СТРОГАЯ h-ОТДЕЛИМОСТЬ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ*

Е. К. Чернэуцану

katerinache@yandex.ru

29 января 2011 г.

1°. Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

В работах [1, 2] рассматривалась задача о строгой отделимости множеств A и B с помощью h гиперплоскостей в случае, когда $\operatorname{conv}(A) \cap B = \varnothing$. Было установлено, что эта задача сводится к экстремальной задаче

$$F(G) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \psi_j(G) \to \inf, \tag{1}$$

где

$$\varphi_i(G) = \max_{s \in 1:h} \bigl[\langle w^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1\bigr]_+,$$
$$\psi_j(G) = \min_{s \in 1:h} \bigl[-\langle w^s, b_j\rangle + \gamma_s + 1\bigr]_+.$$

Неизвестной является $\bigl(h \times (n+1)\bigr)$-матрица G со строками $(w^s,\, \gamma_s)$, $s \in 1:h$.

Очевидно, что $F(G) \geqslant 0$ для всех G. Условие $F(G_*) = 0$ характеризует ситуацию строгого h-отделения.

В данном докладе мы покажем, что задача (1) *эквивалентна* конечному числу задач линейного программирования.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Обозначим $\Pi = \big\{ S = (s_1, \dots, s_k) \mid s_j \in 1:h,\ j \in 1:k \big\}$.

ЛЕММА. *Справедливо равенство*

$$\inf_G F(G) = \min_{S \in \Pi} \inf_G \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+ \Big\}. \tag{2}$$

Доказательство. Предварительно установим соотношение

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j(G) = \min_{S \in \Pi} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+. \tag{3}$$

Пусть $\psi_j(G) = \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+$ при $j \in 1:k$. Обозначим $S = (s_1, \dots, s_k)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j(G) = \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+ \geqslant \min_{S \in \Pi} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+. \tag{4}$$

С другой стороны, при $S \in \Pi$ имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+ \geqslant \sum_{j=1}^{k} \min_{s \in 1:h} \big[-\langle w^{s}, b_j \rangle + \gamma_{s} + 1 \big]_+ = \sum_{j=1}^{k} \psi_j(G). \tag{5}$$

Взяв в левой части неравенства (5) минимум по $S \in \Pi$, придём к неравенству, противоположному (4). Равенство (3) установлено.

Из (3) следует, что

$$F(G) = \min_{S \in \Pi} \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+ \Big\}$$

и

$$\inf_G F(G) = \inf_G \min_{S \in \Pi} \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j \rangle + \gamma_{s_j} + 1 \big]_+ \Big\}. \tag{6}$$

Осталось в правой части (6) поменять местами инфимум по G и минимум по $S \in \Pi$. Лемма доказана. $\square$

3°. Лемма показывает, что задача (1) эквивалентна конечному числу экстремальных задач вида

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\max_{s\in 1:h}\bigl[\langle w^s, a_i\rangle-\gamma_s+1\bigr]_+ +\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\bigl[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle+\gamma_{s_j}+1\bigr]_+ \to \inf_G, \tag{7}$$

соответствующих различным $S\in\Pi$. В свою очередь, задача (7) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{gathered}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_i+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}q_j\to\inf, \\ -\langle a_i, w^s\rangle+\gamma_s+p_i\geqslant 1,\quad i\in 1:m,\ s\in 1:h; \\ \langle b_j, w^{s_j}\rangle-\gamma_{s_j}+q_j\geqslant 1,\quad j\in 1:k; \\ p_i\geqslant 0,\quad i\in 1:m;\quad q_j\geqslant 0,\quad j\in 1:k.\end{gathered} \tag{8}$$

Приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА. *Задача* (1) *эквивалентна конечному числу задач линейного программирования вида* (8) *в том смысле, что решение задачи* (8) *при* $S\in\Pi$, *которому соответствует наименьшее значение целевой функции, является решением задачи* (1).

4°. Рассмотрим пример. Пусть на плоскости заданы множества A и B, состоящие соответсвенно из точек

$$a_1=(-2,0),\ a_2=(2,0),\ a_3=(0,2),\ a_4=(0,1);$$
$$b_1=(0,3),\ b_2=(3,0),\ b_3=(-3,0).$$

Очевидно, что $\operatorname{conv}(A)\cap B=\varnothing$ (см. рис. 1).

