# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ПРОСТЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ*

В. Н. Малозёмов — malv@gamma.math.spbu.ru

О. В. Просеков — sc2@pisem.net

5 сентября 2006 г.

## 1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

**1.1.** Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — попарно взаимно простые натуральные числа, отличные от единицы. Введём обозначения

$$\begin{aligned}
&N = n_1 n_2 \cdots n_s\,;\\
&N_\nu = n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_s \quad \text{при } \nu \in 0 : s-1, \quad N_s = 1\,;\\
&\Delta_1 = 1\,; \quad \Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} \quad \text{при } \nu \in 2 : s+1,\\
&B_\nu = N/n_\nu \quad \text{при } \nu \in 1 : s.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\Delta_\nu N_\nu = B_\nu$, $\nu \in 1 : s$.

При каждом $\nu \in 1 : s$ зафиксируем число $p_\nu \in 1 : n_\nu - 1$, взаимно простое с $n_\nu$. Вектор $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ назовём *вектором параметров.*

Поскольку $p_\nu B_\nu$ взаимно просто с $n_\nu$, то уравнение $\langle x\, p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ имеет единственное на множестве $1 : n_\nu - 1$ решение. Обозначим его $q_\nu$. Вектор $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ назовём *сопряжённым вектором параметров.*

**1.2.** Введём перестановку $\mathrm{perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}$, сопоставляющую числу $j \in 0 : N-1$ с разложением $j = \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu \, \Delta_\nu$, $j_\nu \in 0 : n_\nu - 1$, число

$$k = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu \, p_\nu B_\nu \right\rangle_N .$$

Эта перестановка определена и при $s = 1$. Запись $k = \mathrm{perm}_{n_1}^{(p_1)}(j)$ означает, что $k = \langle j\, p_1 \rangle_{n_1}$. Такая перестановка называется *эйлеровой.*

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Матрицу перестановок $Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}[0:N-1,0:N-1]$ определим обычным способом:

$$Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}[j,k]=\begin{cases}1, & \text{если } k=\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}(j),\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Матрицы $Perm_{n_\nu}^{(p_\nu)}$, $\nu\in 1:s$, назовём *матрицами эйлеровых перестановок.* При $p_1=p_2=\dots=p_s=1$ получим *матрицу руританских перестановок* $Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(1,1,\dots,1)}$.

**1.3.** Сформулируем основные результаты доклада.

**ТЕОРЕМА 1.** *Справедливо разложение*

$$Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}=\big(Perm_{n_s}^{(p_s)}\otimes Perm_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})}\otimes\dots\otimes Perm_{n_1}^{(p_1)}\big)\prod_{\nu=2}^{s}\big(I_{N_\nu}\otimes Perm_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,1)}\big)\,.$$

**ТЕОРЕМА 2.** *При любом векторе параметров $p=(p_1,p_2,\dots,p_s)$ матрица Фурье $F_N$ допускает представление*

$$F_N=\big(Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(q_1,q_2,\dots,q_s)}\big)^T\big(F_{n_s}\otimes F_{n_{s-1}}\otimes\dots\otimes F_{n_1}\big)Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}\,, \qquad (1)$$

*где $q=(q_1,q_2,\dots,q_s)$ — сопряжённый вектор параметров.*

В разделе 2 приводится доказательство теоремы 1, в разделе 3 — доказательство теоремы 2. Раздел 4 посвящён детальному обсуждению полученных результатов.

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

**2.1.** Начнём с двух предварительных утверждений.

**ЛЕММА 1.** *При $\nu\in 2:s$ имеет место рекуррентное соотношение*

$$\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)}(j+j_\nu\,\Delta_\nu)=\big\langle n_\nu\,\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\dots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\dots,p_{\nu-1})}(j)+\Delta_\nu\,\mathrm{perm}_{n_\nu}^{(p_\nu)}(j_\nu)\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\,,$$

