САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ

дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Часть вторая

Под редакцией проф. В. Н. Малозёмова

Санкт-Петербург
2014 г.

АННОТАЦИЯ

Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Часть вторая. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. СПб.: СПбГУ, 2014. 604 с.

Первая часть «Избранных глав» была опубликована как Google-book в 2009 г. (книга доступна online). Во второй части рассматриваются следующие дополнительные вопросы: аналог эрмитовой сплайн-интерполяция в дискретном периодическом случае и его применение в геометрическом моделировании, дискретные функции Виленкина и Крестенсона, бинарные ортогональные системы PONS (Prometheus Orthonormal Set), спектральное разложение операторов дискретного преобразования Фурье и дискретного преобразования Уолша, сферические полудизайны и кубатурные формулы, периодические кривые Безье, построение кривых и поверхностей методом subdivision. Большое внимание уделяется экстремальным свойствам и предельным теоремам.

Для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей и специалистов в области цифровой обработки сигналов и геометрического моделирования.

Тот, кто знает Учение,
уступает тому, кто находит
в нём удовольствие.
Конфуций

Содержание

Предисловие 9

2009

В. Н. Малозёмов
ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ 11

Н. В. Чашников
АНАЛОГ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ДИСКРЕТНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ 15

А. М. Дурягин, А. Б. Певный
СФЕРИЧЕСКИЕ ДИЗАЙНЫ 24

Н. В. Чашников
ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ДИСКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА 30

В. Н. Малозёмов
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ФРЕЙМАХ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ 37

М. Н. Истомина, В. В. Максименко, А. Б. Певный
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ 42

Н. О. Котелина, А. Б. Певный
ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЗАЙНОВ 49

Н. А. Соловьёва
ФРЕЙМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА 56

Н. В. Чашников
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА 60

М. Н. Истомина
ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА ФРЕЙМАХ 73

Н. В. Чашников
ОБОБЩЁННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА КЛАССА C^2 76

В. Н. Малозёмов, Н. А. Соловьёва
О МАТРИЦЕ ФРЕЙМА 82

Н. О. Котелина, А. Б. Певный
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ПОЛУДИЗАЙНОВ 92

Н. В. Чашников
ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ 103

В. Н. Малозёмов
ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ 112

В. Н. Малозёмов, Н. А. Соловьёва
ЦИКЛИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ФРЕЙМА МЕРСЕДЕС–БЕНЦ 116

Н. В. Чашников
ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ЭРМИТОВОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ 122

В. Н. Малозёмов, Н. А. Соловьёва
ПОЛИНОМЫ ЛОРАНА 136

В. Н. Малозёмов, Н. А. Соловьёва
ФАКТОРИЗАЦИЯ ПОЛИФАЗНЫХ МАТРИЦ 142

В. Н. Малозёмов
ПОЛИНОМЫ БЕРНУЛЛИ 149

Н. В. Чашников
СВОЙСТВО МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ 157

А. Н. Сабаев
ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕРНУЛЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА 162

А. Н. Сабаев
СПЛАЙН-СГЛАЖИВАНИЕ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДАННЫХ 165

Н. В. Чашников
ПРЕДЕЛ ДИСКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА 171

М. Н. Истомина, А. Б. Певный
СИСТЕМЫ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ КАК ОРБИТЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП 181

Н. А. Соловьёва
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИФТИНГОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ 184

2010

В. Н. Малозёмов
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ 190

А. М. Дурягин, В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный
ЦИКЛИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ 201

Н. В. Чашников
ПРЕДЕЛ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 206

Р. Е. Афонин, В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный
ОЦЕНКИ ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА 216

В. Н. Малозёмов, Я. В. Петухова
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ БЕЗЬЕ 226

Р. Е. Афонин, В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО СФЕРЕ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ 234

Р. Е. Афонин, А. Б. Певный
ТРИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЗАЙНОВ 243

Н. О. Котелина
ОЦЕНКА СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 250

Р. Е. Афонин, А. Б. Певный
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАУССА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ И КРИТЕРИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА 258

