ПОЛЯРНАЯ ФОРМА ПОЛИНОМОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*

М. И. Григорьев — m_grigoriev@list.ru

А. Н. Сергеев — aser57@mail.ru

12 апреля 2008 г.

В докладе результаты из [1] переносятся на двумерный случай.

1°. Точки из $\mathbb{R}^2$ будем обозначать $\xi = (x, y)$, $\xi_i = (x_i, y_i)$.
Введём основные симметрические полиномы над переменными из $\mathbb{R}^2$:

$$\sigma_{00}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv 1,$$

$$\sigma_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{I_k \subset N} \sum_{J_s \subset N \setminus I_k} \prod_{i \in I_k} x_i \prod_{j \in J_s} y_j, \tag{1}$$

$$k, s \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k + s \leqslant n.$$

Суммирование в правой части (1) ведётся по всем подмножествам I_k множества $N = \{1, \ldots, n\}$, содержащим ровно k элементов, и по всем подмножествам J_s множества $N \setminus I_k$, содержащим ровно s элементов. Например,

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= x_1\,(y_2 + y_3) + x_2\,(y_1 + y_3) + x_3\,(y_1 + y_2), \\ \sigma_{21}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= x_1\,x_2\,y_3 + x_1\,x_3\,y_2 + x_2\,x_3\,y_1, \\ \sigma_{12}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= x_1\,y_2\,y_3 + x_2\,y_1\,y_3 + x_3\,y_1\,y_2\,. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \sigma_{k0}(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \sigma_k(x_1, \ldots, x_n), \qquad k \in 0 : n; \\ \sigma_{0s}(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= \sigma_s(y_1, \ldots, y_n), \qquad s \in 0 : n, \end{aligned}$$

где $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ и $\sigma_s(y_1, \ldots, y_n)$ — основные симметрические полиномы над переменными из $\mathbb{R}$.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Нетрудно понять, что полиномы σ_{ks} являются симметричными относительно своих аргументов, то есть не меняются при их перестановке.

В случае, когда все аргументы полинома σ_{ks} совпадают, получаем

$$\sigma_{ks}(\xi, \ldots, \xi) = C_n^k \, x^k \, C_{n-k}^s \, y^s = C_n^{k,s} \, x^k \, y^s, \tag{2}$$

где $C_n^{k,s} = \frac{n!}{k!\, s!\, (n-k-s)!}$ — так называемые *триномиальные* коэффициенты.

2°. Положим для удобства при $r \in 1 : n-1$

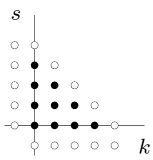

Рис. 1

$$\begin{aligned} \sigma_{k,-1}(\xi_1, \ldots, \xi_r) &\equiv 0, \quad k \in 0 : r+1, \\ \sigma_{-1,s}(\xi_1, \ldots, \xi_r) &\equiv 0, \quad s \in 0 : r+1, \\ \sigma_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_r) &\equiv 0, \quad k, s \geqslant 0, \quad k+s = r+1. \end{aligned} \tag{3}$$

Например, при $r = 3$ имеем 15 искусственно добавленных полиномов (рис. 1).

ЛЕММА 1. *Основные симметрические полиномы* (1) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned} \sigma_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}) = \sigma_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_r) &+ x_{r+1} \, \sigma_{k-1,s}(\xi_1, \ldots, \xi_r) + \\ &+ y_{r+1} \, \sigma_{k,s-1}(\xi_1, \ldots, \xi_r), \\ k, s \geqslant 0, \quad k+s \leqslant r+1, &\quad r \in 1 : n-1. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. При $k = s = 0$ утверждение тривиально. При $k = 0$, $s = r+1$ обе части (4) равны $y_1 \, y_2 \cdots y_{r+1}$. Пусть $k = 0$, $s \in 1 : r$. В этом случае соотношение (4) принимает вид

$$\sigma_s(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}) = \sigma_s(y_1, \ldots, y_r) + y_{r+1} \, \sigma_{s-1}(y_1, \ldots, y_r).$$

Справедливость этого равенства следует из определения основных симметрических полиномов над $\mathbb{R}$ (см., например, [1]).

