ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД СТРОГОГО h-ОТДЕЛЕНИЯ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

Е. К. Чернэуцану
katerinache@yandex.ru

15 октября 2011 г.

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

Задачу строгого отделения выпуклой оболочки множества A от множества B с помощью h гиперплоскостей H_s, определяемых уравнениями

$$\langle w^s, x\rangle = \gamma_s, \quad s \in 1:h,$$

можно формализовать следующим образом [1, 2]:

$$\begin{aligned} F(G) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \max_{s\in 1:h}\bigl[\langle w^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1\bigr]_+ +& \\ + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \min_{s\in 1:h}\bigl[-\langle w^s, b_j\rangle + \gamma_s + 1\bigr]_+ \to \min_G,& \end{aligned} \tag{1}$$

где $[\alpha]_+ = \max\{0, \alpha\}$ и G — матрица размера $h \times (n+1)$ со строками

$$g^s = (w^s, \gamma_s), \quad s \in 1:h.$$

Ясно, что $F(G) \geqslant 0$ при всех G. Задача (1) сводится к конечному (но большому) числу задач линейного программирования [3]. Она имеет решение. Условие $F(G_*) = 0$ характеризует ситуацию строгого h – отделения.

В работе [1] был предложен численный метод решения задачи (1). В данном докладе мы продолжим изучение принципиальной схемы этого метода.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Обозначим $f(v,u)=\langle v,u\rangle+1$,

$$\hat a_i=\begin{pmatrix}a_i\\-1\end{pmatrix},\quad \check b_j=\begin{pmatrix}-b_j\\1\end{pmatrix}$$

и перепишем задачу (1) в компактном виде

$$F(G):=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(G)+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\psi_j(G)\to\min_G, \tag{2}$$

где

$$\varphi_i(G)=\max_{s\in 1:h}\bigl[f(g^s,\hat a_i)\bigr]_+,\quad \psi_j(G)=\min_{s\in 1:h}\bigl[f(g^s,\check b_j)\bigr]_+.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ будем рассматривать равномерную норму векторов,

$$\|v\|=\max_{\alpha\in 1:n+1}|v(\alpha)|,$$

и согласованную с ней норму матриц G,

$$\|G\|=\max_{s\in 1:h}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\bigl|g^s(\alpha)\bigr|.$$

Очевидно, что для любой строки g^s матрицы G и любого вектора $v\in\mathbb{R}^{n+1}$ выполняется неравенство

$$\bigl|\langle g^s,v\rangle\bigr|\leqslant\|G\|\cdot\|v\|,\quad s\in 1:h. \tag{3}$$

Возьмём два параметра точности $\varepsilon_A>0$ и $\varepsilon_B>0$. С каждой матрицей G свяжем индексные множества

$$I=\bigl\{i\in 1:m \mid \max_{s\in 1:h} f(g^s,\hat a_i)>-\varepsilon_A\bigr\},$$
$$J=\bigl\{j\in 1:k \mid \min_{s\in 1:h} f(g^s,\check b_j)>-\varepsilon_B\bigr\}.$$

Введём функцию

$$P(G)=\frac{1}{m}\sum_{i\in I}\varphi_i(G)+\frac{1}{k}\sum_{j\in J}\psi_j(G).$$

Положим

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon_A/C_A,\varepsilon_B/C_B\},$$

где

$$C_A=\max_{i\in 1:m}\|\hat a_i\|,\quad C_B=\max_{j\in 1:k}\|\check b_j\|.$$

ЛЕММА 1. *Для любой матрицы G выполняется равенство*

$$F(G+V) = P(G+V) \tag{4}$$

при условии, что $\|V\| \leqslant \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно проверить, что при указанных V

$$\varphi_i(G+V) = 0, \text{ если } i \notin I; \quad \psi_j(G+V) = 0, \text{ если } j \notin J. \tag{5}$$

По определению функции f имеем

$$f(g^s + v^s, \hat{a}_i) = f(g^s, \hat{a}_i) + \langle v^s, \hat{a}_i \rangle.$$

Далее (см. Приложение, свойство V)

$$\varphi_i(G+V) = \Big[\max_{s \in 1:h} \big(f(g^s, \hat{a}_i) + \langle v^s, \hat{a}_i \rangle\big)\Big]_+. \tag{6}$$

По определению множества I при $i \notin I$ и $s \in 1:h$ выполняется неравенство

$$f(g^s, \hat{a}_i) \leqslant -\varepsilon_A,$$

поэтому согласно (3) при всех $s \in 1:h$

$$f(g^s, \hat{a}_i) + \langle v^s, \hat{a}_i \rangle \leqslant -\varepsilon_A + \|V\| C_A \leqslant 0.$$

На основании (6) и определния плюсиковой функции получаем первое равенство из (5).