Решим задачу строгой 2-отделимости. В данном случае

$$n=2,\ m=4,\ k=3,\ h=2.$$

Выясним, как выглядит задача (8) при $S=(1,1,2)$. Выпишем вектор неизвестных

$$z=(w_1^1,\ w_2^1,\ \gamma_1,\ w_1^2,\ w_2^2,\ \gamma_2,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ q_1,\ q_2,\ q_3)$$

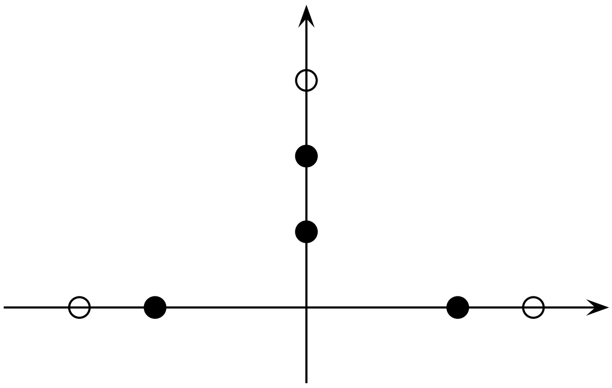

Рис. 1

и матрицу ограничений

$$
D = \begin{bmatrix}
2 & 0 & 1 & & & & 1 & & & & & & \\
-2 & 0 & 1 & & & & & 1 & & & & & \\
0 & -2 & 1 & & & & & & 1 & & & & \\
0 & -1 & 1 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & 2 & 0 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & -2 & 0 & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & 0 & -2 & 1 & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & -1 & 1 & & & & 1 & & & \\
0 & 3 & -1 & & & & & & & & 1 & & \\
3 & 0 & -1 & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & -3 & 0 & -1 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}.
$$

Задача (8) примет вид

$$
\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_j \to \inf, \tag{9}
$$
$$
Dz \geqslant e,
$$
$$
p_i \geqslant 0, \quad i \in 1:4; \qquad q_j \geqslant 0, \quad j \in 1:3.
$$

Решением данной задачи является вектор

$$
z = (111.2210,\ 112.0012,\ 272.9097,\ -78.1474,\ 27.3511,\ 192.1601,
$$
$$
0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000).
$$

Минимальное значение целевой функции равно нулю. Строгое 2-отделение множеств A и B при $S = (1,\ 1,\ 2)$ выглядит так, как показано на рис. 2.

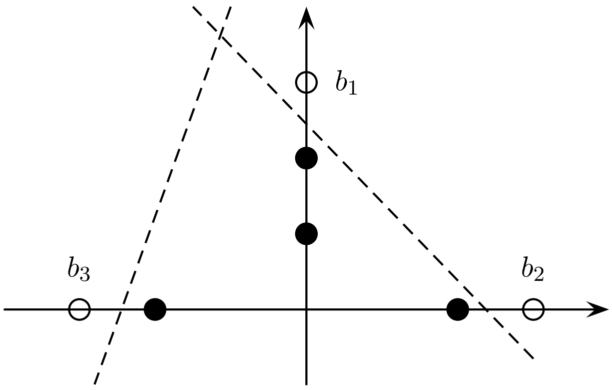

Рис. 2

Отметим, что задание вектора индексов $S = (1,\, 1,\, 2)$ соответствует разбиению множества B на два подмножества $\{b_1,\, b_2\} \cup \{b_3\}$. Эти два подмножества согласованно отделяются от множества A с помощью двух прямых

$$\langle w^1, x\rangle = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \langle w^2, x\rangle = \gamma_2.$$

Существуют ещё два разбиения множества B на два подмножества:

$$\{b_1,\, b_3\} \cup \{b_2\} \quad \text{и} \quad \{b_2,\, b_3\} \cup \{b_1\}.$$

Им соответствуют векторы $S = (1,\, 2,\, 1)$ и $S = (2,\, 1,\, 1)$.

Результат строгого 2-отделения при $S = (1,\, 2,\, 1)$ показан на рис. 3.

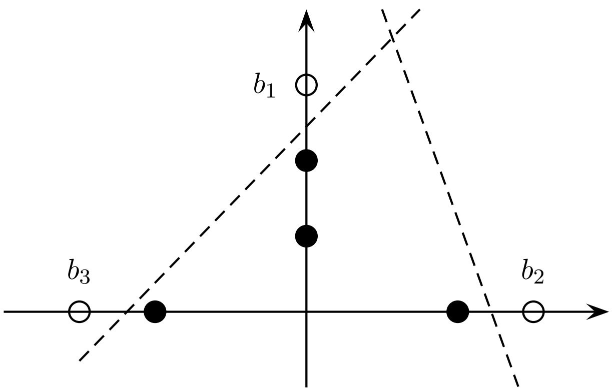

Рис. 3

Этот случай симметричен случаю $S = (1,\, 1,\, 2)$.

