_9)\big((I_1 \oplus T_1') \otimes I_3\big)(D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_3\big).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Обозначим

$$
\operatorname{diag} G := \big(\tfrac{1}{9}\, B_4^{(0)} \oplus B_7^{(0)} \oplus B_7^{(1)} \oplus \tfrac{1}{3} B_7^{(2)}\big),
\tag{26}
$$

где

$$
G = \frac{1}{9}\, \operatorname{diag}
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 \\
-3 & 3 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\
2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
-2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\
-2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{bmatrix}.
\tag{27}
$$

Объединяя (25), (26), (27), приходим к разложению

$$
\begin{aligned}
H_9 = {} & (D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus T_1) \otimes I_3\big)\big(D_3 \oplus (I_3 \otimes T_2)\big) \times \\
& \times \big(I_1 \oplus T_1 \oplus (I_3 \otimes T_3)\big) \operatorname{diag} G \big(I_1 \oplus T_1^{'} \oplus (I_3 \otimes T_4)\big)\big(D_3 \oplus (I_3 \otimes T_2^{'})\big) \times \\
& \times\ (I_1 \oplus P_1 \oplus I_9)\big((I_1 \oplus T_1^{'}) \otimes I_3\big)(D_3 \otimes I_3)\big((I_1 \oplus P_1) \otimes I_3\big).
\end{aligned}
$$

□

З а м е ч а н и е 11. Из последнего равенства следует, что вычисление девятиточечной свертки требует 68 сложений и 25 умножений, т.е. 93 операции.

З а м е ч а н и е 12. Факторизация, приведенная в книге [3], также требует 93 операции.

З а м е ч а н и е 13. Не исключено, что факторизации правоциркулянтных матриц порядков 8 и 9 могут быть улучшены в смысле уменьшения количества операций. Возможно, этого можно достичь путем получения разложений матриц Теплица более высоких порядков, чем приведены в работе.

Выводы

Объединим результаты дипломной работы и работы [4]. Сравним их с разложениями, приведенными в `Приложении A` работы [1] и книге [3].

Факторизуемая матрица	**Количество операций по полученным разложениям**	**Количество операций по разложениям, приведенным в [1] и [3]**
H_2	6 операций	6 операций
TZ_2	6 операций	—
H_3	15 операций	15 операций
TZ_3	15 операций	—
H_4	20 операций	20 операций
H_5	41 операция	41 операция
H_6	42 операции	52 операции
H_7	79 операций	86 операций
H_8	60 операций	60 операций
H_9	93 операции	93 операции

ЛИТЕРАТУРА

1. Агарвал Р. К., Кули Дж. У. *Новые алгоритмы для цифровой свертки.* В кн.: Макклелан Дж. Х., Рейдер Ч. М. *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов.* М.: Радио и связь, 1983. С 91-117.

2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов.* М.: Мир, 1979.

3. Блейхут Р. *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.* М.: Мир, 1989.

4. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Быстрое вычисление циклических сверток малых порядков* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 18 октября 2005 г.