Аналогично проводится доказательство при $s = 0$, $k \in 1 : r+1$.

Для упрощения дальнейших записей введём обозначения $R = \{1, \ldots, r\}$,

$$x_{I_k} = \prod_{i \in I_k} x_i, \qquad y_{J_s} = \prod_{j \in J_s} y_j.$$

При $k, s \geqslant 1,\ k+s = r+1$ по определению основных симметрических полиномов над $\mathbb{R}^2$ имеем

$$\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\xi_{r+1}) = x_{r+1} \sum_{I_{k-1}\subset R}\ \sum_{J_s = R\setminus I_{k-1}} x_{I_{k-1}}\, y_{J_s} +$$

$$+\, y_{r+1} \sum_{I_k\subset R}\ \sum_{J_{s-1} = R\setminus I_k} x_{I_k}\, y_{J_{s-1}} =$$

$$= x_{r+1}\, \sigma_{k-1,s}(\xi_1,\ldots,\xi_r) + y_{r+1}\, \sigma_{k,s-1}(\xi_1,\ldots,\xi_r).$$

Это соответствует (4), поскольку, согласно (3), $\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_r) \equiv 0$ при $k+s = r+1$.

Обратимся к основному случаю $k, s \geqslant 1$, $k+s \in 2:r$. Запишем

$$\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\xi_{r+1}) = \sum_{I_k\subset R}\ \sum_{J_s\subset R\setminus I_k} x_{I_k}\, y_{J_s} +$$

$$+\, x_{r+1} \sum_{I_{k-1}\subset R}\ \sum_{J_s\subset R\setminus I_{k-1}} x_{I_{k-1}}\, y_{J_s} + y_{r+1} \sum_{I_k\subset R}\ \sum_{J_{s-1}\subset R\setminus I_k} x_{I_k}\, y_{J_{s-1}} =$$

$$= \sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_r) + x_{r+1}\, \sigma_{k-1,s}(\xi_1,\ldots,\xi_r) + y_{r+1}\, \sigma_{k,s-1}(\xi_1,\ldots,\xi_r).$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 2. *При любом $r \in 1:n$ справедливо равенство*

$$\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\alpha\,\xi'_r + \beta\,\xi''_r,\ldots,\xi_n) = \alpha\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi'_r,\ldots,\xi_n) +$$
$$+\, \beta\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi''_r,\ldots,\xi_n),$$

если $\alpha + \beta = 1$.

Доказательство. В силу симметричности полиномов σ_{ks} достаточно рассмотреть случай $r = n$. Воспользуемся рекуррентным соотношением (4). Получим

$$\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\alpha\,\xi'_n + \beta\,\xi''_n) = \sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) +$$

$$+\, (\alpha\, x'_n + \beta\, x''_n)\,\sigma_{k-1,s}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) + (\alpha\, y'_n + \beta\, y''_n)\,\sigma_{k,s-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) =$$

$$= \alpha\big(\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) + x'_n\,\sigma_{k-1,s}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) + y'_n\,\sigma_{k,s-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\big) +$$

$$+\, \beta\big(\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) + x''_n\,\sigma_{k-1,s}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) + y''_n\,\sigma_{k,s-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\big) =$$

$$= \alpha\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\xi'_n) + \beta\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\xi''_n)\,.$$

Лемма доказана. $\square$

3°. *Полярной формой* полинома степени n от двух переменных вида

$$P(\xi) = P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} C_n^{k,s}\, a_{ks}\, x^k\, y^s \tag{5}$$

называется выражение

$$p(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, \sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_n). \tag{6}$$

Очевидно, что полярная форма является симметричной функцией своих аргументов. С порождающим полиномом её связывает соотношение

$$p(\xi,\ldots,\xi) = P(\xi).$$

(Здесь мы воспользовались формулой (2).) Значение полярной формы при конкретных значениях аргументов $\xi_1,\ldots,\xi_n$ называется полюсом полинома $P(\xi)$ вида (5).