Аналогично (см. Приложение, свойство VI)

$$\psi_j(G+V) = \Big[\min_{s \in 1:h} \big(f(g^s, \check{b}_j) + \langle v^s, \check{b}_j \rangle\big)\Big]_+. \tag{7}$$

При $j \notin J$ существует индекс $s \in 1:h$, на котором

$$f(g^s, \check{b}_j) \leqslant -\varepsilon_B.$$

На том же индексе s имеем

$$f(g^s, \check{b}_j) + \langle v^s, \check{b}_j \rangle \leqslant -\varepsilon_B + \|V\| C_B \leqslant 0.$$

Отсюда и из (7) следует второе равенство из (5).

Лемма доказана. □

Отметим, что в формулировке леммы 1 окрестность $\|V\| \leqslant \varepsilon$ одинакова для всех матриц G.

3°. Обозначим
$$l_j = \min_{s\in 1:h} f(g^s, \check{b}_j).$$
С матрицей G свяжем также индексные множества
$$L_j = \big\{ s \in 1:h \mid f(g^s, \check{b}_j) = l_j \big\}, \quad j \in J.$$
Введём функцию
$$Q(G) = \frac{1}{m}\sum_{i\in I} \varphi_i(G) + \frac{1}{k}\sum_{j\in J} \min_{s\in L_j} \big[f(g^s, \check{b}_j) \big]_+ .$$

ЛЕММА 2. *Для каждой матрицы G найдётся число $\varepsilon_G \in (0, \varepsilon]$, такое, что*
$$P(G+V) = Q(G+V) \tag{8}$$
при условии, что $\|V\| \leqslant \varepsilon_G$.

Доказательство. Достаточно проверить, что при $j \in J$ и малых $\|V\|$
$$\min_{s\in L_j} f(g^s + v^s, \check{b}_j) = \min_{s\in 1:h} f(g^s + v^s, \check{b}_j) \tag{9}$$

Пусть
$$\min_{s\notin L_j} f(g^s, \check{b}_j) = l_j + \Delta_j, \quad j \in J,$$
где $\Delta_j > 0$. Положим
$$\varepsilon_G = \min\big\{ \varepsilon,\ \min_{j\in J} \tfrac{\Delta_j}{3C_B} \big\}.$$
При $\|V\| \leqslant \varepsilon_G$ и $s \notin L_j$ имеем
$$f(g^s + v^s, \check{b}_j) = f(g^s, \check{b}_j) + \langle v^s, \check{b}_j \rangle \geqslant l_j + \Delta_j - \|V\| C_B \geqslant l_j + \tfrac{2}{3}\Delta_j. \tag{10}$$
В то же время при тех же V и $s \in L_j$
$$f(g^s + v^s, \check{b}_j) = l_j + \langle v^s, \check{b}_j \rangle \leqslant l_j + \tfrac{1}{3}\Delta_j. \tag{11}$$
На основании (10) и (11) заключаем, что при $\|V\| \leqslant \varepsilon_G$ выполняется равенство (9).

Лемма доказана. □

4°. Зафиксируем матрицу G_0, константу $K > \varepsilon$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$Q(G_0+V) := \frac{1}{m}\sum_{i\in I_0}\varphi_i(G_0+V) + \frac{1}{k}\sum_{j\in J_0}\min_{s\in L_j^0}\bigl[f(g_0^s+v^s,\check{b}_j)\bigr]_+ \to \min_{V\in\Omega}. \qquad (12)$$

Множество планов Ω определим так:

$$\bigl|v^s(\alpha)\bigr| \leqslant K, \quad \alpha \in 1:n+1,\ s\in 1:h.$$

В частности, матрица V, у которой $\|V\| \leqslant K$, является планом задачи (12). Действительно,

$$\|v^s(\alpha)\| \leqslant \sum_{p=1}^{n+1}\bigl|v^s(p)\bigr| \leqslant \max_{s\in 1:h}\sum_{p=1}^{n+1}\bigl|v^s(p)\bigr| = \|V\| \leqslant K.$$

Обозначим через Q_0 минимальное значение целевой функции в задаче (12). Согласно (4) и (8)

$$Q_0 \leqslant Q(G_0) = P(G_0) = F(G_0). \qquad (13)$$

ТЕОРЕМА. *При выполнении условия*

$$Q_0 = F(G_0) \qquad (14)$$

матрица G_0 *является точкой локального минимума функции* $F(G)$ *вида* (2).

