ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МНОГОМЕРНОГО БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ*

О. В. Просеков

sc2@pisem.net

26 сентября 2006 г.

1°. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_t$ — натуральные числа, отличные от единицы. Введём обозначения

$$\begin{aligned} m &= (m_1, m_2, \ldots, m_t)\,; \\ M &= m_1 m_2 \cdots m_t\,; \\ M_\mu &= m_{\mu+1} m_{\mu+2} \cdots m_t \quad \text{при } \mu \in 0 : t-1, \quad N_t = 1\,; \\ \Lambda_1 &= 1\,; \quad \Lambda_\mu = m_1 m_2 \cdots m_{\mu-1} \quad \text{при } \mu \in 2 : t+1\,. \end{aligned}$$

Многомерное дискретное преобразование Фурье сигнала $x_m \in C_{m_1} \times C_{m_2} \times \times \cdots \times C_{m_t}$, определяется формулой

$$X_m(k_1, k_2, \ldots, k_t) = \sum_{j_t=0}^{m_t-1} \cdots \sum_{j_2=0}^{m_2-1} \sum_{j_1=0}^{m_1-1} x_m(j_1, j_2, \ldots, j_t)\, \omega_{m_1}^{-k_1 j_1} \omega_{m_2}^{-k_2 j_2} \cdots \omega_{m_t}^{-k_t j_t}\,,$$

где $k_\mu \in 0 : m_\mu - 1$, $\mu \in 1 : t$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* $x(j_1 + j_2\,\Lambda_1 + \cdots + j_t\,\Lambda_t) = x_m(j_1, j_2, \ldots, j_t)$ *и*

$$X = \left(\bar F_{m_t} \otimes \cdots \otimes \bar F_{m_2} \otimes \bar F_{m_1}\right) x\,,$$

где $\bar F_{m_\mu}[k, j] = \omega_{m_\mu}^{-kj}$, $k, j \in 0 : m_\mu - 1$, $\mu \in 1 : t$. *Тогда*

$$X_m(k_1, k_2, \ldots, k_t) = X(k_1 + k_2\,\Lambda_1 + \cdots + k_t\,\Lambda_t).$$

---

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Доказательство. В силу известного свойства кронекерова умножения матриц [1] имеем

$$\Big(\bar F_{m_t}\otimes\cdots\otimes\bar F_{m_2}\otimes\bar F_{m_1}\Big)\Big[\sum_{\mu=1}^{t}k_\mu\,\Lambda_\mu,\ \sum_{\mu=1}^{t}j_\mu\,\Lambda_\mu\Big]=\prod_{\mu=1}^{t}\bar F_{m_\mu}[k_\mu,j_\mu]=\prod_{\mu=1}^{t}\omega_{m_\nu}^{-k_\mu j_\mu}\,.$$

Поэтому

$$X\Big(\sum_{\mu=1}^{t}k_\mu\,\Lambda_\mu\Big)=$$

$$=\sum_{j_t=0}^{m_t-1}\cdots\sum_{j_2=0}^{m_2-1}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}\Big(\bar F_{m_t}\otimes\cdots\otimes\bar F_{m_2}\otimes\bar F_{m_1}\Big)\Big[\sum_{\mu=1}^{t}k_\mu\,\Lambda_\mu,\ \sum_{\mu=1}^{t}j_\mu\,\Lambda_\mu\Big]\times$$

$$\times\,x\Big(\sum_{\mu=1}^{t}j_\mu\,\Lambda_\mu\Big)=\sum_{j_t=0}^{m_t-1}\cdots\sum_{j_2=0}^{m_2-1}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}x\Big(\sum_{\mu=1}^{t}j_\mu\,\Lambda_\mu\Big)\prod_{\mu=1}^{t}\omega_{m_\nu}^{-k_\mu j_\mu}=$$

$$=\sum_{j_t=0}^{m_t-1}\cdots\sum_{j_2=0}^{m_2-1}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}x_m(j_1,j_2,\ldots,j_t)\prod_{\mu=1}^{t}\omega_{m_\nu}^{-k_\mu j_\mu}=X_m(k_1,k_2,\ldots,k_t)\,.$$