Р. Е. Афонин, В. Н. Малозёмов
ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА–СОНИНА 266

Мохамед Валид Салх Отман Габр
СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА 272

М. С. Беспалов
СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ 279

Н. В. Чашников
ДИСКРЕТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА
СФЕРИЧЕСКОГО ТИПА 289

Н. О. Котелина
ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ГЕГЕНБАУЭРА . . . 298

2011

Н. В. Чашников
ПРОЕКТИВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ 305

В. Н. Малозёмов
ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША 314

В. Н. Малозёмов
ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ХААРА 324

Н. О. Котелина, А. Б. Певный
КОНТАКТНЫЕ ЧИСЛА И СФЕРИЧЕСКИЕ КОДЫ 334

В. Н. Малозёмов, Я. В. Петухова
НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ БЕЗЬЕ . 341

В. Н. Малозёмов
БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША 357

Н. В. Чашников
ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ В ДИСКРЕТНОМ
ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ 365

М. Н. Истомина, А. Б. Певный
ОДНА МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ДЕЛЬСАРТА
ДЛЯ ОЦЕНКИ КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ 371

В. Н. Малозёмов
РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ
СУММЫ 378

Ю. К. Демьянович
B_φ-СПЛАЙНЫ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ 386

В. Н. Малозёмов
КАЛИБРОВОЧНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ B-СПЛАЙНОВ 394

Н. В. Чашников
ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ МЕТОДОМ SUBDIVISION 398

М. С. Беспалов
СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША 408

М. С. Беспалов
ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ И ОРТОПРОЕКТОРЫ 420

А. А. Макаров
СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТНОЕ СЖАТИЕ НА ОТРЕЗКЕ 429

Н. О. Котелина, А. Б. Певный
ВЗВЕШЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО СФЕРЕ 439

В. Н. Малозёмов, И. С. Стояноска
ПОЛИНОМЫ ШАПИРО И КОДЫ РИДА-МАЛЛЕРА 449

Н. В. Чашников
СХОДИМОСТЬ СХЕМЫ SUBDIVISION 456

2012

В. Н. Малозёмов, И. С. Стояноска
ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ ШАПИРО 465

В. С. Виденский
РАБОТЫ Л. В. КАНТОРОВИЧА О ПОЛИНОМАХ С. Н. БЕРНШТЕЙНА 471

Н. В. Чашников
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СХЕМЫ SUBDIVISION 477

И. С. Стояноска
ПОЛИНОМЫ ШАПИРО ВТОРОГО РОДА 490

И. В. Агафонова
КОДЫ РИДА–МАЛЛЕРА: ПРИМЕРЫ ИСПРАВЛЕНИЯ ОШИБОК 497

М. С. Беспалов
ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ КРЕСТЕНСОНА 513

Н. В. Чашников
СХОДИМОСТЬ СХЕМЫ SUBDIVISION В СЛУЧАЕ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ 522

И. С. Стояноска
ОБОБЩЁННЫЕ ПОЛИНОМЫ ШАПИРО И МАТРИЦЫ PONS . . . 532

М. Н. Юркина
ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М. С. БЕСПАЛОВА О ФРЕЙМАХ ПАРСЕВАЛЯ 540

Н. О. Котелина, А. Б. Певный
НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТОЧЕК НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ 543

М. Н. Юркина
ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ 549

2013

М. С. Беспалов
ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ВИЛЕНКИНА 553

В. С. Виденский
К СТОЛЕТИЮ ОТКРЫТИЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА 564

А. Б. Певный, М. Н. Юркина
РАВНОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ 571

И. А. Крепкий, С. М. Машарский
СИММЕТРИЧНОСТЬ МАТРИЦ PONS 577

И. В. Агафонова, В. Н. Малозёмов
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ 582

Н. О. Котелина, А. Б. Певный
НЕРАВЕНСТВО СИДЕЛЬНИКОВА 587

М. С. Беспалов
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ, ГЕНЕРИРУЮЩИХ ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША 595

