ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 28 1992 Вып. 4

УДК 621.391.1:519.27

© 1992 г. М.Г. Бер, В.Н. Малоземов

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДАННЫХ[1]

Рассматривается задача восстановления дискретных периодических данных на мелкой сетке по известным значениям на крупной сетке. В качестве сглаживающего функционала берется сумма квадратов конечных разностей r-го порядка. Предложена явная схема решения этой задачи, основанная на использовании дискретного преобразования Фурье, и изучено поведение решения при $r \to \infty$.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $w(t)$ – гладкая комплекснозначная функция, заданная на вещественной оси, и T-периодическая. Возьмем натуральное число N вида $N = mn$, где m и n – также натуральные числа, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Обозначим $h = T/N$ и введем сетку $t_j = jh$.

Предположим, что нам известны значения w в узлах крупной сетки $\tau_k = t_{km} = k(mh)$. Обозначим их $y_k = w(\tau_k)$. Требуется восстановить значения w на всей сетке $\{t_j\}$.

Эту задачу можно формализовать следующим образом:

$$f(x) := \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x_j|^2 \to \inf, \tag{1}$$

$x_{km} = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $\{x_j\}$ – N-периодический сигнал.

Здесь r – фиксированное натуральное число,

$$\Delta^r x_j = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s} C_r^s x_{j+s}$$

– конечная разность r-го порядка.

В работе предложена явная схема решения задачи (1), основанная на использовании дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Изучено поведение решения при $r \to \infty$.

В идейном плане данная работа примыкает к работам [1, 2; см. также 3, с. 341–342], в которых исследовалось предельное поведение интерполяционных периодических сплайнов при стремлении их степени к бесконечности.

В [4] рассмотрена задача сглаживания дискретных периодических данных на основе ДПФ.

[1] Подробное изложение доклада, прочитанного на Международном симпозиуме по оптимальным алгоритмам (Варна, 28 мая – 2 июня 1989 г.).

§ 2. Явная схема решения задачи (1)

Сделаем замену переменных

$$X_s = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{sj},$$

где $\omega_N = \exp(-i2\pi N^{-1})$. По формуле обращения

$$x_j = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} X_s \omega_N^{-js}. \tag{2}$$

Имеем

$$\Delta^r x_j = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} X_s (\Delta^r \omega_N^{-js}) = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} X_s (\omega_N^{-s} - 1)^r \omega_N^{-js}.$$

Пользуясь равенством Парсеваля, получаем другое представление для целевой функции задачи (1):

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x_j|^2 = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} |\omega_N^{-s} - 1|^{2r} |X_s|^2.$$

Введем обозначение:

$$\kappa_s = |\omega_N^{-s} - 1|^2 = 2(1 - \cos(2\pi s N^{-1})).$$

Поскольку $\kappa_0 = 0$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x_j|^2 = N^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} \kappa_s^r |X_s|^2.$$

Обратимся к ограничениям задачи (1). Перепишем их в свернутом виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_{km} - y_k|^2 = 0. \tag{3}$$

Отметим, что, согласно (2),

$$x_{km} = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} X_s \omega_N^{-kms} = N^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} X_{p+qn} \omega_n^{-k(p+qn)} =$$

$$= N^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{q=0}^{m-1} X_{p+qn} \right) \omega_n^{-kp}.$$

Значит,

$$x_{km} - y_k = N^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{q=0}^{m-1} X_{p+qn} - mY_p \right) \omega_n^{-kp},$$

где $\{Y_p\}$ – спектр сигнала $\{y_k\}$. Согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_{km} - y_k|^2 = (mN)^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \left| \sum_{q=0}^{m-1} X_{p+qn} - mY_p \right|^2.$$

Теперь очевидно, что соотношение (3) эквивалентно системе равенств

$$\sum_{q=0}^{m-1} X_{p+qn} = mY_p, \; p = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Задача (1) в новых переменных принимает вид

$$N^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} \kappa_s^r \, |X_s|^2 \to \inf, \tag{4}$$

$$\sum_{q=0}^{m-1} X_{p+qn} = mY_p, \; p = 0, 1, \dots, n-1.$$

Существенно, что последняя задача распадается на n независимых подзадач, соответствующих разным $p = 0, 1, \dots, n-1$:

$$N^{-1} \sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^r \, |X_{p+qn}|^2 \to \inf, \tag{5}$$

$$\sum_{q=0}^{m-1} X_{p+qn} = mY_p.$$

При $p=0$ задача (5) имеет очевидное решение

$$\widetilde{X}_0 = mY_0, \; \widetilde{X}_n = \widetilde{X}_{2n} = \dots = \widetilde{X}_{(m-1)n} = 0, \tag{6}$$

поскольку $\kappa_0 = 0$. В дальнейшем считаем, что $p = 1, \dots, n-1$.