Предложение доказано. □

2°. Рассмотрим один из вариантов факторизации матрицы $F_{m_t}\otimes\cdots\otimes F_{m_2}\otimes\otimes F_{m_1}$. Введём матрицу $n=\{n_{\nu,\mu}\}$ ($\nu\in 1:s$, $\mu\in 1:t$), такую, что $m_\mu=n_{1,\mu}\times\times n_{2,\mu}\cdots n_{s,\mu}$. Считаем $n_{\nu,\mu}\geqslant 1$. Пусть

$$N_{\nu,\mu}=n_{\nu+1,\mu}n_{\nu+2,\mu}\cdots n_{s,\mu}\quad\text{при }\nu\in 0:s-1,\quad N_{s,\mu}=1\,;$$
$$\Delta_{1,\mu}=1\,;\quad \Delta_{\nu,\mu}=n_{1,\mu}n_{2,\mu}\cdots n_{\nu-1,\mu}\quad\text{при }\nu\in 2:s+1\,.$$

Выберем матрицу параметров $p=\{p_{\nu,\mu}\}$ ($\nu\in 1:s$, $\mu\in 1:t$), такую, что каждое $p_{\nu,\mu}$ взаимно просто с $n_{\nu,\mu}$. Тогда матрицы Фурье F_{m_μ} допускают параметрическое представление [2]

$$F_{m_\mu}=\big(Rev_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(q_{1,\mu},\ldots,q_{s,\mu})}\big)^T\Big(\prod_{\nu=1}^{s}\big(I_{N_{\nu,\mu}}\otimes Twid_{n_{1,\mu},\ldots,n_{\nu-1,\mu},n_{\nu,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{\nu-1,\mu},q_{\nu,\mu})}\big)\times$$
$$\times\big(I_{N_{\nu,\mu}}\otimes F_{n_{\nu,\mu}}\otimes I_{\Delta_{\nu,\mu}}\big)\Big)Mix_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{s,\mu})}\,.\qquad(1)$$

В этой формуле $q=\{q_{\nu,\mu}\}$ — матрица сопряжённых параметров; при $n_{\nu,\mu}>1$ соответствующее $q_{\nu,\mu}$ определяется соотношением $\langle q_{\nu,\mu}\,p_{\nu,\mu}\rangle_{n_{\nu,\mu}}=1$, при $n_{\nu,\mu}==1$ соответствующее $q_{\nu,\mu}$ равно нулю. Матрица $Twid_{n_{1,\mu},\ldots,n_{\nu-1,\mu},n_{\nu,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{\nu-1,\mu},p_{\nu,\mu})}$ — диагональная параметрическая матрица вращений с элементами

$$Twid_{n_{1,\mu},\ldots,n_{\nu-1,\mu},n_{\nu,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{\nu-1,\mu},p_{\nu,\mu})}\Big[\sum_{\alpha=1}^{\nu}j_\alpha\,\Delta_{\alpha,\mu},\ \sum_{\alpha=1}^{\nu}j_\alpha\,\Delta_{\alpha,\mu}\Big]=\omega_{\Delta_{\nu+1,\mu}}^{j_\nu\,p_\nu\sum_{\alpha=1}^{\nu-1}j_\alpha\,p_{\alpha,\mu}\Delta_{\alpha,\mu}}\,.\qquad(2)$$

Здесь $\nu\in 2:s$, $\mu\in 1:t$ и $j_\alpha\in 0:n_{\alpha,\mu}-1$. Напомним, что $Twid_{n_{1,\mu}}^{(p_{1,\mu})}=I_{n_{1,\mu}}$.

