

ПРОЕКТИВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

19 февраля 2011 г.

1°. Пусть $N = mn$, где m и n — натуральные числа, отличные от единицы. Напомним данное в [1] определение нормализованных дискретных N -периодических B -сплайнов. B -сплайн первого порядка на основном периоде $0 : N - 1$ задаётся явно

$$\tilde{Q}_{1,n}(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0 : n - 1, \\ 0 & \text{при } j \in n : N - n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N - n + 1 : N - 1. \end{cases}$$

Нормализованные B -сплайны более высоких порядков вводятся с помощью циклической свёртки

$$\tilde{Q}_{\nu,n} = \frac{1}{n}(\tilde{Q}_{1,n} * \tilde{Q}_{\nu-1,n}), \quad \nu = 2, 3, \dots$$

Для любого натурального ν значения B -сплайна $\tilde{Q}_{\nu,n}$ неотрицательны и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{\nu,n}(j - pn) = 1, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Пусть фиксировано натуральное число r . Дискретный периодический сплайн порядка r с векторными коэффициентами определяется формулой

$$\mathbf{S}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(j - pn) \mathbf{a}(p), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

где $\mathbf{a}(0), \mathbf{a}(1), \dots, \mathbf{a}(m-1)$ — векторы из пространства \mathbb{R}^d , называемые *полюсами*.

В [1] показано, что дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами можно использовать в геометрическом моделировании. Соединим отрезками пары соседних точек сплайна $\mathbf{S}(j), \mathbf{S}(j+1)$ при $j = 0, 1, \dots, N-1$. Получим замкнутую ломаную, лежащую внутри выпуклой оболочки полюсов. Изменяя положение полюсов, можно добиться желаемой формы ломаной.

2°. Пусть заданы полюсы $\mathbf{a}(0), \mathbf{a}(1), \dots, \mathbf{a}(m-1)$ и положительные вещественные числа $w(0), w(1), \dots, w(m-1)$, называемые *весами*. Припишем каждому полюсу $\mathbf{a}(p)$ дополнительную координату, равную единице, и умножим полученный вектор на $w(p)$. Придём к новому набору полюсов в пространстве \mathbb{R}^{d+1} :

$$\hat{\mathbf{a}}(p) = (w(p) \mathbf{a}(p), w(p)), \quad p \in 0 : m-1.$$

По полюсам $\hat{\mathbf{a}}(p)$ построим дискретный периодический сплайн

$$\hat{S}(j) = \left(\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(j-pn) w(p) \mathbf{a}(p), \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(j-pn) w(p) \right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для каждого $j \in 0 : N-1$ спроецируем точку $\hat{S}(j)$ на гиперплоскость

$$\{(\mathbf{x}, 1) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\},$$

используя центральную проекцию с центром в начале координат. Алгебраически эта операция выражается делением всех компонент вектора $\hat{S}(j)$ на последнюю. Отбросим последнюю (равную единице) координату в полученном векторе и обозначим результат через $\mathbf{R}(j)$:

$$\mathbf{R}(j) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(j-pn) w(p) \mathbf{a}(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(j-pn) w(p)}. \quad (3)$$

Для проверки корректности определения необходимо удостовериться, что знаменатель дроби отличен от нуля. Действительно, согласно тождеству (1) знаменатель является выпуклой комбинацией весов $w(p)$. Но все веса положительны, поэтому их выпуклая комбинация также положительна. Формула (3) определяет вектор-функцию $\mathbf{R}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^d$, периодичную с периодом N . Назовём эту функцию *проективным дискретным периодическим сплайном порядка r* , построенным по полюсам $\mathbf{a}(p)$ с весами $w(p)$.

Использованная здесь геометрическая идея позаимствована из [2, с. 209], где с её помощью вводились проективные кривые Безье.

