

Геометрическое моделирование с использованием проективных кривых и поверхностей Безье

М. И. Григорьев
m_grigoriev@list.ru

Проективная кривая Безье определяется конечным набором упорядоченных точек двух- или трёхмерного пространства, называемых полюсами, и положительными весами, приписываемыми этим точкам. За счёт изменения положения полюсов и значений весов, можно управлять формой кривой. В аналитическом плане проективная кривая Безье описывается дробно-рациональной функцией. Её представление связано с базисными полиномами Бернштейна. Это позволяет исследовать свойства таких кривых, основываясь на известных свойствах полиномов Бернштейна.

Аналогичным образом, матрица полюсов в трёхмерном пространстве и соответствующая ей матрица весов определяют поверхность, которая называется проективной поверхностью Безье.

В докладе на основе техники проективных кривых и поверхностей Безье предложен способ построения обобщенных поверхностей вращения. Приведены характерные графические примеры.

1°. Базисные полиномы Бернштейна степени n задаются формулой

$$b_k^n(u) = C_n^k u^k (1-u)^{n-k}, \quad k \in 0 : n.$$

В частности, $b_0^k(u) = (1-u)^n$, $b_n^n(u) = u^n$, $b_0^0(u) \equiv 1$. Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^n b_k^n(u) \equiv 1; \quad b_k^n(u) > 0 \text{ при } u \in (0, 1). \quad (1)$$

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^s (обычно s равно 2 или 3) точки P_0, P_1, \dots, P_n , которые называются *полюсами*. Кривая Безье n -го порядка определяется вектор-функцией [1–3]

$$B(u) = \sum_{k=0}^n P_k b_k^n(u), \quad u \in [0, 1]. \quad (2)$$

Очевидно, что $B(0) = P_0$, $B(1) = P_n$. Согласно (1), выражение (2) при любом $u \in (0, 1)$ представляет собой выпуклую комбинацию полюсов P_k , $k \in 0 : n$. Значит, кривая Безье (2) принадлежит выпуклой оболочке, натянутой на полюсы P_k , $k \in 0 : n$. Изменение положения полюсов влечёт предсказуемое изменение формы кривой.

Припишем каждому полюсу P_k дополнительную координату $t = 1$ и рассмотрим полюсы $P'_k = (P_k, 1)$ в пространстве \mathbb{R}^{s+1} . Зафиксируем $n+1$ положительных чисел w_k , $k \in 0 : n$, которые будем называть *весами*, и введём полюсы $\hat{P}_k = w_k P'_k = (w_k P_k, w_k)$. По ним может быть построена кривая Безье в \mathbb{R}^{s+1} :

$$\hat{B}(u) = \left(\sum_{k=0}^n w_k P_k b_k^n(u), \sum_{k=0}^n w_k b_k^n(u) \right).$$

Спроецируем эту кривую на гиперплоскость $t = 1$, используя центральную проекцию с центром в начале координат, то есть поделим все координаты точек $\widehat{B}(u)$ на последнюю, которую затем отбросим. Получим

$$R(u) = \frac{\sum_{k=0}^n w_k P_k b_k^n(u)}{\sum_{k=0}^n w_k b_k^n(u)}, \quad u \in [0, 1]. \quad (3)$$

Формула (3) определяет кривую в \mathbb{R}^s , которая называется проективной кривой Безье n -го порядка [1, 2]. Её формой при неизменном положении полюсов P_k можно дополнительно управлять, варьируя веса w_k . Изменение значения веса приводит к приближению или удалению кривой от соответствующего полюса.

Очевидно, что и в этом случае $R(0) = P_0$, $R(1) = P_n$, и кривая $R(u)$, $u \in [0, 1]$, лежит в выпуклой оболочке, натянутой на полюсы P_k , $k \in 0 : n$.

Рассмотрим случай проективной кривой Безье второго порядка. Зафиксируем три полюса P_0 , P_1 , P_2 на плоскости и три положительных веса w_0 , w_1 , w_2 . С помощью перепараметризации уравнение (3) может быть приведено к стандартной форме [1]:

$$\widetilde{R}(u) = \frac{P_0 b_0^2(u) + \sqrt{\mu} P_1 b_1^2(u) + P_2 b_2^2(u)}{b_0^2(u) + \sqrt{\mu} b_1^2(u) + b_2^2(u)}, \quad u \in [0, 1],$$

где $\mu = w_1^2/w_0w_2$. Как известно [1], проективная кривая Безье второго порядка является дугой параболы при $\mu = 1$, гиперболы при $\mu > 1$ и эллипса при $\mu \in (0, 1)$. В частности, если полюсы P_0 , P_1 , P_2 расположены в вершинах прямоугольника со сторонами a , b , а значение μ равно $1/2$, то кривая $\widetilde{R}(u)$ представляет собой четверть эллипса с радиусами a и b (рис. 1).