*где $j\in 0:\Delta_\nu-1$, $j_\nu\in 0:n_\nu-1$.*

Доказательство. Пусть $j=j_1+j_2\,\Delta_2+\dots+j_{\nu-1}\,\Delta_{\nu-1}$. Пользуясь формулой $\langle k\,n\rangle_{mn}=n\,\langle k\rangle_m$, получаем

$$\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)}(j+j_\nu\,\Delta_\nu)=\left\langle\sum_{\alpha=1}^{\nu}j_\alpha\,p_\alpha\frac{\Delta_{\nu+1}}{n_\alpha}\right\rangle_{\Delta_{\nu+1}}=$$

$$=\left\langle n_\nu\sum_{\alpha=1}^{\nu-1}j_\alpha\,p_\alpha\frac{\Delta_\nu}{n_\alpha}+j_\nu\,p_\nu\,\Delta_\nu\right\rangle_{\Delta_\nu n_\nu}=\left\langle n_\nu\Big\langle\sum_{\alpha=1}^{\nu-1}j_\alpha\,p_\alpha\frac{\Delta_\nu}{n_\alpha}\Big\rangle_{\Delta_\nu}+\Delta_\nu\langle j_\nu\,p_\nu\rangle_{n_\nu}\right\rangle_{\Delta_\nu n_\nu}=$$

$$=\big\langle n_\nu\,\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\dots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\dots,p_{\nu-1})}(j)+\Delta_\nu\,\mathrm{perm}_{n_\nu}^{(p_\nu)}(j_\nu)\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\,.$$

Лемма доказана. □

**ЛЕММА 2.** *Для параметрических матриц перестановок при* $\nu \in 2:s$ *справедливо рекуррентное соотношение*

$$Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\ldots,p_\nu)} = \big(Perm_{n_\nu}^{(p_\nu)} \otimes Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\nu-1})}\big) Perm_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,1)}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Возьмём произвольный $\Delta_{\nu+1}$-мерный вектор $x$ и обозначим $X = Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\ldots,p_\nu)}\, x$. Тогда при $j \in 0 : \Delta_\nu - 1$, $j_\nu \in 0 : n_\nu - 1$ в силу леммы 1

$$\begin{aligned} X(j + j_\nu\, \Delta_\nu) &= x\big(\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\ldots,p_\nu)}(j + j_\nu\, \Delta_\nu)\big) = \\ &= x\big(\big\langle n_\nu\, \mathrm{perm}_{n_1,n_2,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\nu-1})}(j) + \Delta_\nu\, \mathrm{perm}_{n_\nu}^{(p_\nu)}(j_\nu)\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее, поскольку $\mathrm{perm}_{n_1,n_2}^{(p_1,p_2)}(j_1 + j_2\, n_1) = \langle j_1\, p_1 n_2 + j_2\, p_2 n_1\rangle_{n_1 n_2}$, то для вектора $Y = Perm_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,1)} x$ имеем

$$Y(j + j_\nu\, \Delta_\nu) = x\big(\langle j\, n_\nu + j_\nu\, \Delta_\nu\rangle_{\Delta_\nu n_\nu}\big)\,.$$

Найдём компоненты вектора $Z = \big(Perm_{n_\nu}^{(p_\nu)} \otimes Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\nu-1})}\big)\, Y$. Запишем

$$\begin{aligned} Z(j + j_\nu\, \Delta_\nu) &= \sum_{j'_\nu=0}^{n_\nu-1} \sum_{j'=0}^{\Delta_\nu-1} \big(Perm_{n_\nu}^{(p_\nu)} \otimes Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\nu-1})}\big)[j_\nu\, \Delta_\nu + j, j'_\nu\, \Delta_\nu + j'] \times \\ &\times Y(j'_\nu\, \Delta_\nu + j') = \sum_{j'_\nu=0}^{n_\nu-1} \sum_{j'=0}^{\Delta_\nu-1} Perm_{n_\nu}^{(p_\nu)}[j_\nu, j'_\nu] \times Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\nu-1})}[j, j'] \times \\ &\times Y(j' + j'_\nu\, \Delta_\nu) = Y\big(\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\nu-1})}(j) + \Delta_\nu\, \mathrm{perm}_{n_\nu}^{(p_\nu)}(j_\nu)\big) = \\ &= x\big(\big\langle n_\nu\, \mathrm{perm}_{n_1,n_2,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\nu-1})}(j) + \Delta_\nu\, \mathrm{perm}_{n_\nu}^{(p_\nu)}(j_\nu)\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), приходим к равенству $Z = X$. Отсюда очевидным образом следует (2). Лемма доказана. □

**2.2.** Обратимся к доказательству теоремы 1. При $s = 2$ её заключение совпадает с (2) при $\nu = 2$. Сделаем индукционный переход от $s$ к $s + 1$.