При $S = (2, 1, 1)$ строгой 2-отделимости нет (см. рис. 4).

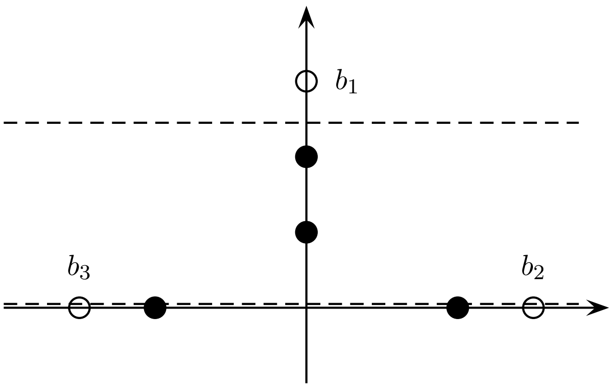

Рис. 4

Решением задачи, аналогичной (9), является вектор

$$z = (0.0000,\ -112.0230,\ -1.0000,\ 0.0000,\ 111.8673,\ 273.7824,\\ 2.0000,\ 2.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000).$$

Минимальное значение целевой функции равно единице.

5°. В общем случае задание вектора $S \in \Pi$ соответствует разбиению множества B, состоящего из k векторов, на h подмножеств. Число таких разбиений и определяет количество задач линейного программирования вида (8), к решению которых сводится решение задачи (1).

Если заранее известно, что множества A и B строго h-отделимы, то решение задачи (1) можно упростить. После разбиения множества B на h подмножеств следует *независимо* решать задачи линейного отделения каждого из этих подмножеств от множества A. В случае успешного отделения совокупность разделяющих гиперплоскостей образует решение задачи (1).

В рассмотренном выше примере при $S = (1, 1, 2)$ будем независимо решать задачи линейного отделения множеств $\{b_1, b_2\}$ и $\{b_3\}$ от A. Запишем соответствующие задачи линейного программирования (см. [3])

$$\begin{gathered}
\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} q_j \to \inf, \\
-\langle a_i, w^1\rangle + \gamma_1 + p_i \geqslant 1, \quad i \in 1:4; \\
\langle b_j, w^1\rangle - \gamma_1 + q_j \geqslant 1, \quad j \in 1:2; \\
p_i \geqslant 0, \quad i \in 1:4; \qquad q_j \geqslant 0, \quad j \in 1:2,
\end{gathered}$$

и

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i + q_3 \to \inf,$$
$$-\langle a_i, w^2\rangle + \gamma_2 + p_i \geqslant 1, \quad i \in 1:4;$$
$$\langle b_3, w^2\rangle - \gamma_2 + q_3 \geqslant 1;$$
$$p_i \geqslant 0, \quad i \in 1:4; \qquad q_3 \geqslant 0.$$

Их решения $\{w^1,\, \gamma_1\}$ и $\{w^2,\, \gamma_2\}$ определяют две прямые, строго отделяющие A от B (см. рис. 5).

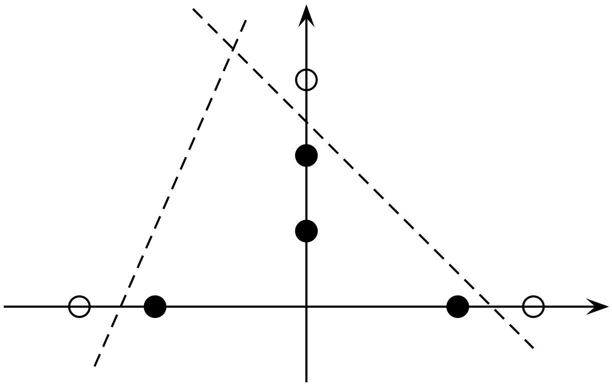

Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Astorino A., Gaudioso M. *Polyhedral separability througt successive LP* // JOTA. 2002. Vol. 112. No. 2. P. 265–293.

2. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. *Строгая h-отделимость двух множеств* // Семинар «DHA & CAGD». 18 декабря 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1218`)

3. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. *О математической диагностике (линейная модель)* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 17 апреля 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0417`)