УДК 519.65 Вестник ЛГУ. Сер. 1, 1990, вып. 3 (№ 15)

М. Г. Бер, В. Н. Малоземов

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДАННЫХ

1°. Пусть $w(t)$ — гладкая комплекснозначная функция, заданная на вещественной оси и T-периодическая. Возьмем натуральное число N вида $N=mn$, где m и n — также натуральные числа, причем $n>1$ (случай $m=1$ не исключается). Обозначим $h=T/N$ и введем сетку $t_j=jh$.

Предположим, что нам известны приближенные значения y_k функции w в узлах более крупной сетки $\tau_k=t_{km}=k(mh)$. Требуется восстановить значения x_j функции w в узлах t_j так, чтобы x_{km} и y_k были близки при всех k, и x_j изменялись достаточно плавно.

Эту задачу можно формализовать следующим образом:

$$\begin{aligned} &f(x):=\sum\nolimits_{j=0}^{N-1}|\Delta^r x_j|^2\to\inf,\\ &g(x):=\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}|x_{km}-y_k|^2\leqslant\varepsilon/m. \end{aligned}\tag{1}$$

Здесь r — натуральное число, $\Delta^r x_j=\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s}C_r^s x_{j+s}$ — конечная разность r-го порядка, $\varepsilon>0$ — параметр точности.

2°. Предварительно рассмотрим задачу о наименьших квадратах

$$q(c) := \sum_{k=0}^{n-1} |c - y_k|^2 \to \inf.$$

Ее решением является комплексное число

$$\tilde{c} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

При этом

$$\tilde{\varepsilon} := mq(\tilde{c}) = m \sum_{k=0}^{n-1} |y_k|^2 - N |\tilde{c}|^2. \qquad (2)$$

Если $\varepsilon \geqslant \tilde{\varepsilon}$, то вектор $\tilde{x}$ с компонентами $\tilde{x}_j \equiv \tilde{c}$ удовлетворяет ограничениям задачи (1) и целевая функция на нем обращается в ноль. Значит $\tilde{x}$ — решение задачи (1). В дальнейшем считаем, что $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$.

3°. Сделаем замену переменных

$$X_s = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{sj},$$

где $\omega_N = \exp(-i2\pi/N)$. Эта замена согласована с T-периодичностью исходной функции w. По свойству дискретного преобразования Фурье [1]

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} X_s \omega_N^{-js}.$$

Имеем

$$\Delta^r x_j = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} X_s \left(\Delta^r \omega_N^{-js}\right) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} X_s \left(\omega_N^{-s} - 1\right)^r \omega_N^{-js}.$$

Пользуясь равенством Парсеваля, получаем выражение для целевой функции задачи (1) в новых переменных:

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} |\omega_N^{-s} - 1|^{2r} |X_s|^2.$$

Введем обозначение

$$\varkappa_s = |\omega_N^{-s} - 1|^2 = 2\left(1 - \cos\frac{2\pi s}{N}\right).$$

Поскольку $\varkappa_0 = 0$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-1} \varkappa_s^r |X_s|^2.$$

Для того чтобы переписать и ограничения задачи (1) в новых переменных, рассмотрим сигнал

$$z_j = \begin{cases} x_{km} - y_k \text{ при } j = km, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Его спектр имеет вид

$$Z_s = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{km} - y_k)\, \omega_N^{skm} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{km} - y_k)\, \omega_n^{sk}.$$

Обозначим

$$Y_s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{sk}$$

и отметим, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{km}\, \omega^{sk} = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} X_{s+pn}.$$

Имеем

$$Z_s = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} (X_{s+pn} - Y_s).$$

Снова воспользуемся равенством Парсеваля и n-периодичностью спектра Z_s. Получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} | x_{km} - y_k |^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} | Z_s |^2 = \frac{m}{N} \sum_{s=0}^{n-1} | Z_s |^2 =$$
$$= \frac{1}{mN} \sum_{s=0}^{n-1} \Big| \sum_{p=0}^{m-1} (X_{s+pn} - Y_s) \Big|^2 .$$