Список участников семинара 603

Предисловие

С января 2004 г. на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета работает семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (Discrete Harmonic Analysis and Computer Aided Geometric Design, DHA & CAGD). Ведётся сайт семинара (`http://dha.spb.ru`). На сайте много полезной информации, но наибольшую ценность имеет раздел «Избранные доклады». Доклады из этого раздела за период 2004–2008 годы легли в основу первой части «Избранных глав DHA & CAGD», опубликованной как Google-book в 2009 г. (книга доступна online). Предлагаемая вниманию читателей вторая часть «Избранных глав» содержит доклады за период 2009–2013 годы.

Напомним основные вопросы, которым была посвящена первая часть книги:

- параметрические варианты быстрого преобразования Фурье в одномерном и многомерном случаях,
- лифтинговые схемы (прямая и двойственная) вейвлетных разложений дискретных периодических сигналов на основе дискретной сплайн-интерполяции,
- фреймы в конечномерном пространстве, жёсткие фреймы и особенно равноугольные жёсткие фреймы,
- дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование,
- составные и обобщённые поверхности Кунса,
- составные кривые и поверхности Безье.

Во второй части по-прежнему большое внимание уделяется конечномерным фреймам (фреймы Мерседес-Бенц, фреймы Парсеваля, циклические фреймы), но появились и новые темы:

- аналог эрмитовой сплайн-интерполяции в дискретном периодическом случае и его применение в геометрическом моделировании,
- дискретные функции Виленкина и Крестенсона,
- бинарные ортогональные системы PONS (Prometheus Orthonormal Set),
- спектральное разложение операторов дискретного преобразования Фурье и дискретного преобразования Уолша,

- сферические полудизайны и кубатурные формулы,
- периодические кривые Безье,
- построение кривых и поверхностей методом subdivision.

Важное место занимают экстремальные свойства и предельные теоремы:

- экстремальные задачи на фреймах,
- экстремальные свойства сферических полудизайнов,
- экстремальные свойства дискретных поверхностей Кунса,
- предельные свойства дискретных периодических сплайнов,
- предел дискретных поверхностей Кунса,
- предельные теоремы для схемы subdivision,
- принцип неопределённости в дискретном гармоническом анализе.

Две части «Избранных глав» вместе с учебником

> Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* СПб.: изд-во «Лань», 2012. 304 с.

отражают современное состояние в области дискретного гармонического анализа.

Вторую часть «Избранных глав» подготовили для публикации М. И. Григорьев (доклады 2009–2010 годов) и Н. В. Чашников (доклады 2011–2013 годов). Приношу им свою глубокую благодарность.

Январь 2014 г. *В. Н. Малоземов*

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ

В. Н. Малозёмов

21 января 2009 г.

Пусть U — унитарная матрица порядка n и $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ — единичный вектор. В работе [1] получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы система векторов

$$\left\{\varphi_0, U\varphi_0, U^2\varphi_0, \ldots, U^{m-1}\varphi_0\right\} \tag{1}$$

при $m \geqslant n$ была жёстким фреймом. В этом докладе мы продолжим изучение систем вида (1), используя некоторые идеи из [2].

Нормированный жёсткий фрейм $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ в $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ назовём *циклическим с константой* $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, если выполняется соотношение

$$\langle \varphi_{k+1}, \varphi_{s+1} \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\,, \qquad k, s \in 0 : m-1\,, \tag{2}$$

где $\varphi_m = c\,\varphi_0$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ была циклическим с константой $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, нормированным жёстким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась унитарная матрица U порядка n, такая, что*

$$\varphi_k = U^k \varphi_0\,, \qquad k \in 1 : m-1\,,$$

причём все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы U суть попарно различные корни степени m из c, а соответствующие ортонормированные собственные векторы $p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют условию

$$\left|\langle \varphi_0, p_j \rangle\right| = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad j \in 1 : n\,. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим $\psi_k = \varphi_{k+1}$, $k \in 0 : m-1$, где $\varphi_m = c\,\varphi_0$. Согласно (2)

$$\langle \psi_k, \psi_s \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\,, \qquad k, s \in 0 : m-1\,.$$