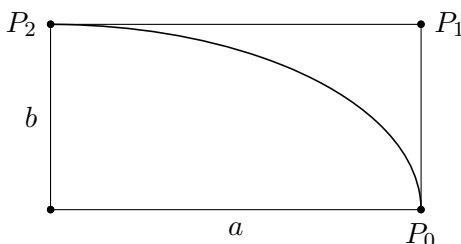


Рис. 1

2°. Пусть в пространстве \mathbb{R}^s (обычно s равно 3) задана матрица полюсов

$$\begin{array}{cccc} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nm} \end{array}$$

По строкам этой матрицы построим $n + 1$ кривую Безье m -го порядка

$$B_k(v) = \sum_{l=0}^m P_{kl} b_l^m(v), \quad v \in [0, 1], \quad k \in 0 : n.$$

Кривые $B_k(v)$ будем называть *образующими*. Зафиксируем $v \in [0, 1]$. По точкам $B_0(v)$, $B_1(v), \dots, B_n(v)$ можно в свою очередь построить кривую Безье $B(u, v)$, $u \in [0, 1]$. Когда параметр v пробегает весь отрезок $[0, 1]$, кривая $B(u, v)$ описывает поверхность в пространстве \mathbb{R}^s , которая называется *поверхностью Безье порядка $n \times m$* [1, 2]. Её аналитическое представление имеет вид

$$B(u, v) = \sum_{k=0}^n B_k(v) b_k^n(u) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m P_{kl} b_k^n(u) b_l^m(v), \quad u, v \in [0, 1]. \quad (4)$$

Сопоставим каждому полюсу P_{kl} , $k \in 0 : n$, $l \in 0 : m$, положительный вес w_{kl} . Действуя аналогично пункту 1°, определим проективную поверхность Безье порядка $n \times m$ [1, 2]:

$$R(u, v) = \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m w_{kl} P_{kl} b_k^n(u) b_l^m(v)}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m w_{kl} b_k^n(u) b_l^m(v)}, \quad u, v \in [0, 1]. \quad (5)$$

Очевидно, что

$$R(0, 0) = P_{00}, \quad R(1, 0) = P_{n0}, \quad R(0, 1) = P_{0m}, \quad R(1, 1) = P_{nm}.$$

Заметим также, что выражение (5) снова представляет собой выпуклую комбинацию полюсов P_{kl} . Значит, проективная поверхность Безье будет располагаться внутри выпуклой оболочки, натянутой на эти полюсы.

3°. Напомним, что поверхность вращения в классическом понимании образована вращением некоторой плоской кривой относительно прямолинейной оси, лежащей в плоскости этой кривой. Первое возможное обобщение связано с заменой оси вращения на некоторую пространственную кривую. Кроме того, можно обобщить само понятие вращения так, что сечением такой поверхности становится не окружность, а эллипс с двумя независимыми радиусами.

Итак, пусть $C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ задаёт некоторую непрерывно-дифференцируемую кривую. Будем называть её *кривой центров*. Предположим, что $\|C'(t)\| \neq 0$ при любом $t \in [0, 1]$. Обозначим

$$T(t) = C'(t)/\|C'(t)\|, \quad t \in [0, 1].$$

Вектор $T(t)$ является единичным вектором касательной к кривой C .

Пусть далее $f_N, f_B: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_t: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — непрерывные функции. Вектор-функция

$$F(u) = (f_N(u), f_B(u), f_t(u)), \quad u \in [0, 1],$$

определяет параметрическую кривую в \mathbb{R}^3 . Назовём её *кривой радиусов*. Функция $f_t(u)$ управляет положением центров вращения на кривой C .

Выберем также некоторую непрерывную вектор-функцию $B: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ такую, чтобы для всех t из отрезка $[0, 1]$ вектор $B(t)$ имел единичную длину и был ортогонален вектору $T(t)$. Положим

$$N(t) = B(t) \times T(t), \quad (6)$$

где \times — знак векторного умножения.