Согласно неравенству Коши – Буняковского,

$$m^2 |Y_p|^2 = \Big| \sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{-r/2} (\kappa_{p+qn}^{r/2} X_{p+qn}) \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{-r} \Big) \Big(\sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{r} |X_{p+qn}|^2 \Big).$$

Обозначив $\lambda_p = m\Big(\sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{-r} \Big)^{-1}$, получим

$$N^{-1} \sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^r |X_{p+qn}|^2 \geqslant n^{-1} \lambda_p |Y_p|^2.$$

Неравенство обращается в равенство только тогда, когда

$$\kappa_{p+qn}^{r/2} X_{p+qn} = \alpha \kappa_{p+qn}^{-r/2} \quad \text{или} \quad X_{p+qn} = \alpha \kappa_{p+qn}^{-r}, \; q = 0, 1, \dots, m-1,$$

при некотором комплексном α. Поскольку X_{p+qn} должны удовлетворять ограничению задачи (5), то необходимо $\alpha = \lambda_p Y_p$.

Таким образом, при p между 1 и $n-1$ единственным решением задачи (5) является последовательность

$$\widetilde{X}_{p+qn} = \kappa_{p+qn}^{-r} \lambda_p Y_p, \; q = 0, 1, \dots, m-1. \tag{7}$$

При этом минимальное значение целевой функции равно $n^{-1} \lambda_p |Y_p|^2$. Отметим, что λ_p есть среднее гармоническое чисел

$$\kappa_p^r, \; \kappa_{p+n}^r, \dots, \kappa_{p+(m-1)n}^r.$$

Найдено решение задачи (4). По формуле обращения восстанавливаем единственное решение задачи (1):

$$\widetilde{x}_j = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} \widetilde{X}_s \omega_N^{-js}.$$

Для ускорения вычислений преобразуем последнюю формулу. Согласно (6) и (7)

$$\tilde{x}_{l+km} = N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} \tilde{X}_s \omega_N^{-(l+km)s} = N^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \tilde{X}_{p+qn} \omega_N^{-(l+km)(p+qn)} =$$

$$= n^{-1} Y_0 + N^{-1} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{-r} \lambda_p Y_p \omega_N^{-lp-lqn-kpm} =$$

$$= n^{-1} Y_0 + n^{-1} \sum_{p=1}^{n-1} [\lambda_p Y_p \omega_N^{-lp} (m^{-1} \sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{-r} \omega_m^{-lq})] \omega_n^{-kp}.$$

Кроме того,

$$f(\tilde{x}) = N^{-1} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{r} |\tilde{X}_{p+qn}|^2 = n^{-1} \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p |Y_p|^2.$$

Опишем подробно схему решения задачи (1).

1) Формируем два массива констант, зависящих только от m, n и r. Двумерный массив

$$\rho_{lp} = \omega_N^{-lp}(m^{-1} \sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{-r} \omega_m^{-lq}), \; l = 1, \dots, m-1, \; p = 1, \dots, n-1,$$

и одномерный $\lambda_p = m(\sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{p+qn}^{-r})^{-1}$, $p = 1, \dots, n-1$.

2) Находим спектр $\{Y_p\}$ сигнала $\{y_k\}$.

3) Вычисляем $\tilde{Y}_p = \lambda_p Y_p$, $p = 1, \dots, n-1$, и вводим двумерный массив $\tilde{Z}$ со строками

$$\tilde{Z}_l = (Y_0, \rho_{l1} \tilde{Y}_1, \rho_{l2} \tilde{Y}_2, \dots, \rho_{l,n-1} \tilde{Y}_{n-1}), \; l = 1, \dots, m-1.$$

4) С помощью обратного ДПФ восстанавливаем решение задачи (1)

$$\tilde{x}_{l+km} = n^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \tilde{Z}_{lp} \omega_n^{-kp}, \; l = 1, \dots, m-1, \; k = 0, \dots, n-1.$$

Напомним, что $\tilde{x}_{km} = y_k$, $k = 0, \dots, n-1$.