Рассмотрим случай, когда все веса $w(p)$ равны единице. С учётом равенства (1) проективный сплайн $\mathbf{R}(j)$ примет вид (2). Таким образом, обычные дискретные периодические сплайны являются частным случаем проективных.

Проективные дискретные периодические сплайны можно использовать для построения замкнутых ломаных. Соединяя соседние точки сплайна $\mathbf{R}(j)$, $\mathbf{R}(j+1)$ при $j = 0, 1, \dots, N-1$ отрезками, получим замкнутую ломаную. Управлять формой ломаной можно меняя как полюсы, так и соответствующие им веса.

ПРИМЕР 1. Пусть $m = 4$, $n = 10$, $r = 2$ и полюсы расположены в вершинах квадрата. На рис. 1 изображена ломаная, определяемая проективным дискретным периодическим сплайном, все веса которого равны единице. На рис. 2 показана ломаная, полученная после изменения одного из весов с 1 на 3. На рисунках кружками отмечены полюсы, рядом с ними приведены соответствующие им веса.

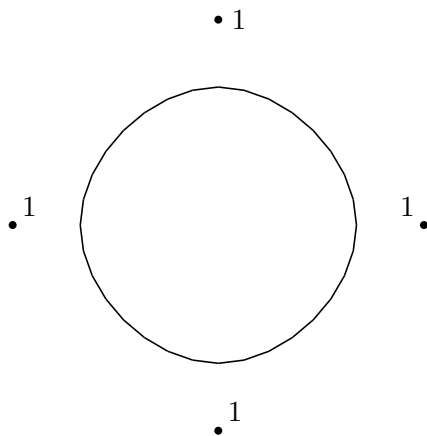


Рис. 1

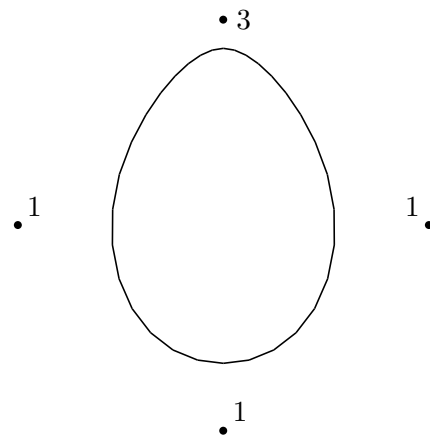


Рис. 2

3°. Пусть фиксированы веса $w(p)$, $p \in 0 : m-1$, и заданы векторы $\mathbf{b}(0), \mathbf{b}(1), \dots, \mathbf{b}(m-1)$. Рассмотрим интерполяционную задачу: найти полюсы $\mathbf{a}(p)$, при которых проективный сплайн вида (3) удовлетворяет условиям

$$\mathbf{R}(ln) = \mathbf{b}(l), \quad l \in 0 : m-1. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. *Интерполяционная задача (4) имеет единственное решение.*

Доказательство. Будем считать, что наборы $\mathbf{a}(p)$, $w(p)$ и $\mathbf{b}(p)$ периодически продолжены на все целые p с периодом m . Введём функцию

$$h_n(p) := \tilde{Q}_{r,n}(pn), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что $h_n(p)$ — m -периодическая функция.

Подставим в равенство (4) выражение для $\mathbf{R}(j)$:

$$\frac{\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(ln - pn) w(p) \mathbf{a}(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(ln - pn) w(p)} = \mathbf{b}(p).$$

Перенесём знаменатель в правую часть и воспользуемся определением функции $h_n(p)$:

$$\sum_{p=0}^{m-1} h_n(l-p) w(p) \mathbf{a}(p) = \mathbf{b}(p) \sum_{p=0}^{m-1} h_n(l-p) w(p).$$

Перепишем полученное равенство в компактной форме:

$$(w \mathbf{a}) * h_n = \mathbf{b} \cdot (h_n * w). \quad (5)$$

Для произвольных m -периодических вектор-функции $\mathbf{x}(j)$ и скалярной функции $y(j)$ справедливо тождество

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{x} * y) = \mathcal{F}_m(\mathbf{x}) \mathcal{F}_m(y). \quad (6)$$

Здесь свёртка вектор-функции со скалярной, ДПФ вектор-функции и произведение вектор-функции на скалярную вычисляются покомпонентно. Справедливость формулы (6) следует из теоремы о свёртке [3, с. 38].