Матрицы $Mix^{(p_{1,\mu},\dots,p_{s,\mu})}_{n_{1,\mu},\dots,n_{s,\mu}}$ и $Rev^{(q_{1,\mu},\dots,q_{s,\mu})}_{n_{1,\mu},\dots,n_{s,\mu}}$ допускают разложения [2]

$$Mix^{(p_{1,\mu},\dots,p_{s,\mu})}_{n_{1,\mu},\dots,n_{s,\mu}} = \prod_{\nu=0}^{s-1}\bigl(Mix^{(p_{s-\nu,\mu},1)}_{n_{s-\nu,\mu},N_{s-\nu,\mu}} \otimes I_{\Delta_{s-\nu,\mu}}\bigr)\,, \tag{3}$$

$$Rev^{(q_{1,\mu},\dots,q_{s,\mu})}_{n_{1,\mu},\dots,n_{s,\mu}} = \prod_{\nu=1}^{s}\bigl(I_{N_{\nu,\mu}} \otimes Rev^{(1,q_{\nu,\mu})}_{\Delta_{\nu,\mu},n_{\nu,\mu}}\bigr)\,. \tag{4}$$

Если $n_{\nu,\mu}=1$, то $Mix^{(p_{s-\nu,\mu},1)}_{1,N_{s-\nu,\mu}} = I_{N_{s-\nu,\mu}}$ и $Rev^{(1,0)}_{\Delta_{\nu,\mu},1} = I_{\Delta_{\nu,\mu}}$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *При любой матрице параметров $p=\{p_{\nu,\mu}\}$ матрица $F_{m_t}\otimes$ $\otimes\cdots\otimes F_{m_2}\otimes F_{m_1}$ допускает представление*

$$F_{m_t}\otimes\cdots\otimes F_{m_2}\otimes F_{m_1} = \bigl(R^{(q)}_m\bigr)^T\left(\prod_{\nu=1}^{s} T^{(\nu)}_m \prod_{\mu=1}^{t}\bigl(I_{M_\mu N_{\nu,\mu}}\otimes F_{n_{\nu,\mu}}\otimes I_{\Lambda_\mu\Delta_{\nu,\mu}}\bigr)\right)S^{(p)}_m\,, \tag{5}$$

где $q=\{q_{\nu,\mu}\}$ — матрица сопряжённых параметров; $S^{(p)}_m$ и $R^{(q)}_m$ — матрицы перестановок вида

$$S^{(p)}_m = \prod_{\nu=0}^{s-1}\prod_{\mu=1}^{t}\bigl(I_{M_\mu}\otimes Mix^{(p_{s-\nu,\mu},1)}_{n_{s-\nu,\mu},N_{s-\nu,\mu}}\otimes I_{\Delta_{s-\nu,\mu}\Lambda_\mu}\bigr)\,, \tag{6}$$

$$R^{(q)}_m = \prod_{\nu=1}^{s}\prod_{\mu=1}^{t}\bigl(I_{M_\mu N_{\nu,\mu}}\otimes Rev^{(1,q_{\nu,\mu})}_{\Delta_{\nu,\mu},n_{\nu,\mu}}\otimes I_{\Lambda_\mu}\bigr)\,; \tag{7}$$

$T^{(\nu)}_m$ — диагональная матрица с элементами

$$T^{(\nu)}_m\Bigl[\sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\,\Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu,\ \sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\,\Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu\Bigr] = \prod_{\mu=1}^{t}\omega_{\Delta_{\nu+1,\mu}}^{j_{\nu,\mu}\,q_{\nu,\mu}\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_{\alpha,\mu}\,p_{\alpha,\mu}\Delta_{\alpha,\mu}}\,, \tag{8}$$

где $\nu\in 2:s$, $\mu\in 1:t$ и $j_\alpha\in 0:n_{\alpha,\mu}-1$.

Доказательство. Нам понадобятся следующие свойства кронекерова умножения матриц [3]:

$$A^{(t)}_{m_t}\otimes\cdots\otimes A^{(2)}_{m_2}\otimes A^{(1)}_{m_1} = \prod_{\mu=1}^{t}\bigl(I_{M_\mu}\otimes A^{(\mu)}_{m_\mu}\otimes I_{\Lambda_\mu}\bigr)\,, \tag{9}$$

$$\prod_{\nu=1}^{s}\bigl(A^{(\nu)}_{m_1}\otimes B^{(\nu)}_{m_2}\otimes\cdots\otimes G^{(\nu)}_{m_t}\bigr) =$$

$$= \left(\prod_{\nu=1}^{s}A^{(\nu)}_{m_1}\right)\otimes\left(\prod_{\nu=1}^{s}B^{(\nu)}_{m_2}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\prod_{\nu=1}^{s}G^{(\nu)}_{m_t}\right). \tag{10}$$

Сомножители в правой части (9) можно переставлять в любом порядке.

