РЯДЫ ФУРЬЕ И ДПФ*

В. Н. Малозёмов
malv@gamma.math.spbu.ru

7 декабря 2004 г.

Рассмотрим непрерывную 1-периодическую функцию $f(x)$. Предположим, что она разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \exp(2\pi i\, p\, x)\,. \tag{1}$$

Здесь

$$a_p = \int_0^1 f(x) \exp(-2\pi i\, p\, x)\, dx\,. \tag{2}$$

Будем считать, что

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |a_p| < \infty\,. \tag{3}$$

На отрезке $[0,1]$ введём сетку $x_j = j/N$, $j \in 0 : N-1$. В узлах x_j имеем

$$f_j := f(x_j) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p\, \omega_N^{pj}\,, \qquad \omega_N = \exp(2\pi i/N)\,.$$

Представив p в виде $p = s\,N + k$, $k \in 0 : N-1$, $s \in \mathbb{Z}$, преобразуем последнюю формулу:

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k+sN}\, \omega_N^{(k+sN)j} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k+sN}\,.$$

Обозначим

$$A_k^{(N)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k+sN}\,. \tag{4}$$

Тогда

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} A_k^{(N)}\, \omega_N^{kj}\,, \qquad j \in 0 : N-1\,. \tag{5}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Из (5) следует, что

$$A_k^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\,\omega_N^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\exp(-2\pi i\,k\,x_j)\,. \tag{6}$$

Правая часть (6) является квадратурной суммой для интеграла из правой части (2) при $p=k$. Значит, $A_k^{(N)} \to a_k$ при $N\to\infty$ и всех $k\in\mathbb{Z}$. Приближённое равенство $A_k^{(N)} \approx a_k$ тем более точно, чем более гладкой будет функция $f(x)$. Этот факт находится в полном согласии с формулами (4) и (3).

Введём индексное множество $I_N = \{k\in\mathbb{Z} \mid -N/2 < k \leqslant N/2\}$. Очевидно, что $I_N = -n+1:n$ при $N=2n$ и $I_N = -n+1:n-1$ при $N=2n-1$. В обоих случаях $|I_N| = N$. Поскольку последовательность $\{A_k^{(N)}\}$ N-периодична, то равенство (5) можно переписать в виде

$$f(x_j) = \sum_{k\in I_N} A_k^{(N)}\,\exp(2\pi i\,k\,x_j)\,, \tag{7}$$

где в силу (6)

$$A_k^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\,\omega_N^{-kj}\,.$$

Рассмотрим тригонометрический полином

$$T_N(x) = \sum_{k\in I_N} A_k^{(N)}\,\exp(2\pi i\,k\,x)\,.$$

Согласно (7), $T_N(x_j) = f(x_j)$, т. е. $T_N(x)$ интерполирует $f(x)$ в узлах x_j. Анализ приближённой формулы

$$f(x)\approx T_N(x)\,,\qquad x\in[0,1]\,, \tag{8}$$

связан с разложением (1). Поскольку

$$\max_{x\in[0,1]}\bigl|f(x)-T_N(x)\bigr| \leqslant \sum_{k\in I_N}\bigl|A_k^{(N)}-a_k\bigr| + \sum_{k\notin I_N}|a_k|\,,$$

то точность формулы (8) зависит от того, насколько точны соотношения $A_k^{(N)}\approx a_k$ при $k\in I_N$ и $a_k\approx 0$ при $k\notin I_N$.

При выборе N нужно учитывать скорость изменения функции $f(x)$. Вычисление коэффициентов $A_k^{(N)}$ основано на использовании быстрого преобразования Фурье.

Доклад является вариацией на тему из [1, с. 166–170].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы.* М.: Наука, 1987. 600 с.