Широко используемым свойством полярной формы является её мультиаффинность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При любом $r \in 1:n$ справедливо равенство*

$$p(\xi_1,\ldots,\alpha\,\xi_r' + \beta\,\xi_r'',\ldots,\xi_n) = \alpha\, p(\xi_1,\ldots,\xi_r',\ldots,\xi_n) + \\ + \beta\, p(\xi_1,\ldots,\xi_r'',\ldots,\xi_n),$$

если $\alpha + \beta = 1$.

Доказательство непосредственно следует из определения полярной формы и леммы 2.

4°. Покажем, как эффективно вычислять полюсы. Зафиксируем $\xi_1,\ldots,\xi_n$ и построим $n+1$ треугольных массивов $\{a_{ks}^i\}$ по правилу

$$a_{ks}^0 = a_{ks}, \quad k \in 0:n, \quad s \in 0:n-k;$$

$$a_{ks}^i = a_{ks}^{i-1} + x_{n-i+1}\, a_{k+1,s}^{i-1} + y_{n-i+1}\, a_{k,s+1}^{i-1}\,,$$

$$k \in 0:n-i, \quad s \in 0:n-i-k, \quad i = 1,\ldots,n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство* $p(\xi_1,\ldots,\xi_n)=a^n_{00}$.

Доказательство. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $n\geqslant 2$. Согласно рекуррентному соотношению (4) и соглашению (3) имеем

$$p(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}a_{ks}\big[\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+x_n\,\sigma_{k-1,s}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+$$

$$+\,y_n\,\sigma_{k,s-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\big]=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1-k}a_{ks}\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+$$

$$+\,x_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}a_{ks}\,\sigma_{k-1,s}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+y_n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-k}a_{ks}\,\sigma_{k,s-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1-k}\big[a^0_{ks}+x_n\,a^0_{k+1,s}+y_n\,a^0_{k,s+1}\big]\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1-k}a^1_{ks}\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}).$$

Продолжив аналогично, придём к требуемому равенству

$$p(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2-k}a^2_{ks}\,\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-2})=\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-k}a^{n-1}_{ks}\,\sigma_{ks}(\xi_1)=a^{n-1}_{00}+a^{n-1}_{01}\,y_1+a^{n-1}_{10}\,x_1=a^n_{00}\,.$$

Предложение доказано. □

5°. Зафиксируем три точки на плоскости ξ_0, ξ_1, ξ_2, не лежащие на одной прямой. Введём треугольный массив полюсов полинома $P(\xi)$ вида (5):

$$p(\underbrace{\xi_0,\ldots,\xi_0}_{k\ \text{раз}},\underbrace{\xi_1,\ldots,\xi_1}_{s\ \text{раз}},\underbrace{\xi_2,\ldots,\xi_2}_{(n-k-s)\ \text{раз}})=p(\xi_0^k,\xi_1^s,\xi_2^{n-k-s}),$$

$$k\in 0:n,\quad s\in 0:n-k. \tag{7}$$

Покажем, как по полюсам (7) восстановить значение $P(\xi)$ в любой точке $\xi\in\mathbb{R}^2$.