Зафиксируем некоторое $u \in [0, 1]$. Рассмотрим точку на кривой центров C , соответствующую значению параметра t , равному $t_u = f_t(u)$. Пара $(N(t_u), B(t_u))$ определяет нормальную плоскость к кривой в этой точке (см. рис. 2). Рассмотрим лежащий в этой плоскости эллипс с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$:

$$G(u, v) = C(t_u) + (f_N(u) \cos 2\pi v) N(t_u) + (f_B(u) \sin 2\pi v) B(t_u), \quad v \in [0, 1]. \quad (7)$$

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая (7) порождает поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 , которая называется *обобщённой поверхностью вращения* кривой радиусов F относительно кривой центров C .

4°. Обобщённые поверхности вращения можно строить, используя технику проективных кривых и поверхностей Безье.

Рассмотрим три вектор-функции $P_0, P_1, P_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} P_0(u) &= C(t_u) + f_N(u)N(t_u), & P_2(u) &= C(t_u) + f_B(u)B(t_u), \\ P_1(u) &= C(t_u) + f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u). \end{aligned} \quad (8)$$

Зафиксируем $u \in [0, 1]$. Уравнение проективной кривой второго порядка, построенной по полюсам $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_2(u)$ с параметром $\mu = 1/2$ имеет вид

$$\tilde{G}(u, v) = \frac{P_0(u)(1-v)^2 + \sqrt{2}P_1(u)v(1-v) + P_2(u)v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}v(1-v) + v^2}, \quad v \in [0, 1].$$

Перепишем эту формулу

$$\tilde{G}(u, v) = C(t_u) + \frac{\tilde{P}_0(u)(1-v)^2 + \sqrt{2}\tilde{P}_1(u)v(1-v) + \tilde{P}_2(u)v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}v(1-v) + v^2}. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(u) &= f_N(u)N(t_u), & \tilde{P}_2(u) &= f_B(u)B(t_u), \\ \tilde{P}_1(u) &= f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u). \end{aligned}$$

На основании пункта 1° заключаем, что кривая (9) является четвертью эллипса с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$, лежащего в нормальной плоскости.

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая $\tilde{G}(u, v)$ порождает поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 , которая по построению совпадает с четвертью обобщённой поверхности вращения $G(u, v)$ (рис. 2).

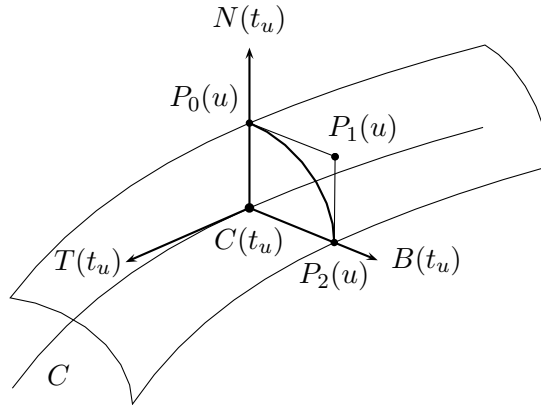


Рис. 2

5°. Укажем некоторые возможные способы выбора вектор-функции B и приведём примеры обобщённых поверхностей вращения.

Рассмотрим сначала простой случай, когда кривая центров C является плоской. Не ограничивая общности можно считать, что кривая C лежит в плоскости Oxz . Положим

$$B(t) \equiv (0, 1, 0). \quad (10)$$

С учётом (6) и (10) имеем

$$N(t) = (T_z(t), 0, -T_x(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (11)$$

где $T_x(t)$, $T_z(t)$ — первая и третья компоненты вектор-функции $T(t)$.

На рис. 3 представлены кривая радиусов F (в данном примере f_N совпадает с f_B и $f_t(u) \equiv u$) и кривая центров C . Соответствующая им поверхность вращения изображена на рис. 4.

Когда в качестве кривой центров выбран отрезок оси Oz , и радиусы f_N , f_B тождественно равны, обобщённая поверхность вращения представляет собой обычную поверхность вращения. Пример такой поверхности дан на рис. 5. Порождающие кривая радиусов и кривая центров приведены на рис. 6.

Вернёмся к общему случаю пространственной кривой центров C . Укажем наиболее простой способ выбора B . Введём дополнительное предположение, что кривая центров обладает гладкостью второго порядка и что $\|C''(t)\| > 0, t \in [0, 1]$. Положим

$$B(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{\|C'(t) \times C''(t)\|}, \quad t \in [0, 1]. \quad (12)$$

Выражение (12) определяет бинормальный вектор к кривой центров в точке $C(t)$. Значит, вектор $N(t) = B(t) \times T(t)$ равен вектору главной нормали к кривой C в этой точке, а правая тройка векторов $T(t), N(t), B(t)$ образует базис Френе [4].