При реализации этой схемы важную роль играют алгоритмы быстрого преобразования Фурье [5, 6].

§ 3. Поведение решения при $r \to \infty$

Введем единичный импульс

$$\delta_N(s) = \begin{cases} 1 \text{ при } s = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0 \text{ при остальных целых } s. \end{cases}$$

Обозначим $\langle s \rangle_n$ остаток от деления s на n. Тогда формулам (6), (7) можно придать следующий вид:

$$\tilde{X}_s = V_s^{(r)} Y_{\langle s \rangle_n}, \tag{8}$$

где

$$V_s^{(r)} = \begin{cases} m\delta_N(s), \text{ если } \langle s \rangle_n = 0, \\ \kappa_s^{-r} \lambda_{\langle s \rangle_n}, \text{ если } \langle s \rangle_n \neq 0. \end{cases}$$

Спектр (8) является единственным решением задачи (4).

Изучим свойства N-периодической по s последовательности $\{V_s^{(r)}\}$.

Л е м м а. *Справедливо равенство*

$$V_{N-s}^{(r)} = V_s^{(r)},\ s = 0, \ldots, N-1. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\langle s\rangle_n = 0$ равенство (9) тривиально. Пусть s не делится на n, т.е. $s = p + qn$, где $p = 1, \ldots, n-1$. Поскольку

$$N - (p + qn) = mn - p - qn + n - n = n - p + (m - q - 1)\,n,$$

то $\langle N - s\rangle_n = n - p$. Далее

$$\lambda_{\langle s\rangle_n} = \lambda_p = m\Big(\sum_{\mu=0}^{m-1} \kappa_{p+\mu n}^{-r}\Big)^{-1} = m\Big(\sum_{\mu=0}^{m-1} \kappa_{N-(p+\mu n)}^{-r}\Big)^{-1} =$$

$$= m\Big(\sum_{\mu=0}^{m-1} \kappa_{(n-p)+(m-\mu-1)n}^{-r}\Big)^{-1} = \lambda_{n-p} = \lambda_{\langle N-s\rangle_n}.$$

Теперь имеем

$$V_{N-s}^{(r)} = \kappa_{N-s}^{-r}\lambda_{\langle N-s\rangle_n} = \kappa_s^{-r}\lambda_{\langle s\rangle_n} = V_s^{(r)}.$$

Лемма доказана.

Введем последовательность

$$\widetilde{V}_s = \begin{cases} m \text{ при } s = 0, \ldots, [(n-1)/2], \\ 0 \text{ при } s = [n/2] + 1, \ldots, [N/2]. \end{cases}$$

Здесь, как обычно, $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α. Если n – четное число, то дополнительно положим $\widetilde{V}_{n/2} = m/2$. Продолжим $\{\widetilde{V}_s\}$ на индексы s, пробегающие значения от $[N/2] + 1$ до $N-1$ симметричным образом: $\widetilde{V}_s = \widetilde{V}_{N-s}$, после чего продолжим $\{\widetilde{V}_s\}$ N-периодически на все целые индексы.

Т е о р е м а 1. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} V_s^{(r)} = \widetilde{V}_s,\ s \in Z.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\langle s\rangle_n = 0$ утверждение тривиально. Остается рассмотреть случай $s = 1, \ldots, [N/2], \langle s\rangle_n \neq 0$.

Начнем с $s = 1, \ldots, [(n-1)/2]$. Поскольку $\langle s\rangle_n = s$, то

$$|\widetilde{V}_s - V_s^{(r)}| = |m - m\kappa_s^{-r}\Big(\sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{s+qn}^{-r}\Big)^{-1}| = m|1 - [1 + \sum_{q=1}^{m-1} (\kappa_s/\kappa_{s+qn})^r]^{-1}| =$$

$$= [m \sum_{q=1}^{m-1} (\kappa_s/\kappa_{s+qn})^r]\,[1 + \sum_{q=1}^{m-1} (\kappa_s/\kappa_{s+qn})^r]^{-1} \leqslant m \sum_{q=1}^{m-1} (\kappa_s/\kappa_{s+qn})^r.$$