По теореме об унитарной эквивалентности двух систем векторов [3] найдётся унитарная матрица U порядка n, такая, что

$$\psi_k = U\varphi_k\,, \qquad k \in 0 : m-1\,.$$

Это значит, что

$$\varphi_{k+1} = U\varphi_k\,, \quad k \in 0 : m-2\,; \qquad c\,\varphi_0 = U\varphi_{m-1}\,.$$

Имеем

$$\varphi_k = U^k\varphi_0\,, \quad k \in 1 : m-1\,; \qquad U^m\varphi_0 = c\,\varphi_0\,.$$

Далее

$$U^m\varphi_k = U^m(U^k\varphi_0) = U^k(U^m\varphi_0) = c\,\varphi_k\,, \quad k \in 0 : m-1\,,$$

так что

$$(U^m - c\,I_n)\,\varphi_k = 0\,, \qquad k \in 0 : m-1\,.$$

Здесь I_n — единичная матрица порядка n. Принимая во внимание, что линейная оболочка векторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ совпадает с $\mathbb{C}^n$, заключаем, что

$$U^m = c\,I_n\,. \tag{4}$$

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ собственные числа матрицы U и через $p_1, \ldots, p_n$ — соответствующие ортонормированные собственные векторы. Запишем спектральное разложение матрицы U:

$$U = P\Lambda P^*.$$

Здесь P — матрица со столбцами $p_1, \ldots, p_n$ и Λ — диагональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Матрица P — унитарная, поэтому

$$U^m = P\Lambda^m P^*.$$

Согласно (4), $\Lambda^m = c\,I_n$. Это означает, что все собственные числа матрицы U являются корнями степени m из c.

Перепишем равенство $\varphi_k = U^k\varphi_0$ в виде $\varphi_k = P\Lambda^k P^*\varphi_0$. Обозначим $g_k = P^*\varphi_k$. Тогда $g_k = \Lambda^k g_0$, $k \in 0 : m-1$. В покоординатной записи последнее равенство выглядит так:

$$g_k(j) = \lambda_j^k\, g_0(j)\,, \qquad j \in 1 : n\,, \quad k \in 0 : m-1\,. \tag{5}$$

Отметим, что

$$\langle \varphi_k, p_j \rangle = \langle P^*\varphi_k, P^*p_j \rangle = g_k(j)\,. \tag{6}$$

Учитывая определение нормированного жёсткого фрейма и формулы (5), (6), при всех $j \in 1:n$ получаем

$$1 = \|p_j\|^2 = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \big|\langle p_j, \varphi_k\rangle\big|^2 = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \big|g_k(j)\big|^2 =$$

$$= \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \big|\lambda_j^k\, g_0(j)\big|^2 = n\,\big|g_0(j)\big|^2.$$

Отсюда следует (3), поскольку $g_0(j) = \langle \varphi_0, p_j\rangle$.

Осталось проверить, что собственные числа матрицы U попарно различны. Обозначим через Φ и G матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ соответственно. По определению нормированного жёсткого фрейма $\Phi\,\Phi^* = \frac{m}{n}\, I_n$. Вместе с тем, $G = P^*\,\Phi$, поэтому

$$GG^* = P^*\big(\Phi\,\Phi^*\big)P = \tfrac{m}{n}\, I_n\,.$$

В частности, $(GG^*)[i,j] = 0$ при $i \neq j$. Согласно (5) имеем

$$0 = \big(GG^*\big)[i,j] = \sum_{k=0}^{m-1} g_k(i)\,\overline{g_k(j)} = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\sum_{k=0}^{m-1}\big(\lambda_i\,\overline{\lambda}_j\big)^k. \tag{7}$$

При $\lambda_i = \lambda_j$ такое равенство невозможно, поскольку $|\lambda_j| = 1$ и $\big|g_0(j)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при всех $j \in 1:n$.