Применим ДПФ к обеим частям равенства (5) и воспользуемся тождеством (6):

$$\mathcal{F}_m(w \mathbf{a}) H_n = \mathcal{F}_m(\mathbf{b} \cdot (h_n * w)),$$

где $H_n = \mathcal{F}_m(h_n)$. Известно (см. доказательство теоремы 1 в [4]), что значения $H_n(k)$ положительны. Поделив на H_n , придём к равенству

$$\mathcal{F}_m(w \mathbf{a}) = \frac{\mathcal{F}_m(\mathbf{b} \cdot (h_n * w))}{H_n}.$$

Осталось применить обратное ДПФ к обеим частям и поделить на положительную функцию w :

$$\mathbf{a} = \frac{1}{w} \mathcal{F}_m^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}_m(\mathbf{b} \cdot (h_n * w))}{H_n} \right). \quad (7)$$

В силу эквивалентности проведённых преобразований формула (7) задаёт набор полюсов, являющийся единственным решением задачи (4). \square

Обратимся к геометрической интерпретации теоремы 1. Пусть заданы точки интерполяции и веса. Ломаная, определяемая интерполяционным сплайном, проходит через точки интерполяции. Меняя веса, можно регулировать форму ломаной.

ПРИМЕР 2. Пусть $r = 2$, $m = 6$, $n = 15$. На рисунках 3 и 4 показаны ломаные, задаваемые интерполяционными сплайнами, построенными по одним и тем же точкам интерполяции, но с разными весами. Точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ изображены кружками, рядом приведены веса $w(p)$.

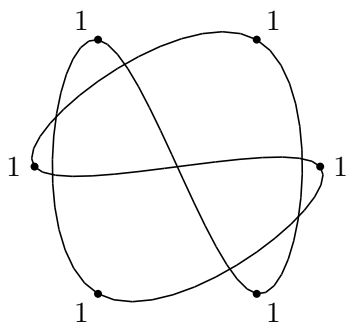


Рис. 3

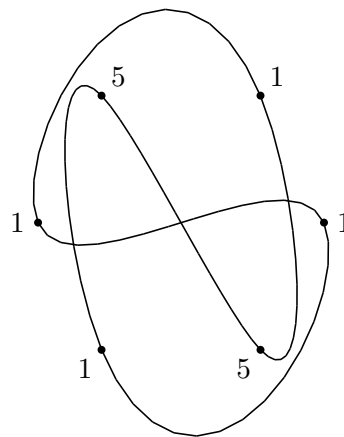


Рис. 4

4°. Пусть фиксированы натуральные числа r и $m \geq 2$, точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ и веса $w(p)$. Для каждого натурального n , отличного от единицы, построим проективный интерполяционный сплайн $\mathbf{R}_n(j)$. Исследуем поведение множества $\{\mathbf{R}_n(j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ при неограниченном увеличении n .

Напомним данное в [4] определение m -периодических B -сплайнов вещественного аргумента. На основном периоде $[0, m]$ сплайны задаются рекуррентно:

$$P_1(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{при } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m - 1], \\ t - m + 1, & \text{при } t \in (m - 1, m]; \end{cases}$$

$$P_\nu(t) = \int_0^m P_{\nu-1}(s) P_1(t - s) ds, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

Для любого натурального ν сплайн P_ν неотрицателен и удовлетворяет тождеству

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(t - l) \equiv 1. \quad (8)$$

Кроме того, функция P_ν принадлежит пространству $C^{2\nu-2}$.