На рис. 7 приведён пример обобщённой поверхности вращения, построенной с учётом выбранной в данном пункте вектор-функции $B(t)$. Порождающая кривая радиусов F представлена на рис. 8 (для наглядности приведены также её проекции на координатные плоскости Oxz и Oyz). В качестве кривой центров использована дуга винтовой кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farin G.* Curves and surfaces for CAGD. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002. xvii+499pp.
2. *Голованов Н. Н.* Геометрическое моделирование. М.: Физматлит, 2002. 472 с.
3. *Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н.* Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. №11. С. 1962-1971.
4. *Погорелов А. И.* Дифференциальная геометрия. 6-е изд. М.: Наука, 1974. 176 с.

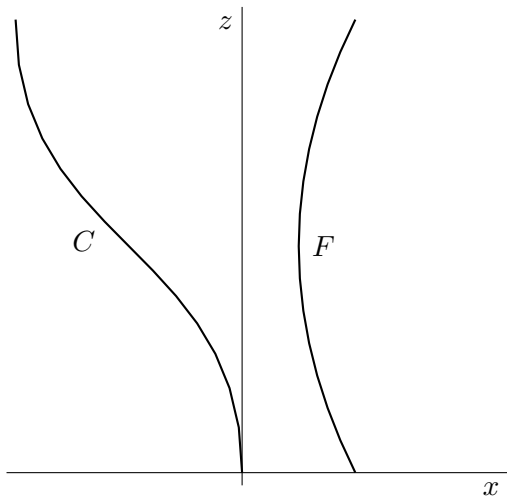


Рис. 3

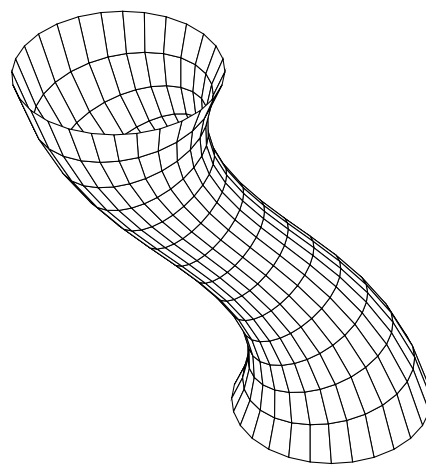


Рис. 4

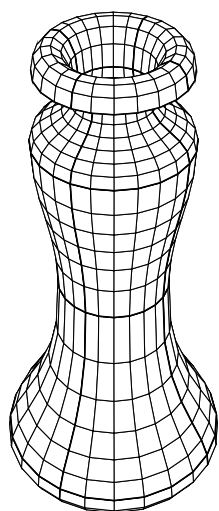


Рис. 5

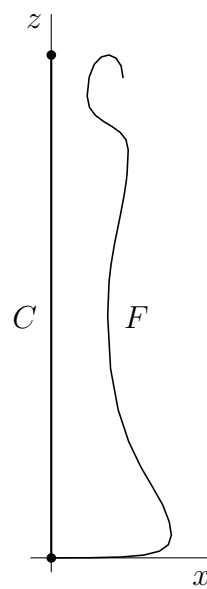


Рис. 6

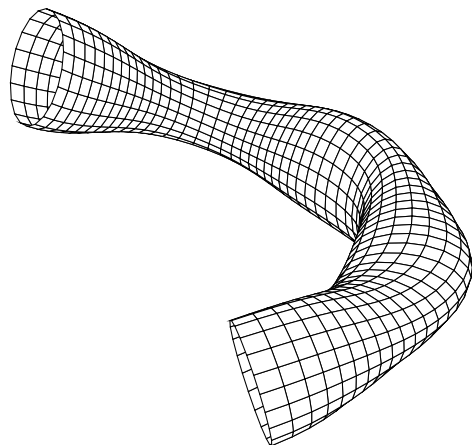


Рис. 7

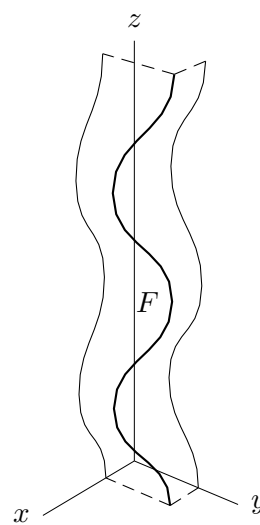


Рис. 8