Доказательство. На основании лемм 1 и 2, условия $\varepsilon < K$ и равенства (14) при $\|V\| \leqslant \varepsilon_{G_0}$ имеем

$$F(G_0+V) = P(G_0+V) = Q(G_0+V) \geqslant Q_0 = F(G_0).$$

Это и означает, что G_0 — точка локального минимума функции $F(G)$. □

5°. Если матрица G_0 не является точкой локального минимума функции $F(G)$, то согласно (13) выполняется неравенство $F(G_0) > Q_0$. На самом деле, мы ориентируемся на приближённые вычисления, поэтому будем считать, что

$$F(G_0) - Q_0 > \sigma,$$

где σ — наперёд заданный положительный параметр точности. Последнее неравенство перепишем в виде

$$Q_0 < F(G_0) - \sigma. \qquad (15)$$

Матрице G_0 сопоставим совокупность индексных множеств $S = \{s_j\}_{j\in J_0}$, где $s_j \in L_j^0$. Эту совокупность обозначим Π_0. Величина Q_0 допускает представление (см. [1, 3])

$$Q_0 = \min_{S\in\Pi_0} \min_{V\in\Omega} \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i\in I_0} \varphi_i(G_0+V) + \frac{1}{k} \sum_{j\in J_0} \big[f(g_0^{s_j} + v^{s_j}, \check{b}_j) \big]_+ \Big\}. \tag{16}$$

На основании (15) и (16) можно утверждать, что существует индексное множество $\hat{S} = \{\hat{s}_j\}_{j\in J_0}$ из Π_0, такое, что

$$\min_{V\in\Omega} \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i\in I_0} \varphi_i(G_0+V) + \frac{1}{k} \sum_{j\in J_0} \big[f(g_0^{\hat{s}_j} + v^{\hat{s}_j}, \check{b}_j) \big]_+ \Big\} < F(G_0) - \sigma. \tag{17}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\hat{Q}(G_0+V) := \frac{1}{m} \sum_{i\in I_0} \varphi_i(G_0+V) + \frac{1}{k} \sum_{j\in J_0} \big[f(g_0^{\hat{s}_j} + v^{\hat{s}_j}, \check{b}_j) \big]_+ \to \min_{V\in\Omega}. \tag{18}$$

Важным моментом является то, что в силу определения множеств L_j справедливы равенства

$$\hat{Q}(G_0) = Q(G_0) = P(G_0) = F(G_0). \tag{19}$$

Задача (18) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\frac{1}{m} \sum_{i\in I_0} \xi_i + \frac{1}{k} \sum_{j\in J_0} \eta_j \to \min, \tag{20}$$
$$\begin{gathered} \xi_i - \langle v^s, \hat{a}_i \rangle \geqslant f(g_0^s, \hat{a}_i), \quad i \in I_0,\ s \in 1:h; \\ \eta_j - \langle v^{\hat{s}_j}, \check{b}_j \rangle \geqslant f(g_0^{\hat{s}_j}, \check{b}_j), \quad j \in J_0; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i \in I_0; \quad \eta_j \geqslant 0, \quad j \in J_0; \\ -K \leqslant v^s(\alpha) \leqslant K, \quad \alpha \in 1:n+1,\ s \in 1:h. \end{gathered}$$

Задача (20) имеет решение, поскольку множество её планов непусто и целевая функция ограничена снизу нулём. По эквивалентности задача (18) также имеет решение. Обозначим его $\hat{V}$. Положим $\hat{G} = G_0 + \hat{V}$. Согласно (17), $\hat{Q}(\hat{G}) < F(G_0) - \sigma$. С учётом (19) получаем

$$\hat{Q}(\hat{G}) - \hat{Q}(G_0) < -\sigma. \tag{21}$$

Матрицу $\hat{V}$ мы воспринимаем как направление спуска. Разберёмся с шагом спуска. Положим

$$\hat{t} = \begin{cases} 1, & \text{если } \|\hat{V}\| \leqslant \varepsilon, \\ \varepsilon / \|\hat{V}\|, & \text{если } \|\hat{V}\| > \varepsilon, \end{cases}$$

и введём матрицу $G_1 = G_0 + \hat{t}\,\hat{V}$. Очевидно, что $\hat{t} \in (0, 1]$. Более того,

$$\hat{t} \geqslant \frac{\varepsilon}{(n+1)K}. \tag{22}$$

Действительно, при $\|\hat{V}\| \leqslant \varepsilon$ неравенство (22) очевидно (поскольку $\varepsilon < K$). Пусть $\|\hat{V}\| > \varepsilon$. По условию, $\hat{V} \in \Omega$, поэтому

$$\|\hat{V}\| = \max_{s \in 1:h} \sum_{\alpha=1}^{n+1} \bigl|v^s(\alpha)\bigr| \leqslant (n+1)K.$$

Отсюда и из определения $\hat{t}$ следует (22).

