# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВАРИАНТЫ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков

malv@math.spbu.ru sc2@pisem.net

Быстрые алгоритмы играют важную роль при обработке дискретных периодических сигналов. Наиболее популярным и по-прежнему востребованным является быстрое преобразование Фурье (БПФ). Общий подход к построению БПФ связан с разложением матрицы Фурье в произведение слабо заполненных матриц. Варианты разложения зависят от арифметических свойств порядка матрицы Фурье и от разных представлений её индексов. В докладе используется параметрическое кодирование индексов. Получена наиболее глубокая параметрическая факторизация матрицы Фурье.

**1**°. Приведём основные обозначения:

$\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень $N$-й степени из единицы,

$\langle j\rangle_N$ — остаток от деления целого неотрицательного числа $j$ на $N$.

Пусть $s$ и $n_1, n_2, \dots, n_s$ — натуральные числа, отличные от единицы. Положим

$$\begin{aligned}
&N = n_1 n_2 \cdots n_s\,;\\
&\Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} \qquad \text{при } \nu \in 2:s+1, \quad \Delta_1 = 1\,;\\
&N_\nu = n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_s \quad \text{при } \nu \in 0:s-1, \quad N_s = 1\,.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $N_0 = N$ и $\Delta_\nu n_\nu N_\nu = N$ при всех $\nu \in 0:s$.

**2**°. Рассмотрим усовершенствованный вариант общего подхода к вычислению дискретного преобразования Фурье (ДПФ), предложенного М. Б. Свердликом [1]. Возьмём матрицу Фурье $F_N$ с элементами

$$F_N[k,j] = \omega_N^{kj}\,, \qquad k, j \in 0:N-1\,.$$

Предположим, что при всех $\nu \in 1:s$ найдутся числа $p_\nu$, $q_\nu$ из $1:N-1$, взаимно простые с $n_\nu$, и натуральные $D_\nu$, $G_\nu$, такие, что $k$, $j$ допускают представления

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu D_\nu \right\rangle_N, \qquad j_\nu \in 0:n_\nu - 1\,,$$

$$k = \left\langle \sum_{\mu=1}^{s} k_\mu\, q_\mu G_\mu \right\rangle_N, \qquad k_\mu \in 0:n_\mu - 1\,.$$

Векторы $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ и $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ будем называть *векторами параметров.*

Сокращение количества арифметических операций при вычислении ДПФ возможно в трёх случаях выбора базисов $\{D_\nu\}$ и $\{G_\mu\}$:

1) $D_\nu = B_\nu$ и $G_\mu = B_\mu$, где $B_\nu = N/n_\nu$. В этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu B_\nu\rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1:s$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту метода простых множителей для вычисления ДПФ.

2) $D_\nu = N_\nu$ и $G_\mu = \Delta_\mu$. В этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu} \prod_{\nu=2}^{s} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu\, p_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu\, q_\mu \Delta_\mu}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1 : s$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту БПФ с прореживанием по времени.

3) $D_\nu = \Delta_\nu$ и $G_\mu = N_\mu$. В этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\mu=1}^{s} \omega_{n_\mu}^{k_\mu j_\mu} \prod_{\mu=2}^{s} \omega_{\Delta_{\mu+1}}^{k_\mu\, q_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu-1} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1 : s$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту БПФ с прореживанием по частоте.

**3°**. Рассмотрим более подробно параметрический вариант метода простых множителей [2]. Любое число $j \in 0 : N-1$ с помощью последовательного деления можно единственным образом представить в виде

$$j = j_s\,(n_{s-1}\cdots n_1) + j_{s-1}\,(n_{s-2}\cdots n_1) + \cdots + j_2\, n_1 + j_1 = \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, \Delta_\nu\,,$$

где $j_\nu \in 0 : n_\nu - 1$. Коэффициенты $j_\nu$ этого разложения образуют *смешанный код* числа $j$,

$$j = (j_s, \ldots, j_1)_{n_s,\ldots,n_1}\,.$$

Введём перестановку $\mathrm{perm}_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}$, сопоставляющую числу $j = (j_s, \ldots, j_1)_{n_s,\ldots,n_1}$ число

$$\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu B_\nu \right\rangle_N\,.$$

Эта перестановка определена и при $s = 1$. Запись $k = \mathrm{perm}_{n_1}^{(p_1)}(j)$ означает, что $k = \langle j\, p_1 \rangle_{n_1}$. Такая перестановка называется *эйлеровой.*