Теперь задачу (1) можно переписать в новых переменных:

$$F(X) := N^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} \varkappa_k^r\, | X_k |^2 \to \inf, \tag{3}$$
$$G(X) := N^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} \Big| \sum_{p=0}^{m-1} (X_{s+pn} - Y_s) \Big|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Попутно найдем новое выражение для критического значения $\tilde{\varepsilon}$ параметра точности ε. Согласно (2) и равенству Парсеваля

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{m}{n} \sum_{s=0}^{n-1} | Y_s |^2 - N \left| \frac{1}{n} Y_0 \right|^2 = \frac{m}{n} \sum_{s=1}^{n-1} | Y_s |^2. \tag{4}$$

Напомним, что нас интересуют значения ε из интервала $(0, \tilde{\varepsilon})$.

4°. Зафиксируем $\alpha > 0$ и рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу без ограничений

$$L_\alpha (X) := N [\alpha F(X) + G(X)] \to \inf. \tag{5}$$

Обозначим $V_s = \sum_{p=0}^{m-1} (X_{s+pn} - Y_s)$. Поскольку

$$L_\alpha (X + H) = \alpha \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{m-1} \varkappa_{s+pn}^r\, | X_{s+pn} + H_{s+pn} |^2 +$$
$$+ \sum_{s=0}^{n-1} \Big| V_s + \sum_{p=0}^{m-1} H_{s+pn} \Big|^2 = L_\alpha (X) +$$
$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{s=}^{n-1} \sum_{p=0}^{m-1} (\alpha \varkappa_{s+pn}^r X_{s+pn} + V_s) H_{s+pn}^* +$$
$$+ \alpha \sum_{k=1}^{N-1} \varkappa_k^r\, | H_k |^2 + \sum_{s=0}^{n-1} \Big| \sum_{p=0}^{m-1} H_{s+pn} \Big|^2 ,$$

то единственное решение задачи (5) определяется из системы линейных уравнений

$$\alpha \varkappa_{s+pn}^r X_{s+pn} + V_s = 0, \ p \in 0 : m-1, \ s \in 0 : n-1.$$

Эта система распадается на n независимых подсистем, соответствующих различным $s \in 0 : n-1$:

$$\alpha \varkappa_{s+pn}^r X_{s+pn} + \sum_{q=0}^{m-1} X_{s+qn} = m Y_s, \ p \in 0 : m-1. \tag{6}$$

Последняя система позволяет указать явные формулы для компонент спектра X_s, X_{s+n}, $\ldots$, $X_{s+(m-1)n}$. Действительно, матрица $A = A[0 : m-1, 0 : m-1]$ системы (6) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & a_{m-1} \end{pmatrix},$$

где $a_p = 1 + \alpha \varkappa^r_{s+pn}$. Обозначим $e = e[0:m-1]$ — вектор, все компоненты которого равны единице, и рассмотрим систему уравнений

$$Au = e. \tag{7}$$

Ее решение $u_s = (u_{s0}, u_{s1}, \ldots, u_{s,m-1})$ связано с решением системы (6) соотношением

$$X_{s+pn} = mu_{sp}Y_s, \; p \in 0:m-1. \tag{8}$$

При $s=0$ элемент a_0 матрицы A равен единице, поскольку $\varkappa_0 = 0$. В этом случае системе (7) удовлетворяет вектор u_0 с компонентами

$$u_{00} = 1, \; u_{01} = u_{02} = \ldots = u_{0,m-1} = 0. \tag{9}$$

Нетрудно также проверить, что при $s \in 1:n-1$ решением системы (7) является вектор u_s с компонентами

$$u_{sp} = \frac{\lambda_s \varkappa^{-r}_{s+pn}}{1+\lambda_s \alpha}, \quad p \in 0:m-1. \tag{10}$$

Здесь $\lambda_s = \left(\sum_{q=0}^{m-1} \varkappa^{-r}_{s+qn}\right)^{-1}$.

Подведем итог.

Теорема 1. *При фиксированном* $\alpha > 0$ *задача* (5) *имеет единственное решение. Оно определяется формулой* (8). *Коэффициенты* u_{sp} *вычисляются по формулам* (9) *при* $s=0$ *и* (10) *при* $s \in 1:n-1$.