Согласно (2), индукционному предположению и связи кронекерова умножения с обычным умножением матриц [1] имеем

$$\begin{aligned} Perm_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}}^{(p_1,\ldots,p_s,p_{s+1})} &= \big(Perm_{n_{s+1}}^{(p_{s+1})} \otimes Perm_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}\big) Perm_{\Delta_{s+1},n_{s+1}}^{(1,1)} = \\ &= \Big\{\big[Perm_{n_{s+1}}^{(p_{s+1})}\, \underbrace{I_{n_{s+1}} \ldots I_{n_{s+1}}}_{(s-1)\ \text{раз}}\big] \otimes \Big[\big(Perm_{n_s}^{(p_s)} \otimes Perm_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \cdots \otimes Perm_{n_1}^{(p_1)}\big) \times \end{aligned}$$

$$\times \prod_{\nu=2}^{s} \big(I_{n_{\nu+1}\cdots n_s} \otimes Perm^{(1,1)}_{\Delta_\nu, n_\nu}\big)\Big]\Big\}\big(I_1 \otimes Perm^{(1,1)}_{\Delta_{s+1}, n_{s+1}}\big) =$$

$$= \big(Perm^{(p_{s+1})}_{n_{s+1}} \otimes Perm^{(p_s)}_{n_s} \otimes \cdots \otimes Perm^{(p_1)}_{n_1}\big) \prod_{\nu=2}^{s+1} \big(I_{n_{\nu+1}\cdots n_s n_{s+1}} \otimes Perm^{(1,1)}_{\Delta_\nu, n_\nu}\big)\,.$$

Теорема доказана. □

# 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Проверим равенство, эквивалентное (1):

$$Perm^{(q_1,q_2,\ldots,q_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s} F_N \big(Perm^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big)^T = F_{n_s} \otimes F_{n_{s-1}} \otimes \cdots \otimes F_{n_1}\,. \tag{5}$$

В силу определения кронекерова умножения матриц

$$\begin{gathered}\Big(F_{n_s} \otimes F_{n_{s-1}} \otimes \cdots \otimes F_{n_1}\Big)\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, \Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, \Delta_\nu\Big] = \\ = \prod_{\nu=1}^{s} F_{n_\nu}[k_\nu, j_\nu] = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}\,.\end{gathered} \tag{6}$$

Вместе с тем,

$$\begin{gathered}\Big(Perm^{(q_1,q_2,\ldots,q_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s} F_N \big(Perm^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big)^T\Big)\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, \Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, \Delta_\nu\Big] = \\ = \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{l'=0}^{N-1} Perm^{(q_1,q_2,\ldots,q_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, \Delta_\nu, l\Big] \times F_N[l,l'] \times Perm^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\Big[\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, \Delta_\nu, l'\Big] = \\ = F_N\Big[\mathrm{perm}^{(q_1,q_2,\ldots,q_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\Big(\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, \Delta_\nu\Big), \mathrm{perm}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\Big(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, \Delta_\nu\Big)\Big] = \\ = \omega_N^{\left(\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, q_\nu B_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu B_\nu\right)} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu\, \langle q_\nu p_\nu B_\nu\rangle_{n_\nu}} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}\,.\end{gathered} \tag{7}$$

Мы воспользовались формулой $\langle q_\nu p_\nu B_\nu\rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1:s$, справедливой в силу определения $q_\nu$.

Сравнивая (6) и (7), приходим к (5). Теорема доказана. □

# 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**4.1.** Очевидно, что $Perm^{(1)}_{n_\nu} = I_{n_\nu}$. Из теоремы 1 при $p_1 = p_2 = \cdots = p_s = 1$ следует разложение матрицы руританских перестановок:

$$Perm^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=2}^{s} \big(I_{N_\nu} \otimes Perm^{(1,1)}_{\Delta_\nu, n_\nu}\big)\,.$$

Более того, само заключение теоремы 1 можно переписать в виде

$$Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)} = \big(Perm_{n_s}^{(p_s)} \otimes Perm_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \cdots \otimes Perm_{n_1}^{(p_1)}\big) Perm_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(1,1,\ldots,1)} .$$

**4.2.** Теорема 2 при $p_1 = p_2 = \cdots = p_s = 1$ по существу установлена Гудом [2, 3]. Отметим, что компоненты вектора параметров $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$, сопряжённого с $p = (1, 1, \ldots, 1)$, определяются из условия $\langle q_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1 : s$. Матрица перестановок с таким $q$ называется *матрицей китайских перестановок.*

Идея использования вектора параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ при факторизации матрицы Фурье принадлежит М. Б. Свердлику [4].