Матрица эйлеровых перестановок $Perm_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}$ определяется стандартным способом. При $p_1 = p_2 = \cdots = p_s = 1$ получим *матрицу руританских перестановок.*

**ТЕОРЕМА 1.** *Справедливо разложение*

$$Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)} = \bigl(Perm_{n_s}^{(p_s)} \otimes Perm_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \cdots \otimes Perm_{n_1}^{(p_1)}\bigr) \prod_{\nu=2}^{s} \bigl(I_{N_\nu} \otimes Perm_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,1)}\bigr)\,,$$

*где $\otimes$ — знак кронекерова умножения матриц и $I_{N_\nu}$ — единичная матрица порядка $N_\nu$.*

Из теоремы 1 при $p_1 = p_2 = \cdots = p_s = 1$ следует разложение матрицы руританских перестановок:

$$Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(1,1,\ldots,1)} = \prod_{\nu=2}^{s} \bigl(I_{N_\nu} \otimes Perm_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,1)}\bigr)\,.$$

Более того, само заключение теоремы 1 можно переписать в виде

$$Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)} = \bigl(Perm_{n_s}^{(p_s)} \otimes Perm_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \cdots \otimes Perm_{n_1}^{(p_1)}\bigr) Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(1,1,\ldots,1)}\,.$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть $N = n_1 n_2 \cdots n_s$, где сомножители $n_\nu$ попарно взаимно просты. Тогда при любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье $F_N$ допускает представление*

$$F_N = \big(Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(q_1,q_2,\ldots,q_s)}\big)^T \big(F_{n_s} \otimes F_{n_{s-1}} \otimes \cdots \otimes F_{n_1}\big) Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}\,, \tag{1}$$

*где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ — сопряжённый вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1 : s$.*

В связи с теоремой 2 представляют интерес *самосопряжённые векторы параметров $p$*, такие, что сопряжённый вектор параметров $q$ совпадает с $p$. В этом случае в разложении (1) присутствует только одна матрица перестановок.

Обозначим через $b_\nu$ единственное на множестве $1 : n_\nu - 1$ решение уравнения $\langle x B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$. Самосопряжённый вектор параметров существует тогда и только тогда, когда при всех $\nu \in 1 : s$ число $b_\nu$ является квадратичным вычетом по модулю $n_\nu$.

Пусть $p_\nu$ — решение уравнения $\langle x^2 \rangle_{n_\nu} = b_\nu$ при $\nu \in 1 : s$. В таком случае вектор параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ будет самосопряжённым. Например, при $s = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 25$ существует четыре самосопряжённых вектора параметров: $p = (1, 12)$, $p = (1, 13)$, $p = (3, 12)$ и $p = (3, 13)$.

Ещё один пример: при $s = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ самосопряжённым будет руританский вектор параметров $p = (1, 1, 1)$. Самосопряжёнными руританские коды будут также в следующих случаях: $n = (2, 3, 7, 41)$, $n = (2, 3, 11, 13)$, $n = (2, 3, 7, 83, 85)$, $n = (2, 3, 11, 17, 59)$.

**4°**. Рассмотрим более подробно параметрический вариант быстрого преобразования Фурье в общем случае [3]. Введём перестановки $\mathrm{mix}_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}$ и $\mathrm{rev}_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}$, сопоставляющие числу $j = (j_s, \ldots, j_1)_{n_s,\ldots,n_1}$ числа

$$\mathrm{mix}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}(j) = \Big\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu \Big\rangle_N,$$

$$\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}(j) = \Big\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu N_\nu \Big\rangle_N.$$

Матрицы перестановок $Mix_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}$ и $Rev_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}$ определяются стандартным способом. Отметим, что $Rev_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)} = Rev_{n_1,\ldots,n_s}^{(1,\ldots,1)} Mix_{n_s,\ldots,n_1}^{(p_s,\ldots,p_1)}$.