В частности,

$$X_0 = mY_0, \; X_n = X_{2n} = \ldots = X_{(m-1)n} = 0.$$

5°. Вычислим значение функции G на полученном решении задачи (5), которое, разумеется, зависит от α. Имеем

$$\varphi(\alpha) := G(X) = N^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} \left| \sum_{p=0}^{m-1} X_{s+pn} - mY_s \right|^2 =$$

$$= N^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} \left| mY_s \left(\sum_{p=0}^{m-1} u_{sp} - 1 \right) \right|^2 = \frac{m}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{1+\lambda_s \alpha}\right)^2 \left| Y_s \right|^2.$$

Функция $\varphi(\alpha)$ непрерывна и строго возрастает на полуоси $(0, +\infty)$. Кроме того, согласно (4)

$$\lim_{\alpha \to +0} \varphi(\alpha) = 0, \; \lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha) = \tilde{\varepsilon}.$$

Поэтому уравнение $\varphi(\alpha) = \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$ имеет единственное положительное решение. Обозначим его $\tilde{\alpha}$. Решение задачи (5) при $\alpha = \tilde{\alpha}$ обозначим $\tilde{X}$. Отметим, что $G(\tilde{X}) = \varepsilon$.

Следующий результат характерен для теории сглаживания [2].

Теорема 2. *Вектор* $\tilde{X}$ *является единственным решением задачи* (3).

Доказательство. Возьмем любой план X задачи (3), такой, что $F(X) \leqslant F(\tilde{X})$. Тогда

$$L_{\tilde{\alpha}}(X) = N[\tilde{\alpha} F(X) + G(X)] \leqslant N[\tilde{\alpha} F(\tilde{X}) + \varepsilon] =$$

$$= N[\tilde{\alpha} F(\tilde{X}) + G(\tilde{X})] = L_{\tilde{\alpha}}(\tilde{X}).$$

Поскольку $\tilde{X}$ — единственное решение задачи (5) при $\alpha = \tilde{\alpha}$, то $X = \tilde{X}$. Как следствие получаем, что для любого плана X задачи (3), отличного от $\tilde{X}$, выполняется неравенство $F(X) > F(\tilde{X})$. Теорема доказана.

6°. Введем функцию

$$\psi(\beta)=\varphi(1/\beta)=\frac{m}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda_s}{\beta+\lambda_s}\right)^2|Y_s|^2.$$

Она непрерывна, строго убывает и строго выпукла на $[0, +\infty)$. Кроме того, $\psi(0)=\tilde{\varepsilon}$ и $\psi(\beta)\to 0$ при $\beta\to+\infty$.

Уравнение $\varphi(\alpha)=\varepsilon$ при $\varepsilon\in(0, \tilde{\varepsilon})$ можно заменить уравнением $\psi(\beta)=\varepsilon$. В [2] рекомендуется перейти к эквивалентному уравнению $[\psi(\beta)]^{-1/2}=\varepsilon^{-1/2}$ и решать последнее методом Ньютона с начальным приближением $\beta_0=0$. Расчетная формула такого метода имеет вид

$$\beta_{k+1}=\beta_k+2\frac{\psi(\beta_k)}{\psi'(\beta_k)}\left[1-\left(\frac{\psi(\beta_k)}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right],\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Обозначим $\tilde{\beta}$ положительный корень уравнения $\psi(\beta)=\varepsilon$. Тогда $\tilde{\alpha}=1/\tilde{\beta}$.

