Предельные теоремы теории дискретных периодических сплайнов

В. Н. Малозёмов, Н. В. Чашников

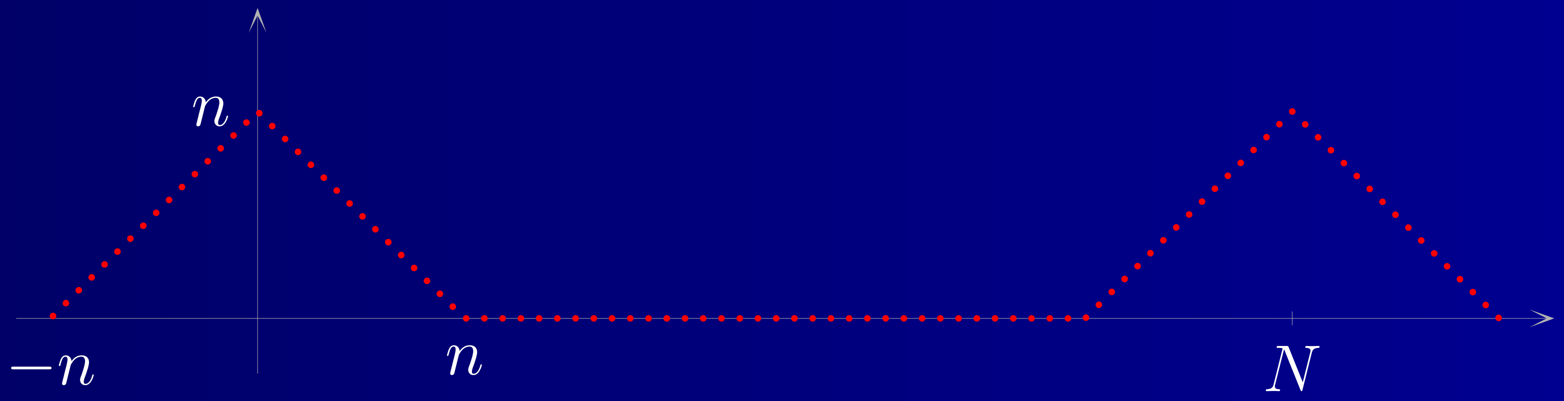
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет

Дискретные B-сплайны

Пусть $N = mn$; m, n **— натуральные числа,** $n, m > 1$.

B**-сплайн первого порядка:**

$$Q_{1,n}(j) = \begin{cases} n - j & \textbf{при } j \in 0 : n-1, \\ \quad 0 & \textbf{при } j \in n : N-n, \\ j - N + n & \textbf{при } j \in N-n+1 : N-1. \end{cases}$$



Дискретные периодические сплайны

B-сплайн порядка $\nu > 1$:

$$Q_{\nu,n}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} Q_{1,n}(k) Q_{\nu-1,n}(j-k).$$

Дискретный N-периодический сплайн порядка r:

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \, Q_{r,n}(j - pn),$$

где $a_p \in \mathbb{C}$.

Задача сплайн-интерполяции

Пусть зафиксированы m комплексных чисел

$$z(0),\, z(1), \dots,\, z(m-1).$$

Для натуральных r и n, $n > 1$, существует единственный дискретный N-периодический сплайн порядка r, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S_{r,n}(ln) = z(l), \quad l \in 0 : m-1.$$

Тригонометрические полиномы

Положим $\mu = \lfloor m/2 \rfloor$ и введём фундаментальные интерполяционные полиномы порядка μ:

$$d_m(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\mu} \cos \frac{2\pi k x}{m}$$

при нечётном m $(m = 2\mu + 1)$,

$$d_m(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\mu-1} \cos \frac{2\pi k x}{m} + \frac{\cos(\pi x)}{m}$$

при чётном m $(m = 2\mu)$.

Тригонометрические полиномы

Полиномы $d_m(x)$ удовлетворяют условиям

$$d_m(0) = 1,$$

$$d_m(1) = d_m(2) = \cdots = d_m(m-1) = 0.$$

Предел при $r \to \infty$

При фиксированном n и неограниченном увеличении r интерполяционный дискретный периодический сплайн $S_{r,n}$ сходится к дискретному N-периодическому тригонометрическому полиному порядка $\mu = \lfloor m/2 \rfloor$:

$$\lim_{r \to \infty} S_{r,n}(j) = t_n(j),$$

где

$$t_n(j) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, d_m(j/n - p).$$

Предел при $n \to \infty$

При фиксированном r для любого вещественного x существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{r,n}\big(\lfloor nx \rfloor\big) = P_r(x).$$

При этом функция $P_r(x)$ есть m-периодический сплайн класса C^{2r-2}, который на каждом отрезке вида $[k, k+1]$ является алгебраическим полиномом степени не выше $2r-1$.

Повторные пределы

Предельные тригонометрические полиномы $t_n(j)$ при неограниченном увеличении n сходятся к тригонометрическому полиному вещественного аргумента в следующем смысле:

$$\lim_{n\to\infty} t_n\bigl(\lfloor nx \rfloor\bigr) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, d_m(x-p).$$

К тому же тригонометрическому полиному сходятся сплайны $P_r(x)$ при стремлении r к бесконечности:

$$\lim_{r\to\infty} P_r(x) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, d_m(x-p).$$

Повторные пределы

ТЕОРЕМА. *Повторные пределы интерполяционных дискретных периодических сплайнов совпадают:*

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} S_{r,n}\big(\lfloor nx\rfloor\big) = \lim_{n\to\infty}\lim_{r\to\infty} S_{r,n}\big(\lfloor nx\rfloor\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, d_m(x-p).$$

Общий предел есть интерполяционный m-периодический тригонометрический полином порядка $\mu = \lfloor m/2\rfloor$.

Список литературы

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б., *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения,* Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 38 (1998), № 8, 1235–1246.

2. Бер М. Г., Малозёмов В. Н., *Об интерполяции дискретных периодических данных,* Проблемы передачи инф. 28 (1992), № 4, 60–68.

3. Golitschek M., *On the convergence of interpolating periodic spline functions of high degree,* Numer. Math. 19 (1972), № 2, 146–154.