Имеем $\|\hat{t}\,\hat{V}\| \leqslant \varepsilon$. По лемме 1

$$F(G_1) = P(G_1). \tag{23}$$

Далее

$$P(G_1) = Q(G_1) \leqslant \hat{Q}(G_1) = \hat{Q}\bigl(G_0 + \hat{t}(\hat{G} - G_0)\bigr). \tag{24}$$

Покажем, что

$$\hat{Q}\bigl(G_0 + \hat{t}(\hat{G} - G_0)\bigr) \leqslant \hat{Q}(G_0) + \hat{t}\bigl[\hat{Q}(\hat{G}) - \hat{Q}(G_0)\bigr]. \tag{25}$$

Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} f\bigl(g_0^s + \hat{t}(\hat{g}^s - g_0^s), u\bigr) &= f\bigl(\hat{t}\,\hat{g}^s + (1-\hat{t}\,)g_0^s, u\bigr) = \\ &= \hat{t}\, f(\hat{g}^s, u) + (1-\hat{t}\,) f(g_0^s, u), \end{aligned}$$

из которых следует, что (см. Приложение, свойства I и II)

$$\Bigl[f\bigl(g_0^s + \hat{t}(\hat{g}^s - g_0^s), u\bigr)\Bigr]_+ \leqslant \hat{t}\bigl[f(\hat{g}^s, u)\bigr]_+ + (1-\hat{t}\,)\bigl[f(g_0^s, u)\bigr]_+. \tag{26}$$

Подставив в (26) $\hat{a}_i$ и $\check{b}_j$ вместо u и применив операции взятия максимума и суммирования, придём к неравенству

$$\hat{Q}\bigl(G_0 + \hat{t}(\hat{G} - G_0)\bigr) \leqslant \hat{t}\,\hat{Q}(\hat{G}) + (1-\hat{t}\,)\hat{Q}(G_0),$$

равносильному (25). По существу, установлена выпуклость функции $\hat{Q}(G)$ вида

$$\hat{Q}(G) = \frac{1}{m} \sum_{i \in I_0} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j \in J_0} \bigl[f(g^{\hat{s}_j}, \check{b}_j)\bigr]_+.$$

На основании (23), (24), (25), (19), (21) и (22) получаем

$$F(G_1) = P(G_1) \leqslant \hat{Q}(G_0) + \hat{t}\big[\hat{Q}(\hat{G}) - \hat{Q}(G_0)\big] \leqslant \\ \leqslant F(G_0) - \hat{t}\sigma \leqslant F(G_0) - \frac{\varepsilon\sigma}{(n+1)K}.$$

Значит,

$$F(G_0) - F(G_1) \geqslant \frac{\varepsilon\sigma}{(n+1)K}. \tag{27}$$

Отметим, что неравенство (27) сохранится, если вместо $\hat{t}$ взять точку минимума функции $F(G_0 + t\hat{V})$ на отрезке $[0, 1]$.

К матрице G_1 можно применить те же рассуждения, что и к матрице G_0. Ввести индексные множества I_1, J_1, L_j^1, функцию $Q(G_1 + V)$ с минимальным на Ω значением Q_1. Если

$$F(G_1) - Q_1 \leqslant \sigma,$$

то G_1 — почти локально оптимальная матрица. Вычисления прекращаются. В противном случае с помощью функции $\hat{Q}(G_1 + V)$ строим новую матрицу G_2, такую, что

$$F(G_1) - F(G_2) \geqslant \frac{\varepsilon\sigma}{(n+1)K}.$$

Далее процесс повторяется. Строится последовательность матриц $\{G_k\}$, для которой

$$F(G_k) - F(G_{k+1}) \geqslant \frac{\varepsilon\sigma}{(n+1)K}.$$

В силу неотрицательности $F(G)$ описанный процесс конечен. Через конечное число шагов получим почти локально оптимальную матрицу G_*.