ЛЕММА. Для любого натурального ν и вещественного t справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}_{\nu,n}(\lfloor tn \rfloor) = P_\nu(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Доказательство. Зафиксируем натуральное ν . В [4] доказано, что найдётся такое A_ν , что

$$|\tilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\frac{j}{n})| \leq \frac{A_\nu}{n} \quad \text{для всех } j, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2.$$

Возьмём произвольное вещественное t и положим $j = \lfloor tn \rfloor$. Имеем

$$|\tilde{Q}_{\nu,n}(\lfloor tn \rfloor) - P_\nu(t)| \leq |\tilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\frac{j}{n})| + |P_\nu(\frac{j}{n}) - P_\nu(t)|.$$

Первое слагаемое не превосходит $\frac{A_\nu}{n}$ и поэтому стремится к нулю при неограниченном возрастании n . Второе слагаемое также стремится к нулю, так как функция P_ν непрерывна и выполняется неравенство

$$\left| \frac{j}{n} - t \right| = \left| \frac{\lfloor tn \rfloor - tn}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Следовательно, разность $\tilde{Q}_{\nu,n}(\lfloor tn \rfloor) - P_\nu(t)$ стремится к нулю, что и требовалось доказать. \square

ТЕОРЕМА 2. Для любого $t \in \mathbb{R}$ существует конечный предел

$$\mathbf{R}_*(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}_n(\lfloor tn \rfloor). \quad (10)$$

Предельная вектор-функция $\mathbf{R}_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ принадлежит пространству C^{2r-2} .

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{a}_n(p)$, $p \in 0 : m - 1$, коэффициенты интерполяционного сплайна \mathbf{R}_n . Значения вектор-функции \mathbf{a}_n определяются по формуле (7):

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{w} \mathcal{F}_m^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}_m(\mathbf{b} \cdot (h_n * w))}{H_n} \right). \quad (11)$$

В правой части (11) от n зависят только функции h_n и H_n . Найдём их пределы.

В силу леммы при $k \in 0 : m - 1$ справедливо предельное соотношение

$$h(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{r,n}(kn) = P_r(k).$$

При доказательстве теоремы 1 в [4] было установлено, что для каждого $k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k < m$ существует конечный предел

$$H(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(k) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(p) \omega_m^{-kp}$$

и $H(k)$ положительно.

Используемые в правой части (11) операции свёртки, ДПФ и обратного ДПФ сводятся к конечному не зависящему от n числу арифметических действий. Следовательно, можно перейти к пределу под этими операциями. Принимая во внимание положительность H , получаем

$$\mathbf{a}_*(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_n(p) = \left[\frac{1}{w} \mathcal{F}_m^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}_m(\mathbf{b} \cdot (h * w))}{H} \right) \right](p).$$

Зафиксируем $t \in [0, m]$ и подставим $\lfloor tn \rfloor$ в формулу (3):

$$\mathbf{R}_n(\lfloor tn \rfloor) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(\lfloor t-p \rfloor n) w(p) \mathbf{a}_n(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(\lfloor t-p \rfloor n) w(p)}. \quad (12)$$

Найдём предел знаменателя и числителя дроби по отдельности. Для знаменателя согласно (9) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(\lfloor t-p \rfloor n) w(p) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p) w(p).$$

Полученное выражение положительно, так как в силу тождества (8) представляет собой выпуклую комбинацию положительных весов $w(p)$.

Воспользовавшись соотношением (9) и сходимостью последовательности $\{\mathbf{a}_n(p)\}$, получим выражение для предела числителя в правой части (12):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{m-1} \tilde{Q}_{r,n}(\lfloor t-p \rfloor n) w(p) \mathbf{a}_n(p) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p) w(p) \mathbf{a}_*(p).$$

Итак,

$$\mathbf{R}_*(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}_n(\lfloor tn \rfloor) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p) w(p) \mathbf{a}_*(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p) w(p)}.$$

Сплайн P_r принадлежит пространству C^{2r-2} , поэтому вектор-функция $\mathbf{R}_*(t)$ также принадлежит этому пространству.