Выведем формулу (5), опираясь на приведённые свойства кронекерова умножения. На этом пути мы получим формулы (6), (7) и (8).

Введём обозначения

$$S_{m_\mu}^{(\mu)} = Mix_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{s,\mu})}\,, \qquad R_{m_\mu}^{(\mu)} = Rev_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(q_{1,\mu},\ldots,q_{s,\mu})}\,,$$
$$T_{m_\mu}^{(\nu)} = I_{N_{\nu,\mu}} \otimes Twid_{n_{1,\mu},\ldots,n_{\nu-1,\mu},n_{\nu,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{\nu-1,\mu},q_{\nu,\mu})}\,, \quad D_{m_\mu}^{(\nu)} = I_{N_{\nu,\mu}} \otimes F_{n_{\nu,\mu}} \otimes I_{\Delta_{\nu,\mu}}\,.$$
$$H_{m_\mu}^{(\mu)} = \prod_{\nu=1}^{s} T_{m_\mu}^{(\nu)} D_{m_\mu}^{(\nu)}\,.$$

В этих обозначениях формула (1) примет следующий вид

$$F_{m_\mu} = \left(R_{m_\mu}^{(\mu)}\right)^T H_{m_\mu}^{(\mu)} S_{m_\mu}^{(\mu)}\,.$$

Тогда

$$\begin{gathered} F_{m_t} \otimes \cdots \otimes F_{m_2} \otimes F_{m_1} = \\ = \left(\left(R_{m_t}^{(t)}\right)^T H_{m_t}^{(t)} S_{m_t}^{(t)}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\left(R_{m_2}^{(2)}\right)^T H_{m_2}^{(2)} S_{m_2}^{(2)}\right) \otimes \left(\left(R_{m_1}^{(1)}\right)^T H_{m_1}^{(1)} S_{m_1}^{(1)}\right) = \\ = \left(R_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes R_{m_2}^{(2)} \otimes R_{m_1}^{(1)}\right)^T \left(H_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes H_{m_2}^{(2)} \otimes H_{m_1}^{(1)}\right) \times \\ \times \left(S_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes S_{m_2}^{(2)} \otimes S_{m_1}^{(1)}\right). \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь мы использовали свойство (10). Разберёмся с матрицами перестановок в формуле (11). Учитывая разложения (3), (4) и пользуясь (9), получаем

$$\begin{aligned} S_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes S_{m_2}^{(2)} \otimes S_{m_1}^{(1)} &= \prod_{\mu=1}^{t} \left(I_{M_\mu} \otimes Mix_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{s,\mu})} \otimes I_{\Lambda_\mu}\right) = \\ &= \prod_{\nu=0}^{s-1} \prod_{\mu=1}^{t} \left(I_{M_\mu} \otimes Mix_{n_{s-\nu,\mu},N_{s-\nu,\mu}}^{(p_{s-\nu,\mu},1)} \otimes I_{\Delta_{s-\nu,\mu}\Lambda_\mu}\right) = S_m^{(p)}\,, \\ R_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes R_{m_2}^{(2)} \otimes R_{m_1}^{(1)} &= \prod_{\mu=1}^{t} \left(I_{M_\mu} \otimes Rev_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(q_{1,\mu},\ldots,q_{s,\mu})} \otimes I_{\Lambda_\mu}\right) = \\ &= \prod_{\nu=1}^{s} \prod_{\mu=1}^{t} \left(I_{M_\mu N_{\nu,\mu}} \otimes Rev_{\Delta_{\nu,\mu},n_{\nu,\mu}}^{(1,q_{\nu,\mu})} \otimes I_{\Lambda_\mu}\right) = R_m^{(q)}\,. \end{aligned}$$

Формулы (6) и (7) установлены.