Напомним, что $\kappa_\nu = 2(1 - \cos(2\pi\nu N^{-1})) = 4\sin^2(\pi\nu N^{-1})$. В частности,

$$\kappa_{s+(m-1)n} = \kappa_{N-(n-s)} = \kappa_{n-s}.$$

Учитывая это равенство и то, что

$$n - s \leqslant n + s \leqslant s + qn \leqslant s + (m-1)\,n,$$

получаем $\kappa_{s+qn} \geqslant \kappa_{n-s}$ при $q = 1, \ldots, m-1$. Значит,

$$|\widetilde{V}_s - V_s^{(r)}| \leqslant m(m-1)(\kappa_s/\kappa_{n-s})^r,\ s = 1, \ldots, [(n-1)/2]. \tag{10}$$

Отношение κ_s/κ_{n-s} меньше единицы, так как κ_s строго возрастает при $s = 0, \ldots, n$ и $s < n - s$ при $s = 1, \ldots, [(n-1)/2]$. Отсюда следует, что правая часть неравенства (10) стремится к нулю при $r \to \infty$.

Далее по определению $V_s^{(r)}$ имеем

$$\sum_{q=0}^{m-1} V_{s+qn}^{(r)} = m, \; s = 1, \ldots, [(n-1)/2].$$

Величины $V_{s+qn}^{(r)}$ неотрицательны и $V_s^{(r)} \to m$ при $r \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{r \to \infty} V_{s+qn}^{(r)} = 0, \; q = 1, \ldots, m-1, \; s = 1, \ldots, [(n-1)/2]. \tag{11}$$

Обратимся к равенству

$$\sum_{q=0}^{m-1} V_{s+qn}^{(r)} = m, \; s = [n/2] + 1, \ldots, n-1,$$

и перепишем его в виде

$$\sum_{q=0}^{m-2} V_{s+qn}^{(r)} + V_{N-(n-s)}^{(r)} = m.$$

Согласно (9), $V_{N-(n-s)}^{(r)} = V_{n-s}^{(r)}$. Поскольку

$$[(n-1)/2] + [n/2] = n-1,$$

то при $s = [n/2] + 1, \ldots, n-1$ индекс $n-s$ пробегает значения от 1 до $[(n-1)/2]$. По доказанному $V_{n-s}^{(r)} \to m$ при $r \to \infty$, так что

$$\lim_{r \to \infty} V_{s+qn}^{(r)} = 0, \; q = 0, \ldots, m-2, \; s = [n/2] + 1, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Если n – нечетное число, то $[(n-1)/2] = [n/2]$, поэтому согласно (11), (12)

$$\lim_{r \to \infty} V_{s+qn}^{(r)} = 0, \; q = 1, \ldots, m-2, \; s = 1, \ldots, n-1,$$

$$\lim_{r \to \infty} V_s^{(r)} = 0, \; s = [n/2] + 1, \ldots, n-1, \tag{13}$$

$$\lim_{r \to \infty} V_{s+(m-1)n}^{(r)} = 0, \; s = 1, \ldots, [(n-1)/2].$$

Учитывая неравенство $[(n-1)/2] + (m-1)\, n \geqslant [N/2]$, получаем

$$\lim_{r \to \infty} V_s^{(r)} = \tilde{V}_s, \; s = [n/2] + 1, \ldots, [N/2], \; \langle s \rangle_n \neq 0. \tag{14}$$

При нечетном n теорема доказана.

Возьмем четное n. Имеем

$$|\, \tilde{V}_{n/2} - V_{n/2}^{(r)} \,| = |\, m/2 - m\kappa_{n/2}^{-r} \,(\sum_{q=0}^{m-1} \kappa_{n/2+qn}^{-r})^{-1} \,|.$$

При $m = 2$ $(N = 2n)$

$$\kappa_{n/2+n} = \kappa_{2n-n/2} = \kappa_{n/2}.$$

В этом случае $V_{n/2}^{(r)} = m/2 = \tilde{V}_{n/2}$ при всех r.

Пусть $m \geqslant 3$. Поскольку $n/2 + (m-1)\, n = N - n/2$, то

$$|\, \tilde{V}_{n/2} - V_{n/2}^{(r)} \,| = m \,|\, ½ - [2 + \sum_{q=1}^{m-2} (\kappa_{n/2}/\kappa_{n/2+qn})^r]^{-1} \,| \leqslant$$

$$\leqslant (m/4) \sum_{q=1}^{m-2} (\kappa_{n/2}/\kappa_{n/2+qn})^r \leqslant (m(m-2)/4)\, (\kappa_{n/2}/\kappa_{n/2+n})^r.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $r \to \infty$, так как

$$\varkappa_{n/2} = 4\sin^2(\pi(2m)^{-1}),\ \varkappa_{n/2+n} = 4\sin^2(3\pi(2m)^{-1}),\ m \geqslant 3.$$