Достаточность. Разложим вектор φ_0 по ортонормированному базису $p_1, \ldots, p_n$. Запишем

$$\varphi_0 = \sum_{j=1}^{n}\langle \varphi_0, p_j\rangle\, p_j\,.$$

Согласно (3)

$$\|\varphi_0\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\big|\langle \varphi_0, p_j\rangle\big|^2 = 1\,.$$

По условию $\varphi_k = U^k\varphi_0$, $k \in 1:m-1$, так что система векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ является нормированной. Проверим, что она образует жёсткий фрейм.

Введём векторы $g_k = P^*\varphi_k$, $k \in 0:m-1$. Обозначим, как и раньше, через Φ и G матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ соответственно. Имеем $\Phi\,\Phi^* = P\,GG^*P^*$. Покажем, что $GG^* = \frac{m}{n}\, I_n$. Отсюда будет следовать, что $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ — жёсткий фрейм.

Воспользуемся формулами (5) и (7). Запишем

$$\big(GG^*\big)[i,j] = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\sum_{k=0}^{m-1}\big(\lambda_i\,\overline{\lambda}_j\big)^k.$$

В частности,

$$\big(GG^*\big)[j,j] = m\,\big|g_0(j)\big|^2 = m\,\big|\langle\varphi_0, p_j\rangle\big|^2 = \tfrac{m}{n}\,, \quad j \in 1:n\,.$$

Далее, по условию $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, поэтому $\lambda_i\,\overline{\lambda}_j = \lambda_i\,\lambda_j^{-1} \neq 1$ и

$$\big(GG^*\big)[i,j] = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\,\frac{1-(\lambda_i\,\overline{\lambda}_j)^m}{1-\lambda_i\,\overline{\lambda}_j} = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\,\frac{1-|c|^2}{1-\lambda_i\,\overline{\lambda}_j} = 0\,.$$

Установлено, что $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ — нормированный жёсткий фрейм. Его цикличность проверяется просто. Положим $\varphi_m = U^m\varphi_0$. В этом случае $\varphi_m = P\Lambda^m P^*\varphi_0 = c\,\varphi_0$. Для векторов $\varphi_k = U^k\varphi_0$, $k \in 0:m$, соотношение (2) очевидно.

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьёва Н. А. *О жёстких фреймах специального вида* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2009–01. 8 с. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2009/index.html#01`)

2. Casazza P. G., Kovačević J. *Uniform tight frames with erasures* // Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. No. 2-4. P. 387–430.

3. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Об унитарных матрицах и сингулярных разложениях* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 января 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0130`).

АНАЛОГ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ДИСКРЕТНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Н. В. Чашников

14 февраля 2009 г.

1°. Пусть N, r — натуральные числа. Дискретной периодической функцией Бернулли порядка r называется сигнал

$$b_r(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-r}\omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Из [1] известны следующие свойства функций Бернулли:

$$\Delta b_{r+1}(j) = b_r(j), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$b_r(r-j) = (-1)^r\, b_r(j), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Кроме того, любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x(j) = e + \sum_{k=0}^{N-1}\Delta^r x(k)\, b_r(j-k), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $e = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)$.

Пусть $N = mn$, где m, n — натуральные числа, отличные от единицы. Определим функцию t_α для $\alpha \in \mathbb{Z}$ по формуле

$$t_\alpha(l) := b_{2r}(ln + r + \alpha), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что $t_\alpha \in \mathbb{C}_m$. Положим $T_\alpha := \mathcal{F}_m(t_\alpha)$.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$T_\alpha(l) = \frac{(-1)^r}{n}\sum_{q=\delta_m(l)}^{n-1}\frac{\omega_N^{(qm+l)\alpha}}{\left(2\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}}.$$