Разложим ξ по барицентрическим координатам относительно точек ξ_0, ξ_1, ξ_2 :

$$\xi = \alpha\,\xi_0 + \beta\,\xi_1 + (1-\alpha-\beta)\,\xi_2\,.$$

Запишем рекуррентную формулу

$$p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s-i}, \xi^i) = \alpha\, p(\xi_0^{k+1}, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s-i}, \xi^{i-1}) +$$
$$+\,\beta\, p(\xi_0^k, \xi_1^{s+1}, \xi_2^{n-k-s-i}, \xi^{i-1}) + (1-\alpha-\beta)\, p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s-i+1}, \xi^{i-1}),$$

справедливую в силу мультиаффинности и симметричности полярной формы. Если ввести обозначение

$$z_{ks}^i = p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s-i}, \xi^i),$$

то последняя формула примет вид

$$\begin{gathered} z_{ks}^i = (1-\alpha-\beta)\, z_{ks}^{i-1} + \alpha\, z_{k+1,s}^{i-1} + \beta\, z_{k,s+1}^{i-1}\,, \\ k \in 0:n-i, \quad s \in 0:n-i-k, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{8}$$

К этому нужно добавить начальные условия

$$z_{ks}^0 = p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s}), \quad k \in 0:n, \quad s \in 0:n-k. \tag{9}$$

Выполнив вычисления по формуле (8) при начальных условиях (9), найдём

$$z_{00}^n = p(\xi^n) = p(\xi, \ldots, \xi) = P(\xi).$$

Один шаг схемы (8) определяет треугольную процедуру *включения узла*, которая является аналогом процедуры включения узла в одномерном случае (см. [1]).

6°. Зафиксируем числа z_{ks}, $k \in 0:n$, $s \in 0:n-k$, и рассмотрим задачу *интерполяции по полюсам*: найти полином $P(\xi)$ вида (5), такой, что

$$p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s}) = z_{ks}, \qquad k \in 0:n, \quad s \in 0:n-k. \tag{10}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Интерполяционная задача* (10) *имеет решение при любых правых частях и это решение единственно.*

Доказательство. Напомним, что

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, \sigma_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Значит, (10) есть система линейных уравнений относительно коэффициентов a_{ks} полинома $P(\xi)$.

Рассмотрим однородную систему

$$p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s}) = 0, \qquad k \in 0:n, \quad s \in 0:n-k, \tag{11}$$

и покажем, что она имеет только нулевое решение. Отсюда будет следовать требуемое заключение.

Возьмём любое решение системы (11). Соответствующий полином вида (5) обозначим $P_0(\xi)$. По условию его полюсы $p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s})$, $k \in 0:n$, $s \in 0:n-k$, равны нулю. Применив процедуру включения узла (8), (9), получим, что $P_0(\xi) \equiv 0$. Но тогда и все коэффициенты полинома $P_0(\xi)$ равны нулю.

Предложение доказано. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Единственным решением интерполяционной задачи* (10) *является полином Бернштейна*

$$B(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} z_{ks}\, C_n^{k,s}\, \alpha^k\, \beta^s\, (1-\alpha-\beta)^{n-k-s}. \tag{12}$$

Здесь $\xi = \alpha\,\xi_0 + \beta\,\xi_1 + (1-\alpha-\beta)\,\xi_2$.

Доказательство. Нам известно, что задача (10) имеет единственное решение $P(\xi)$, и числа $z_{ks} = p(\xi_0^k, \xi_1^s, \xi_2^{n-k-s})$ являются полюсами полинома $P(\xi)$. По полюсам с помощью процедуры включения узла (8), (9) восстанавливаются значения $P(\xi)$ в любой точке $\xi \in \mathbb{R}^2$. Вместе с тем (и это замечательный факт!), по той же формуле (8) при $z_{ks}^0 = z_{ks}$, $k \in 0:n$, $s \in 0:n-k$, вычисляется значение правой части формулы (12) (см. [2]). Значит, $P(\xi) \equiv B(\xi)$.

Предложение доказано. $\square$

Отметим, что правая часть (12) не зависит от векторов ξ_0, ξ_1, ξ_2. Она зависит от коэффициентов α, β и треугольного массива $\{z_{ks}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Основные понятия теории полярных форм* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 2 декабря 2006 г. (`http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1202`)

2. Григорьев М. И. *Полиномы Бернштейна от двух переменных* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 29 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0329`)