В силу определения матрицы $H_{m_\mu}^{(\mu)}$ и свойства (10) приходим к следующему соотношению

$$H_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes H_{m_2}^{(2)} \otimes H_{m_1}^{(1)} = \prod_{\nu=1}^{s} \left(T_{m_t}^{(\nu)} \otimes \cdots \otimes T_{m_2}^{(\nu)} \otimes T_{m_1}^{(\nu)}\right) \times$$
$$\times \left(D_{m_t}^{(\nu)} \otimes \cdots \otimes D_{m_2}^{(\nu)} \otimes D_{m_1}^{(\nu)}\right). \quad (12)$$

Разберёмся с диагональной матрицей $T_{m_t}^{(\nu)} \otimes \cdots \otimes T_{m_2}^{(\nu)} \otimes T_{m_1}^{(\nu)}$. Имеем

$$T_{m_t}^{(\nu)} \otimes \cdots \otimes T_{m_2}^{(\nu)} \otimes T_{m_1}^{(\nu)} = \left(I_{N_{\nu,t}} \otimes Twid_{n_{1,t},\ldots,n_{\nu-1,t},n_{\nu,t}}^{(p_{1,t},\ldots,p_{\nu-1,t},q_{\nu,t})}\right) \otimes \cdots \otimes$$
$$\otimes \left(I_{N_{\nu,2}} \otimes Twid_{n_{1,2},\ldots,n_{\nu-1,2},n_{\nu,2}}^{(p_{1,2},\ldots,p_{\nu-1,2},q_{\nu,2})}\right) \otimes \left(I_{N_{\nu,1}} \otimes Twid_{n_{1,1},\ldots,n_{\nu-1,1},n_{\nu,1}}^{(p_{1,1},\ldots,p_{\nu-1,1},q_{\nu,1})}\right).$$

По определению параметрической матрицы вращений (2) получим

$$\left(I_{N_{\nu,\mu}} \otimes Twid_{n_{1,\mu},\ldots,n_{\nu-1,\mu},n_{\nu,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{\nu-1,\mu},q_{\nu,\mu})}\right)\left[\sum_{\alpha=1}^{s} j_\alpha\, \Delta_{\alpha,\mu}, \sum_{\alpha=1}^{s} j_\alpha\, \Delta_{\alpha,\mu}\right] = \omega_{\Delta_{\nu+1,\mu}}^{j_\nu\, q_{\nu,\mu} \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\, p_{\alpha,\mu} \Delta_{\alpha,\mu}}.$$

Следовательно,

$$T_{m_t}^{(\nu)} \otimes \cdots \otimes T_{m_2}^{(\nu)} \otimes T_{m_1}^{(\nu)}\left[\sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu\right] =$$
$$= \prod_{\mu=1}^{t} \omega_{\Delta_{\nu+1,\mu}}^{j_{\nu,\mu}\, q_{\nu,\mu} \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_{\alpha,\mu}\, p_{\alpha,\mu}\Delta_{\alpha,\mu}} = T_m^{(\nu)}\left[\sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu\right].$$

Формула (8) установлена.

Пусть $D_m^{(\nu)} = D_{m_t}^{(\nu)} \otimes \cdots \otimes D_{m_2}^{(\nu)} \otimes D_{m_1}^{(\nu)}$. По свойству (9)

$$D_m^{(\nu)} = \prod_{\mu=1}^{t}\left(I_{M_\mu} \otimes D_{m_\mu}^{(\nu)} \otimes I_{\Lambda_\mu}\right) = \prod_{\mu=1}^{t}\left(I_{M_\mu N_{\nu,\mu}} \otimes F_{n_{\nu,\mu}} \otimes I_{\Lambda_\mu \Delta_{\nu,\mu}}\right). \quad (13)$$

Подставив формулы (12) и (13) в (11), получим (5).