На основании теоремы 1 по $\tilde{\alpha}$ можно найти $\tilde{X}$. По вектору $\tilde{X}$ однозначно восстанавливается единственное решение задачи (1):

$$\tilde{x}_j=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_k\omega_N^{-jk},\ j\in 0:N-1.$$

Отметим, что согласно (8)—(10)

$$\tilde{x}_{q+km}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{X}_j\omega_N^{-(q+km)j}=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{m-1}\tilde{X}_{s+pn}\,\omega_N^{-(q+km)(s+pn)}=$$

$$=\frac{1}{n}Y_0+\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\lambda_s\varkappa_{s+pn}^{-r}}{1+\lambda_s\tilde{\alpha}}Y_s\,\omega_N^{-qs-qpn-ksm}=$$

$$=\frac{1}{n}Y_0+\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\left[\frac{\lambda_sY_s}{1+\lambda_s\tilde{\alpha}}\omega_N^{-qs}\left(\sum_{p=0}^{m-1}\varkappa_{s+pn}^{-r}\,\omega_m^{-qp}\right)\right]\omega_n^{-ks}.$$

Кроме того,

$$f(\tilde{x})=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\varkappa_k^r|\tilde{X}_k|^2=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{m-1}\varkappa_{s+pn}^r|\tilde{X}_{s+pn}|^2=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{m-1}\varkappa_{s+pn}^r\left|\frac{m\lambda_s\varkappa_{s+pn}^{-r}}{1+\lambda_s\tilde{\alpha}}Y_s\right|^2=\frac{m}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\lambda_s|Y_s|^2}{(1+\lambda_s\tilde{\alpha})^2}.$$

7°. Опишем подробно схему решения задачи (1).

1) Вычисляем спектр $\{Y_s\}_{s=0}^{n-1}$ сигнала $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$.

2) Находим критическое значение параметра точности

$$\tilde{\varepsilon}=\frac{m}{n}\sum_{s=1}^{n-1}|Y_s|^2.$$

Если $\varepsilon\geqslant\tilde{\varepsilon}$, то решением задачи (1) будет вектор $\tilde{x}$ с одинаковыми компонентами

$$\tilde{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k=\frac{1}{n}Y_0,\ j\in 0:N-1.$$

В случае $\varepsilon<\tilde{\varepsilon}$ переходим к следующему пункту.

3) Формируем два массива констант, зависящих только от m и n, — двумерный $\rho_{sq}=\omega_N^{-qs}\left(\sum_{p=0}^{m-1}\varkappa_{s+pn}^{-r}\,\omega_m^{-qp}\right)$, $s\in 1:n-1$, $q\in 0:m-1$, и одномерный $\lambda_s=(\rho_{s0})^{-1}$, $s\in 1:n-1$. Здесь $\varkappa_k=2\left(1-\cos\frac{2\pi k}{N}\right)$.

4) Решаем уравнение

$$\psi(\beta) := \frac{m}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_s}{\beta+\lambda_s}\right)^2 |Y_s|^2 = \varepsilon.$$

Для этого рекомендуется использовать итерационную процедуру

$$\beta_0 = 0,$$

$$\beta_{k+1} = \beta_k + 2\,\frac{\psi(\beta_k)}{\psi'(\beta_k)} \left[1 + \left(\frac{\psi(\beta_k)}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Пусть $\tilde{\beta}$ — полученное решение. Полагаем $\tilde{\alpha} = 1/\tilde{\beta}$.

5) Вычисляем

$$\tilde{Y}_s = \frac{\lambda_s}{1+\lambda_s\tilde{\alpha}}\, Y_s, \quad s \in 1:n-1,$$

и вводим двумерный массив $\tilde{Z}$ со столбцами

$$\tilde{Z}_{sq} = \begin{cases} Y_0 \text{ при } s = 0, \\ \rho_{sq}\, \tilde{Y}_s \text{ при } s \in 1:n-1. \end{cases} \tag{1}$$

6) С помощью обратного ДПФ восстанавливаем решение задачи (1)

$$\tilde{x}_{q+km} = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \tilde{Z}_{sq}\,\omega_n^{-ks}, \quad k \in 0:n-1,\ q \in 0:m-1.$$

При реализации этой схемы важную роль играют алгоритмы быстрого преобразования Фурье [1, 3].

Summary

An algorithm for the recovery of periodic complex-valued signal on a fine grid by its approximate values on a rough grid is suggested.

Литература

1. Макселлан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М., 1983. 2. Reinsch C. H. // Numer. Math. 1971. Vol. 16, N 5. P. 451—454. 3. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М., 1989.

Статья поступила в редакцию 25 июня 1989 г.