В связи с теоремой 2 вызывают интерес *самосопряжённые векторы параметров* $p$, такие, что сопряжённый вектор параметров $q$ совпадает с $p$. В этом случае в разложении (1) присутствует только одна матрица перестановок.

Обозначим через $b_\nu$ единственное на множестве $1 : n_\nu - 1$ решение уравнения $\langle x B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$. Самосопряжённый вектор параметров существует тогда и только тогда, когда при всех $\nu \in 1 : s$ число $b_\nu$ является квадратичным вычетом по модулю $n_\nu$ [5].

Пусть $p_\nu$ — решение уравнения $\langle x^2 \rangle_{n_\nu} = b_\nu$. В этом случае вектор параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ будет самосопряжённым. Например, при $s = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 25$ существует четыре самосопряжённых векторов параметров: $p = (1, 12)$, $p = (1, 13)$, $p = (3, 12)$ и $p = (3, 13)$. Подробности см. в [5].

Ещё один пример: при $s = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ самосопряжённым будет руританский вектор параметров $p = (1, 1, 1)$.

Теорема 2 вместе с теоремой 1 дают наиболее глубокую параметрическую факторизацию матрицы Фурье $F_N$ при $N = n_1 n_2 \cdots n_s$ с попарно взаимно простыми сомножителями $n_\nu$.

**4.3.** В заключение укажем явный вид перестановки, обратной к $\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}$. Пусть $k \in 0 : N - 1$. Тогда

$$\big(\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}\big)^{-1}(k) = \sum_{\nu=1}^{s} \langle k\, q_\nu \rangle_{n_\nu}\, \Delta_\nu ,$$

где $q_\nu$ — компоненты сопряжённого с $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ вектора параметров.

Нужно проверить, что

$$\Big\langle \sum_{\nu=1}^{s} \langle k\, q_\nu \rangle_{n_\nu}\, p_\nu B_\nu \Big\rangle_N = k \,. \tag{8}$$

Обозначим левую часть равенства (8) через $k'$. Запишем

$$\sum_{\nu=1}^{s} \langle k\, q_\nu \rangle_{n_\nu}\, p_\nu B_\nu = t\, N + k' .$$

Взяв вычеты по модулю $n_\mu$, получим $\big\langle \langle k\, q_\mu \rangle_{n_\mu} p_\mu B_\mu \big\rangle_{n_\mu} = \langle k' \rangle_{n_\mu}$, или $\big\langle k\, \langle q_\mu p_\mu B_\mu \rangle_{n_\mu} \big\rangle_{n_\mu} = \langle k' \rangle_{n_\mu}$, или $\langle k \rangle_{n_\mu} = \langle k' \rangle_{n_\mu}$. Значит, разность $k - k'$ делится на $n_\mu$ при всех $\mu \in 1 : s$. В силу попарной взаимной простоты $n_\mu$ разность $k-k'$ делится на произведение $n_1 n_2 \cdots n_s = N$. Поскольку к тому же $|k-k'| \leqslant N-1$, то необходимо $k = k'$. Утверждение доказано.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Перестановки и кронекерово произведение матриц* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 24 и 31 марта 2004 г.

2. Гуд И. Дж. *О взаимоотношении между двумя быстрыми преобразованиями Фурье* / В кн.: Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов.* М.: Радио и связь, 1983. С. 136–147.

3. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Факторизация Гуда матрицы Фурье* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 5 мая 2004 г.

4. Свердлик М. Б. *Матричная интерпретация алгоритма БПФ для взаимно простых сомножителей* // Радиотехника и электроника. 1983. № 10. С. 1931–1938.

5. Малозёмов В. Н. *Параметрическое кодирование индексов* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 19 мая 2004 г.