Значит,

$$\lim_{r\to\infty} V_{n/2}^{(r)} = \lim_{r\to\infty} V_{n/2+(m-1)n}^{(r)} = m/2. \tag{15}$$

Запишем равенство

$$\sum_{q=0}^{m-1} V_{n/2+qn}^{(r)} = m.$$

Согласно (15),

$$\lim_{r\to\infty} V_{n/2+qn}^{(r)} = 0,\ q = 1, \ldots, m-2. \tag{16}$$

Теперь из (11), (12), (16) следуют соотношения (13), а из них – (14). Теорема доказана.

§ 4. Связь с тригонометрической интерполяцией

Выясним смысл предельного спектра $\{\widetilde{V}_s Y_{\langle s\rangle_n}\}$. Для этого рассмотрим задачу тригонометрической интерполяции по значениям $y_k = w(t_{km})$, $k = 0, \ldots, n-1$. Напомним, что $t_j = jh$, $h = T/N$.

Положим $\nu = [(n-1)/2]$ и введем ядро

$$D_n(t) = n^{-1} \sum_{s=-\nu}^{\nu} \exp(i2\pi s t T^{-1})$$

при нечетном n,

$$D_n(t) = n^{-1}\left[\cos(\pi n t T^{-1}) + \sum_{s=-\nu}^{\nu} \exp(i2\pi s t T^{-1})\right]$$

при четном n. Проверим, что $D_n(t_{km}) = \delta_n(k)$ при всех целых k.

Если n – нечетное число, то

$$-\nu + n = -(n-1)/2 + n = (n-1)/2 + 1 = \nu + 1. \tag{17}$$

Имеем

$$D_n(t_{km}) = n^{-1}\left(\sum_{s=0}^{\nu} + \sum_{s=-\nu}^{-1}\right)\exp(i2\pi s t_{km} T^{-1}).$$

Во второй сумме сделаем замену индексов $l = s + n$. Согласно (17) получим

$$D_n(t_{km}) = n^{-1} \sum_{s=0}^{\nu} \exp(i2\pi s k n^{-1}) + n^{-1} \sum_{l=\nu+1}^{n-1} \exp(i2\pi l k n^{-1}) =$$

$$= n^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} \exp(i2\pi s k n^{-1}) = \delta_n(k).$$

При четном n

$$-\nu + n = -n/2 + 1 + n = n/2 + 1 = \nu + 2.$$

Поэтому

$$D_n(t_{km}) = n^{-1}\left[(-1)^k + \left(\sum_{s=0}^{\nu} + \sum_{s=\nu+2}^{n-1}\right)\exp(i2\pi skn^{-1})\right] =$$

$$= n^{-1}\sum_{s=0}^{n-1}\exp(i2\pi skn^{-1}) = \delta_n(k).$$

Рассмотрим тригонометрический полином

$$P_n(t) = \sum_{s=0}^{n-1} y_s D_n(t - t_{sm}).$$

Очевидно, что он удовлетворяет интерполяционным условиям

$$P_n(t_{km}) = y_k,\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Т е о р е м а 2. *Справедливо равенство*

$$P_n(t_j) = N^{-1}\sum_{s=0}^{N-1}\widetilde{V}_s Y_{\langle s\rangle_n}\omega_N^{-js}. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При нечетном n

$$P_n(t_j) = n^{-1}\sum_{s=0}^{n-1} y_s \sum_{k=-\nu}^{\nu}\exp(i2\pi k(j - sm)N^{-1}) =$$

$$= n^{-1}\sum_{k=-\nu}^{\nu}\exp(i2\pi kjN^{-1})\sum_{s=0}^{n-1} y_s\exp(-i2\pi ksn^{-1}) =$$

$$= n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\nu} + \sum_{k=-\nu}^{-1}\right) Y_k\exp(i2\pi kjN^{-1}). \tag{19}$$

Во второй сумме сделаем замену индексов $l = k + N$. Получим

$$P_n(t_j) = n^{-1}\sum_{k=0}^{\nu} Y_k\omega_N^{-jk} + n^{-1}\sum_{l=N-\nu}^{N-1} Y_{l-N}\omega_N^{-jl} = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{V}_k Y_{\langle k\rangle_n}\omega_N^{-jk}.$$