Теорема доказана. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Матрицы $R_m^{(q)}$ и $S_m^{(p)}$ могут быть представлены в явном виде:

$$S_m^{(p)}\left[\sum_{\mu=1}^{t} j_\mu\, \Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{t} k_\mu\, \Lambda_\mu\right] = \left(S_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes S_{m_2}^{(2)} \otimes S_{m_1}^{(1)}\right)\left[\sum_{\mu=1}^{t} j_\mu\, \Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{t} k_\mu\, \Lambda_\mu\right] =$$
$$= \prod_{\mu=1}^{t} Mix_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{s,\mu})}[j_\mu, k_\mu] = \begin{cases} 1, & \text{если } k_\mu = \mathrm{mix}_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(p_{1,\mu},\ldots,p_{s,\mu})}(j_\mu), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$R_m^{(q)}\left[\sum_{\mu=1}^{t} j_\mu\, \Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{t} k_\mu\, \Lambda_\mu\right] = \left(R_{m_t}^{(t)} \otimes \cdots \otimes R_{m_2}^{(2)} \otimes R_{m_1}^{(1)}\right)\left[\sum_{\mu=1}^{t} j_\mu\, \Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{t} k_\mu\, \Lambda_\mu\right] =$$
$$= \prod_{\mu=1}^{t} Rev_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(q_{1,\mu},\ldots,q_{s,\mu})}[j_\mu, k_\mu] = \begin{cases} 1, & \text{если } k_\mu = \mathrm{rev}_{n_{1,\mu},\ldots,n_{s,\mu}}^{(q_{1,\mu},\ldots,q_{s,\mu})}(j_\mu), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку $Twid_{n_{1,\mu}}^{(p_{1,\mu})} = I_{n_{1,\mu}}$, то $T_m^{(1)} = I_M$.

3°. Рассмотрим пример. Пусть $m = (24, 6, 2)$ и

$$n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По формуле (5) получим

$$\begin{aligned} F_{24} \otimes F_6 \otimes F_2 = \big(R_m^{(q)}\big)^T \Big(& T_m^{(1)} \big(I_{144} \otimes F_2 \otimes I_1\big)\big(I_{12} \otimes F_1 \otimes I_{24}\big)\big(I_2 \otimes F_1 \otimes I_{144}\big) \times \\ & \times T_m^{(2)} \big(I_{48} \otimes F_3 \otimes I_2\big)\big(I_6 \otimes F_2 \otimes I_{24}\big)\big(I_2 \otimes F_1 \otimes I_{144}\big) \times \\ & \times T_m^{(3)} \big(I_{12} \otimes F_4 \otimes I_6\big)\big(I_2 \otimes F_3 \otimes I_{48}\big)\big(I_1 \otimes F_2 \otimes I_{144}\big)\Big) S_m^{(p)} = \\ = \big(R_m^{(q)}\big)^T \Big(& \big(I_{144} \otimes F_2\big) T_m^{(2)} \big(I_{48} \otimes F_3 \otimes I_2\big)\big(I_6 \otimes F_2 \otimes I_{24}\big) \times \\ & \times T_m^{(3)} \big(I_{12} \otimes F_4 \otimes I_6\big)\big(I_2 \otimes F_3 \otimes I_{48}\big)\big(F_2 \otimes I_{144}\big)\Big) S_m^{(p)} . \end{aligned}$$

Матрица $S_m^{(p)}$ определяется формулой (6):

$$\begin{aligned} S_m^{(p)} = & \big(I_{12} \otimes Mix_{4,1}^{(3,1)} \otimes I_6\big)\big(I_2 \otimes Mix_{3,1}^{(2,1)} \otimes I_{48}\big)\big(I_1 \otimes Mix_{2,1}^{(3,1)} \otimes I_{144}\big) \times \\ & \times \big(I_{12} \otimes Mix_{3,4}^{(2,1)} \otimes I_2\big)\big(I_2 \otimes Mix_{2,3}^{(3,1)} \otimes I_{24}\big)\big(I_1 \otimes Mix_{1,2}^{(1,1)} \otimes I_{144}\big) \times \\ & \times \big(I_{12} \otimes Mix_{2,12}^{(3,1)} \otimes I_1\big)\big(I_2 \otimes Mix_{1,6}^{(1,1)} \otimes I_{24}\big)\big(I_1 \otimes Mix_{1,2}^{(1,1)} \otimes I_{144}\big) = \\ = & \big(I_{12} \otimes Mix_{4,1}^{(3,1)} \otimes I_6\big)\big(I_2 \otimes Mix_{3,1}^{(2,1)} \otimes I_{48}\big) \times \\ & \times \big(I_{12} \otimes Mix_{3,4}^{(2,1)} \otimes I_2\big)\big(I_2 \otimes Mix_{2,3}^{(3,1)} \otimes I_{24}\big)\big(I_{12} \otimes Mix_{2,12}^{(3,1)}\big) . \end{aligned}$$