Доказательство. По определению t_α имеем

$$T_\alpha(l) = \sum_{p=0}^{m-1} t_\alpha(p)\,\omega_m^{-pl} = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r}\,\omega_N^{k(pn+r+\alpha)}\,\omega_m^{-pl} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r}\,\omega_N^{k(r+\alpha)} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{(k-l)p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r}\,\omega_N^{kr}\,\omega_N^{k\alpha}\,\delta_m(k-l).$$

Слагаемые в последней сумме отличны от нуля только при $k = qm + l$. Кроме того,

$$(\omega_N^k - 1)^{-2}\omega_N^k = \frac{\omega_N^k}{\omega_N^{2k} - 2\omega_N^k + 1} = \frac{1}{\omega_N^k + \omega_N^{-k} - 2} = \frac{1}{2\cos\frac{2\pi k}{N} - 2} = -\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi k}{N}}\,.$$

Таким образом,

$$T_\alpha(l) = \frac{1}{n} \sum_{q=\delta(l)}^{n-1} \left(-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi(qm+l)}{N}} \right)^r \omega_N^{(qm+l)\alpha},$$

что и требовалось. □

ЛЕММА 2. *Справедливы соотношения*

$$T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0) \neq 0,$$
$$T_0(l)^2 - T_1(l)\,T_{-1}(l) \neq 0, \qquad l \in 1 : m-1.$$

Доказательство. Используя предыдущую лемму, получаем

$$T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0) = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{\omega_n^q + \omega_n^{-q} - 2}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r}} = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{2\cos\frac{2\pi q}{n} - 2}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r}}\,.$$

Все слагаемые в последней сумме отрицательны, поэтому вся сумма отрицательна. Значит, $T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0) \neq 0$.

Далее, при $l \in 1 : m-1$ имеем

$$T_0(l)^2 - T_1(l)\,T_{-1}(l) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\left(2\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\right)^{2r}} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{\left(2\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}} -$$

$$- \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\omega_N^{pm+l}}{\left(2\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\right)^{2r}} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\omega_N^{-qm-l}}{\left(2\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1 - \omega_n^{p-q}}{\left(4\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\,\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}}\,.$$

Ясно, что $\mathrm{Re}(1-\omega_n^{p-q}) \geqslant 0$, причём равенство достигается только при $p=q$. Так как $n \geqslant 2$, то в сумме будут слагаемые с $p \neq q$. Поэтому вещественная часть суммы положительна, что гарантирует выполнение требуемого неравенства. □

2°. Обозначим через D_r множество сигналов вида

$$S(j) = c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(j-pn+r) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(j-pn+r-1), \tag{4}$$

где c_0, $c_1(p)$, $c_2(p)$ — комплексные коэффициенты, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)+c_2(p)\bigr) = 0. \tag{5}$$

Ясно, что D_r является линейным пространством.

Рассмотрим в пространстве D_r интерполяционную задачу

$$\begin{aligned} S(ln) &= y(l), \qquad l \in 0:m-1, \\ \Delta S(ln) &= z(l), \qquad l \in 0:m-1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $y(l)$, $z(l)$ — произвольные комплексные числа.

ТЕОРЕМА 1. *Интерполяционная задача* (6) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Условия (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S(ln) &= y(l), \\ S(ln+1) &= y(l)+z(l). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $S(j)$ из формулы (4), получаем

$$\begin{aligned} &c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(ln-pn+r) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(ln-pn+r-1) = y(l), \\ &c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(ln-pn+r+1) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(ln-pn+r) = y(l)+z(l). \end{aligned}$$

Воспользовавшись функциями t_0, t_{-1} и t_1, перепишем полученные уравнения в виде

$$c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, t_0(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, t_{-1}(l-p) = y(l),$$

$$c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, t_1(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, t_0(l-p) = y(l) + z(l),$$

или, в более компактной форме,

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 * t_0 + c_2 * t_{-1} &= y, \\ c_0 + c_1 * t_1 + c_2 * t_0 &= y + z. \end{aligned}$$

При переходе в спектральную область уравнения примут вид

$$\begin{aligned} m\, c_0\, \delta_m(l) + C_1(l)\, T_0(l) + C_2(l)\, T_{-1}(l) &= Y(l), \\ m\, c_0\, \delta_m(l) + C_1(l)\, T_1(l) + C_2(l)\, T_0(l) &= Y(l) + Z(l), \end{aligned} \tag{7}$$

где $C_1 = \mathcal{F}_m(c_1)$, $C_2 = \mathcal{F}_m(c_2)$, $Y = \mathcal{F}_m(y)$, $Z = \mathcal{F}_m(z)$.