**ТЕОРЕМА 3.** *При $s \geqslant 2$ справедливы разложения*

$$Mix_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)} = \prod_{\nu=0}^{s-1} \big(Mix_{n_{s-\nu},N_{s-\nu}}^{(p_{s-\nu},1)} \otimes I_{\Delta_{s-\nu}}\big)\,,$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)} = \prod_{\nu=1}^{s} \Big(I_{N_\nu} \otimes Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,p_\nu)}\Big)\,.$$

Нам потребуется диагональная параметрическая матрица вращений $Twid$:

$$Twid_{n_1,\ldots,n_\nu}^{(p_1,\ldots,p_\nu)}\Big[\sum_{\alpha=1}^{\nu} j_\alpha\,\Delta_\alpha, \sum_{\alpha=1}^{\nu} j'_\alpha\,\Delta_\alpha\Big] = \begin{cases} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu\, p_\nu \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\, p_\alpha \Delta_\alpha}, & \text{если } j'_1 = j_1, \ldots, j'_\nu = j_\nu; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $j_\alpha, j'_\alpha \in 0 : n_\alpha - 1$, $\nu \in 2 : s$. По определению $Twid_{n_1}^{(p_1)} = I_{n_1}$.

**ТЕОРЕМА 4.** *При $N = n_1 n_2 \cdots n_s$ и любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье $F_N$ допускает представление*

$$F_N = \bigl(Rev^{(q_1,\ldots,q_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\bigr)^T \Biggl(\prod_{\nu=1}^{s} \bigl(I_{N_\nu} \otimes Twid^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},q_\nu)}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}\bigr)\bigl(I_{N_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\bigr)\Biggr) Mix^{(p_1,\ldots,p_s)}_{n_1,\ldots,n_s},$$

*где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ — сопряжённый вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu\, p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1:s$.*

Алгоритм БПФ, соответствующий факторизации матрицы Фурье в теореме 4, связан с прореживанием по частоте. Как следствие, можно получить факторизацию матрицы Фурье, соответствующую БПФ с прореживанием по времени:

$$F_N = \bigl(Mix^{(q_s,\ldots,q_1)}_{n_s,\ldots,n_1}\bigr)^T \Biggl(\prod_{\nu=1}^{s} \bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}\bigr)\bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes Twid^{(q_s,\ldots,q_{\nu+1},p_\nu)}_{n_s,\ldots,n_{\nu+1},n_\nu}\bigr)\Biggr) Rev^{(p_s,\ldots,p_1)}_{n_s,\ldots,n_1}.$$

Вектор параметров можно подобрать таким образом, что число нетривиальных элементов (отличных от $\pm 1$ и $\pm i$) в параметрической матрице вращений уменьшится по сравнению с обычной (непараметрической) матрицей вращений. Например, если положить $n = (2,3,4)$, то $Twid^{(1,1)}_{2,3}$ содержит 2 нетривиальных элемента, $Twid^{(1,1,1)}_{2,3,4}$ — 12 элементов. Если положить $p = (3,2,3)$ и $q = (1,2,3)$, то в матрице $Twid^{(3,2)}_{2,3}$ все диагональные элементы станут тривиальными ($Twid^{(3,2)}_{2,3} = I_6$), а в матрице $Twid^{(3,2,3)}_{2,3,4}$ останется только 6 нетривиальных элементов.

**5°**. На основе предыдущих результатов можно предложить параметрический вариант метода простых множителей с последовательными перестановками. Для соответствующего алгоритма БПФ не требуются сложные перестановки данных до или после преобразования, а вычисления происходят совместно с перестановками.

**ТЕОРЕМА 5.** *Пусть $N = n_1 n_2 \cdots n_s$, где сомножители $n_\nu$ попарно взаимно просты. Тогда при любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье $F_N$ допускает представление*

$$F_N = \prod_{\nu=1}^{s} \Bigl(\bigl(Perm^{(q_\nu,1)}_{n_\nu,N_\nu}\bigr)^T \otimes I_{\Delta_\nu}\Bigr)\Bigl(I_{N_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\Bigr)\Bigl(I_{N_\nu} \otimes Perm^{(1,p_\nu)}_{\Delta_\nu,n_\nu}\Bigr),$$

*где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ — сопряжённый вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1:s$.*

**6°**. В заключение отметим, что наиболее эффективно параметрическая техника работает в многомерном случае [4].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Свердлик М. Б. *Матричная интерпретация и вычислительная эффективность алгоритмов БПФ* // Радиотехника и электроника. 1984. № 2. С. 265–274.

2. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Параметрический вариант метода простых множителей* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2007-05. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2007/index.html#05`)

3. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Параметрическая факторизация матрицы Фурье* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2007-06. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2007/index.html#06`)

4. Просеков О. В. *Параметрический вариант многомерного быстрого преобразования Фурье* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2007-07. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2007/index.html#07`)