6°. Вкратце опишем ещё одну схему минимизации функции $F(G)$, использующую производную по направлению.

Обозначим

$$\hat{\varphi}_i(G) = \max_{s \in 1:h} f(g^s, \hat{a}_i),$$

так что

$$\varphi_i(G) = \big[\hat{\varphi}_i(G)\big]_+.$$

Положим далее

$$\hat{R}_i(G) = \big\{s \in 1:h \mid f(g^s, \hat{a}_i) = \hat{\varphi}_i(G)\big\}.$$

Производная функции $\varphi_i(G)$ по направлению V имеет вид [4, с. 71]

$$\varphi_i'(G,V) := \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(G+tV)-\varphi_i(G)}{t} =$$
$$= \begin{cases} \max_{s\in\hat{R}_i(G)} \langle v^s, \hat{a}_i\rangle, & \text{если } \hat{\varphi}_i(G) > 0; \\ \max_{s\in\hat{R}_i(G)} \big[\langle v^s, \hat{a}_i\rangle\big]_+, & \text{если } \hat{\varphi}_i(G) = 0; \\ 0, & \text{если } \hat{\varphi}_i(G) < 0. \end{cases}$$

Поясним случай $\hat{\varphi}_i(G) = 0$. При малых $t > 0$ имеем

$$\max_{s\in 1:h} f(g^s + tv^s, \hat{a}_i) = \max_{s\in\hat{R}_i(G)} f(g^s + tv^s, \hat{a}_i),$$

поэтому

$$\frac{\varphi_i(G+tV)-\varphi_i(G)}{t} = \max_{s\in 1:h} \frac{\big[f(g^s+tv^s,\hat{a}_i)\big]_+}{t} =$$
$$= \max_{s\in\hat{R}_i(G)} \left[\frac{f(g^s+tv^s,\hat{a}_i)}{t}\right]_+ = \max_{s\in\hat{R}_i(G)} \left[\frac{f(g^s+tv^s,\hat{a}_i)-f(g^s,\hat{a}_i)}{t}\right]_+ =$$
$$= \max_{s\in\hat{R}_i(G)} \big[\langle v^s, \hat{a}_i\rangle\big]_+.$$

Мы воспользовались тем, что $f(g^s, \hat{a}_i) = 0$ при всех $s \in \hat{R}_i(G)$. Формула для производной по направлению получается даже без предельного перехода по $t \to +0$.

Аналогично выводится формула для производной по направлению функций $\psi_j(G)$. Обозначим

$$\check{\psi}_j(G) = \min_{s\in 1:h} f(g^s, \check{b}_j),$$

так что

$$\psi_j(G) = \big[\check{\psi}_j(G)\big]_+.$$

Положим далее

$$\check{R}_j(G) = \big\{ s \in 1:h \mid f(g^s, \check{b}_j) = \check{\psi}_j(G) \big\}.$$

Производная функции $\psi_j(G)$ по направлению V имеет вид

$$\psi_j'(G,V) = \begin{cases} \min_{s\in\check{R}_j(G)} \langle v^s, \check{b}_j\rangle, & \text{если } \check{\psi}_j(G) > 0; \\ \min_{s\in\check{R}_j(G)} \big[\langle v^s, \check{b}_j\rangle\big]_+, & \text{если } \check{\psi}_j(G) = 0; \\ 0, & \text{если } \check{\psi}_j(G) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что для производной основной функции $F(G)$ по направлению V справедлива формула

$$F'(G,V) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i'(G,V) + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\psi_j'(G,V).$$

Отметим, что $F'(G,tV) = tF'(G,V)$ при всех $t > 0$.

7°. Возьмём начальное приближение G_0 и решим вспомогательную задачу

$$F'(G_0,V) \to \min_{V\in\Omega}. \tag{28}$$

Множество планов Ω определяется так же, как в п. 4°. Задача (28) сводится к конечному числу задач линейного программирования. Она имеет решение. Обозначим его V_0. Если

$$F'(G_0,V_0) \geqslant 0,$$

то G_0 — точка локального минимума функции $F(G)$. В противном случае матрица V_0 является направлением убывания функции $F(G)$ из точки G_0. Находим точку минимума t_0 функции $F(G_0+tV_0)$ на отрезке $[0,1]$ и полагаем $G_1 = G_0 + t_0V_0$. Далее процесс повторяется.

За конечное число шагов получим почти локально оптимальную матрицу G_*.