Пусть теперь n – четное число. Выражение для ядра перепишем в виде

$$D_n(t) = n^{-1}\sum_{k=-\nu-1}^{\nu+1} d_k\exp(i2\pi ktT^{-1}),$$

где $d_k = 1$ при $k = -\nu, \ldots, \nu$ и $d_k = ½$ при $k = \pm(\nu + 1)$. Аналогично предыдущему

$$P_n(t_j) = n^{-1}\sum_{k=-\nu-1}^{\nu+1} d_k Y_k\omega_N^{-jk} = n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\nu} + \sum_{k=\nu+1}^{\nu+1} + \sum_{k=-\nu-1}^{-\nu-1} +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=-\nu}^{-1}\right) d_k Y_k\omega_N^{-jk} = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{V}_k Y_{\langle k\rangle_n}\omega_N^{-jk}. \tag{20}$$

Теорема доказана.

Из (18) следует, что восстановление сигнала по формуле

$$x_j = N^{-1}\sum_{s=0}^{N-1}\widetilde{V}_s Y_{\langle s\rangle_n}\omega_N^{-js}$$

эквивалентно вычислению значений интерполяционного тригонометрического полинома $P_n(t)$ в точках $t = t_j$. Этот результат выясняет роль предельной последовательности $\{\widetilde{V}_s\}$. Вместе с тем, формула (18) служит основой эффективного метода вычисления значений $P_n(t_j)$, $j = 0, \ldots, N-1$, при любом $m \geqslant 2$. Остановимся на этом подробнее [7].

При нечетном n согласно (19) имеем

$$P_n(t_{l+km}) = n^{-1} \Big(\sum_{s=0}^{(n-1)/2} Y_s \omega_N^{-(l+km)s} + \sum_{s=-(n-1)/2}^{-1} Y_{s+n} \omega_N^{-(l+km)s} \Big) =$$

$$= n^{-1} \Big(\sum_{s=0}^{(n-1)/2} Y_s \omega_N^{-ls} \omega_n^{-ks} + \sum_{j=(n+1)/2}^{n-1} Y_j \omega_N^{-l(j-n)} \omega_n^{-kj} \Big).$$

Введем двумерный массив Z со строками

$$Z_{ls} = \begin{cases} Y_s \omega_N^{-ls} & \text{при } s = 0, \ldots, (n-1)/2, \\ Y_s \omega_N^{-l(s-n)} & \text{при } s = (n+1)/2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Тогда

$$P_n(t_{l+km}) = n^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} Z_{ls} \omega_n^{-ks}, \; l = 0, \ldots, m-1, \; k = 0, \ldots, n-1.$$

Если n – четное число, то согласно (20)

$$P_n(t_{l+km}) = n^{-1} \Big(\sum_{s=0}^{n/2-1} Y_s \omega_N^{-(l+km)s} + ½ \, Y_{n/2} \omega_N^{-(l+km)n/2} +$$

$$+ ½ \, Y_{n/2} \omega_N^{(l+km)n/2} + \sum_{s=n/2+1}^{n-1} Y_s \omega_N^{-(l+km)(s-n)} \Big).$$

Введем двумерный массив Z со строками

$$Z_{ls} = \begin{cases} Y_s \omega_N^{-ls} & \text{при } s = 0, \ldots, n/2-1, \\ 0 & \text{при } s = n/2, \\ Y_s \omega_N^{-l(s-n)} & \text{при } s = n/2+1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Тогда

$$P_n(t_{l+km}) = n^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} Z_{ls} \omega_n^{-ks} + (-1)^k n^{-1} Y_{n/2} \cos(\pi l m^{-1}),$$

$$l = 0, \ldots, m-1, \; k = 0, \ldots, n-1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schoenberg I.J.* Notes on Spline Functions I. The Limits of the Interpolating Periodic Spline Functions as their Degree Tends to Infinity // Indag. Math. 1972. V. 34. № 5. P. 412–422.
2. *M. von Golitschek.* On the Convergence of Interpolating Periodic Spline Functions of High Degree // Numer. Math. 1972. V. 19. № 2. P. 146–154.
3. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.
4. *Бер М.Г., Малозёмов В.Н.* О восстановлении дискретных периодических данных // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып. 3. С. 8–13.
5. *Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
6. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
7. *Adams J.W.* A new FFT approach to the interpolation of discrete-time signals // ICASSP 86. Tokyo. Apr. 7–11, 1986. V. 1. N.Y., 1986. P. 213–215.

Поступила в редакцию
31.10.90
После переработки
28.10.91