Матрица $R_m^{(q)}$ определяется формулой (7):

$$\begin{aligned} R_m^{(q)} = & \big(I_{144} \otimes Rev_{1,2}^{(1,1)} \otimes I_1\big)\big(I_{12} \otimes Rev_{1,1}^{(1,0)} \otimes I_{24}\big)\big(I_2 \otimes Rev_{1,1}^{(1,0)} \otimes I_{144}\big) \times \\ & \times \big(I_{48} \otimes Rev_{2,3}^{(1,2)} \otimes I_1\big)\big(I_6 \otimes Rev_{1,2}^{(1,1)} \otimes I_{24}\big)\big(I_2 \otimes Rev_{1,1}^{(1,0)} \otimes I_{144}\big) \times \\ & \times \big(I_{12} \otimes Rev_{6,4}^{(1,3)} \otimes I_1\big)\big(I_2 \otimes Rev_{2,3}^{(1,2)} \otimes I_{24}\big)\big(I_1 \otimes Rev_{1,2}^{(1,1)} \otimes I_{144}\big) = \\ = & \big(I_{48} \otimes Rev_{2,3}^{(1,2)}\big)\big(I_{12} \otimes Rev_{6,4}^{(1,3)}\big)\big(I_2 \otimes Rev_{2,3}^{(1,2)} \otimes I_{24}\big) . \end{aligned}$$

Матрицы вращений $T_m^{(2)}$ и $T_m^{(3)}$ получаются следующие:

$$\begin{aligned} T_m^{(2)} \Big[\sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu} \Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu} \Lambda_\mu \Big] = \prod_{\mu=1}^{3} \omega_{\Delta_{3,\mu}}^{j_{2,\mu}\, q_{2,\mu}\, j_{1,\mu}\, p_{1,\mu} \Delta_{1,\mu}} = \\ = \omega_6^{6\, j_{2,1}\, j_{1,1}}\, \omega_2^{j_{2,2}\, j_{1,2}}\, \omega_1^{0\, j_{2,3}\, j_{1,3}} = 1 , \end{aligned}$$

$$T_m^{(3)}\Big[\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3} j_{\alpha,\mu}\,\Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu,\ \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3} j_{\alpha,\mu}\,\Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu\Big] = \prod_{\mu=1}^{3}\omega_{\Delta_{4,\mu}}^{j_{3,\mu}\,q_{3,\mu}\sum_{\alpha=1}^{2} j_{\alpha,\mu}\,p_{\alpha,\mu}\Delta_{\alpha,\mu}} =$$
$$= \omega_{24}^{3\,j_{3,1}\,(3\,j_{1,1}+4\,j_{2,1})}\,\omega_{6}^{2\,j_{3,2}\,(j_{1,2}+3\,j_{2,2})}\omega_{2}^{j_{3,3}\,(j_{1,3}+j_{2,3})} =$$
$$= \omega_{8}^{j_{3,1}\,(3\,j_{1,1}+4\,j_{2,1})}\,\omega_{6}^{6\,j_{3,2}\,j_{2,2}}\,\omega_{2}^{j_{3,3}} = \omega_{8}^{3\,j_{3,1}\,j_{1,1}}\,(-1)^{j_{3,1}\,j_{2,1}+j_{3,3}}\,.$$

В матрице $T_m^{(2)}$ все диагональные элементы тривиальные (равны 1), т. е. $T_m^{(2)} = I_{288}$. В матрице $T_m^{(3)}$ среди диагональных элементов 156 равны 1, 24 равны -1, 36 равны i и оставшиеся 72 — нетривиальные.