8°. Функция $F(G)$ вида (2) является липшицевой. Действительно, на основании свойств плюсиковых функций (см. Приложение, свойства VIII, X) и (3) имеем

$$\begin{aligned}\bigl|F(G+V) - F(G)\bigr| &\leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\max_{s\in 1:h}\bigl|\langle v^s,\hat{a}_i\rangle\bigr| + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\max_{s\in 1:h}\bigl|\langle v^s,\check{b}_j\rangle\bigr| \leqslant \\ &\leqslant \|G\|(C_A + C_B).\end{aligned}$$

Положив $C = C_A + C_B$, получим

$$\bigl|F(G+V) - F(G)\bigr| \leqslant C\|V\|.$$

Для минимизации липшицевой функции можно использовать методы глобальной оптимизации [5].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свойства плюсиковой функции $[x]_+ = \max\{0, x\}$

Справедливы следующие соотношения:

(I) $x \leqslant [x]_+ \leqslant |x|$;

(II) $[tx]_+ = t[x]_+$ при $t \geqslant 0$;

(III) $[x+y]_+ \leqslant [x]_+ + [y]_+$;

(IV) $\big|[x]_+ - [y]_+\big| \leqslant |x-y|$;

(V) $\max_{s\in 1:h}[x_s]_+ = [\max_{s\in 1:h} x_s]_+$;

(VI) $\min_{s\in 1:h}[x_s]_+ = [\min_{s\in 1:h} x_s]_+$;

(VII) $\max_{s\in 1:h}[x_s+y_s]_+ \leqslant \max_{s\in 1:h}[x_s]_+ + \max_{s\in 1:h}[y_s]_+$;

(VIII) $\big|\max_{s\in 1:h}[x_s]_+ - \max_{s\in 1:h}[y_s]_+\big| \leqslant \max_{s\in 1:h}|x_s - y_s|$;

(IX) $\min_{s\in 1:h}[x_s]_+ \leqslant \min_{s\in 1:h}[y_s]_+ + \max_{s\in 1:h}|x_s - y_s|$;

(X) $\big|\min_{s\in 1:h}[x_s]_+ - \min_{s\in 1:h}[y_s]_+\big| \leqslant \max_{s\in 1:h}|x_s - y_s|$.

Докажем некоторые из них.

Свойство III. Согласно I имеем $x+y \leqslant [x]_+ + [y]_+$. Вместе с тем, $0 \leqslant [x]_+ + [y]_+$. Поэтому

$$[x+y]_+ = \max\{0, x+y\} \leqslant [x]_+ + [y]_+.$$

Свойство IV. Имеем $x = y + (x-y) \leqslant [y]_+ + |x-y|$, так что $[x]_+ \leqslant [y]_+ + |x-y|$. Аналогично $[y]_+ \leqslant [x]_+ + |y-x|$. Из двух последних неравенств следует требуемое.

Свойство V. Если $\max_{s\in 1:h} x_s \leqslant 0$, то утверждение очевидно $(0=0)$. В противном случае и правая, и левая части доказываемого соотношения равны $\max_{s\in 1:h} x_s$.

Свойство VI. Если $\min_{s\in 1:h} x_s \geqslant 0$, то обе части доказываемого соотношения равны $\min_{s\in 1:h} x_s$. В противном случае утверждение очевидно $(0=0)$.

Свойство IX. В случае $\min_{s\in 1:h} x_s \leqslant 0$ утверждение в силу свойства VI очевидно. Пусть все x_s положительны. Тогда

$$[x_s]_+ = x_s = y_s + (x_s - y_s) \leqslant [y_s]_+ + \max_{s\in 1:h}|x_s - y_s|.$$

Отсюда следует, что

$$\min_{s\in 1:h}[x_s]_+ \leqslant [y_s]_+ + \max_{s\in 1:h}|x_s - y_s|$$

и

$$[y_s]_+ \geqslant \min_{s\in 1:h}[x_s]_+ - \max_{s\in 1:h}|x_s - y_s|.$$

Взяв в левой части минимум по $s \in 1 : h$, придём к неравенству, которое равносильно требуемому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Astorino A., Gaudioso M. *Polyhedral separability througt successive LP* // JOTA. 2002. Vol. 112. No. 2. P. 265–293.

2. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. *Строгая h-отделимость двух множеств* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 декабря 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1218`)

3. Чернэуцану Е. К. *Строгая h-отделимость и линейное программирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 29 января 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0129`)

4. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972. 368 с.

5. Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. *Диагональные методы глобальной оптимизации.* М.: Физматлит, 2008. 352 с.