Теорема доказана. \square

Рассмотрим результат теоремы 2 с геометрической точки зрения. Ломаные, задаваемые проективными интерполяционными сплайнами, сходятся к гладкой кривой, определяемой вектор-функцией $\mathbf{R}_*(t)$. Подставляя в формулу (10) значение $t = l \in 0 : m - 1$, получаем

$$\mathbf{R}_*(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}_n(ln) = \mathbf{b}(l).$$

Следовательно, предельная кривая проходит через точки интерполяции.

ПРИМЕР 3. Пусть $m = 5$, $r = 2$. На рисунках 5–8 штриховыми линиями изображены ломаные, соответствующие проективным дискретным сплайнам, построенным для различных значений n по одному и тому же набору из пяти точек интерполяции. Кроме того, на каждом рисунке сплошной линией показана предельная кривая, задаваемая вектор-функцией $\mathbf{R}_*(t)$. Точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ отмечены кружками, рядом с которыми указаны веса $w(p)$.

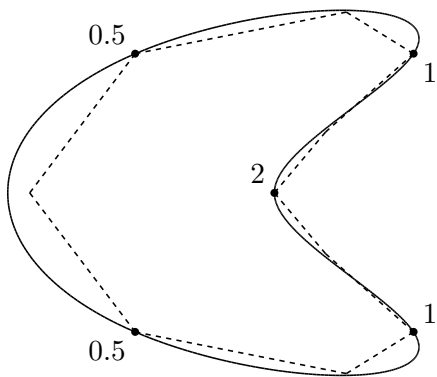


Рис. 5. $n = 2$

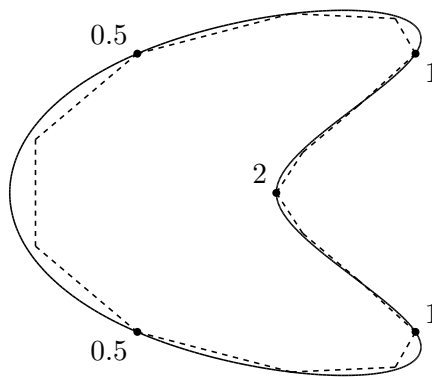


Рис. 6. $n = 3$

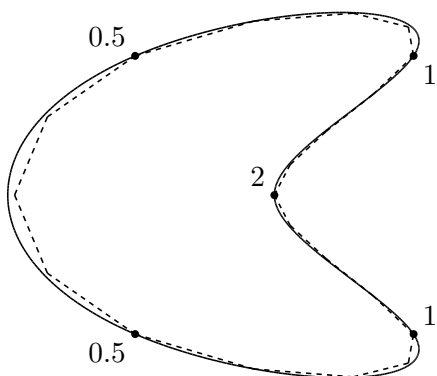


Рис. 7. $n = 4$

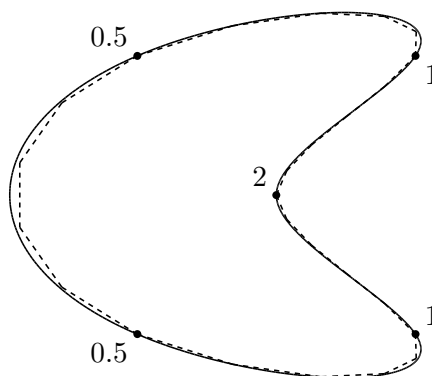


Рис. 8. $n = 5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (<http://dha.spb.ru/refs07.shtml#0904>)
2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.
3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть первая. СПб.: НИИММ, 2003. 100 с.
4. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (<http://dha.spb.ru/refs09.shtml#0627>).