4°. Подсчитаем количество арифметических операций, необходимых для вычисления многомерного ДПФ. Обозначим через $\psi(N)$ количество комплексных умножений, необходимых для вычисления ДПФ длины N, а через $\eta(N)$ — количество комплексных сложений. В построчно-столбцевом подходе вычисления многомерного ДПФ [4, с. 259], когда к μ-й размерности применяется соответствующий одномерный алгоритм БПФ M/m_μ раз, нам потребуется следующее количество арифметических операций:

$$\psi(M) = \sum_{\mu=1}^{t}\psi(m_\mu)\,M/m_\mu =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{t} M/m_\mu \sum_{\nu=1}^{s}\big(N_{\nu,\mu}(\Delta_{\nu,\mu}-1)(n_{\nu,\mu}-1) + N_{\nu,\mu}\,\psi(n_{\nu,\mu})\,\Delta_{\nu,\mu}\big)\,,$$
$$\eta(M) = \sum_{\mu=1}^{t}\eta(m_\mu)\,M/m_\mu = \sum_{\mu=1}^{t} M/m_\mu \sum_{\nu=1}^{s} N_{\nu,\mu}\,\eta(n_{\nu,\mu})\,\Delta_{\nu,\mu}\,.$$

В теореме 1 диагональная матрица $T_m^{(\nu)}$ зависит от матриц параметров p и q. Обозначим через $\varphi_\nu(n,p,q)$ число комплексных нетривиальных элементов в матрице $T_m^{(\nu)}$. Понятно, что $\varphi_\nu(n,p,q) < M$.

В предложенном методе вычисления многомерного ДПФ, в формуле (5), потребуется следующее количество арифметических операций:

$$\psi(M) = \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{t} M_\mu N_{\nu,\mu}\,\psi(n_{\nu,\mu})\,\Delta_{\nu,\mu}\Lambda_\mu + \sum_{\nu=2}^{s}\varphi_\nu(n,p,q)\,,$$
$$\eta(M) = \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{t} M_\mu N_{\nu,\mu}\,\eta(n_{\nu,\mu})\,\Delta_{\nu,\mu}\Lambda_\mu\,.$$

Если в приведённом в п. 3 примере использовать алгоритмы БПФ малых порядков с $\psi(2) = 0$, $\eta(2) = 2$, $\psi(3) = 2$, $\eta(3) = 6$ и $\psi(4) = 0$, $\eta(4) = 8$ [5], то получим такой результат:

$$\begin{aligned}\psi(288) &= 144\cdot 0 + 48\cdot 2\cdot 2 + 6\cdot 0\cdot 2 + 12\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 2\cdot 48 + 0\cdot 144 + 72 = \\ &= 384 + 72 = 456\,, \\ \eta(288) &= 144\cdot 2 + 48\cdot 6\cdot 2 + 6\cdot 2\cdot 2 + 12\cdot 8\cdot 6 + 2\cdot 6\cdot 48 + 2\cdot 144 = 2328\,.\end{aligned}$$

В непараметрическом случае (все $p_\nu = q_\nu = 1$) число умножений будет равно

$$\psi(288) = 384 + 96 + 180 = 660\,.$$

Для построчно-столбцевого метода вычисления многомерного ДПФ число умножений будет равно

$$\psi(288) = 12\cdot 39 + 48\cdot 12 + 144\cdot 0 = 1044\,.$$

В заключение отметим, что результат, представленный в теореме 1, может быть использован в методе простых множителей [6]. Результат теоремы в непараметрическом случае для $M = 2^t$ был получен в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Факторизация матриц реверсных перестановок* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 2 мая 2006 г.

2. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Параметрическая факторизация матрицы Фурье* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 19 сентября 2006 г.

3. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Перестановки и кронекерово произведение матриц* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 24 и 31 марта 2004 г.

4. Блейхут Р. *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*. М.: Мир, 1989. 448 с.

5. Просеков О. В. *Быстрое преобразование Фурье малых порядков* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 6 декабря 2005 г.

6. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Параметрический вариант метода простых множителей* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 5 сентября 2006 г.

7. Власенко В. А., Лаппа Ю. М. *Матричный подход к построению быстрых алгоритмов многомерного ДПФ* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29. № 1. С. 86–89.