Запишем уравнения (7) при $l = 0$:

$$\begin{aligned} m\, c_0 + C_1(0)\, T_0(0) + C_2(0)\, T_{-1}(0) &= Y(0), \\ m\, c_0 + C_1(0)\, T_1(0) + C_2(0)\, T_0(0) &= Y(0) + Z(0). \end{aligned}$$

Из условия (5) следует, что $C_1(0) + C_2(0) = 0$. Подставляя $-C_1(0)$ вместо $C_2(0)$ и вычитая из второго уравнения первое, придём к равенству

$$C_1(0)\big(T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0)\big) = Z(0).$$

В силу леммы 2 из этого равенства однозначно определяется $C_1(0)$, а из него находятся значения $C_2(0)$ и c_0.

При $l \in 1 : m-1$ система (7) принимает вид

$$\begin{aligned} C_1(l)\, T_0(l) + C_2(l)\, T_{-1}(l) &= Y(l), \\ C_1(l)\, T_1(l) + C_2(l)\, T_0(l) &= Y(l) + Z(l), \end{aligned}$$

то есть является системой двух линейных уравнений, причём определитель матрицы этой системы равен $T_0(l)^2 - T_1(l)\, T_{-1}(l)$. Он отличен от нуля по лемме 2.

Таким образом, значения c_0, $C_1(l)$ и $C_2(l)$ при $l \in 0 : m-1$ определяются однозначно. Применяя обратное преобразование Фурье, найдём коэффициенты $c_1(p)$ и $c_2(p)$ для $p \in 0 : m-1$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если $y(l)$ и $z(l)$ вещественны при $l \in 0 : m-1$, то значения интерполяционного сигнала также вещественны.*

Доказательство. Подставим выражение (4) в уравнения (6). С учётом условия (5) получим систему из $2m+1$ линейных уравнений с неизвестными c_0, $c_1(0),\dots,c_1(m-1)$, $c_2(0),\dots,c_2(m-1)$. Так как значения функции Бернулли $b_{2r}(j)$ вещественны при всех $j\in\mathbb{Z}$, то матрица системы будет вещественна. По условию и столбец правых частей состоит из вещественных чисел. Значит, коэффициенты c_0, $c_1(p)$, $c_2(p)$ интерполяционного сигнала, являющиеся решением системы, также вещественны. Но тогда вещественны и значения интерполяционного сигнала. □

3°. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sum_{j=0}^{N-1}\bigl|\Delta^r x(j)\bigr|^2 \to \min,\\ x(ln) &= y(l), \qquad l\in 0:m-1,\\ \Delta x(ln) &= z(l), \qquad l\in 0:m-1,\\ x &\in \mathbb{C}_N. \end{aligned} \tag{8}$$

ЛЕММА 3. *Пусть $S\in D_r$ — сигнал вида (4), $x\in\mathbb{C}_N$ — произвольный сигнал. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{N-1}\Delta^r S(j)\,\Delta^r x(j) = (-1)^r\sum_{p=0}^{m-1}\bigl(c_1(p)\,x(pn)+c_2(p)\,x(pn+1)\bigr).$$

Доказательство. Из свойств (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta^r b_{2r}(j-pn+r) &= b_r(j-pn+r) = (-1)^r\,b_r(pn-j),\\ \Delta^r b_{2r}(j-pn+r-1) &= b_r(j-pn+r-1) = (-1)^r\,b_r(pn+1-j). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N-1}\Delta^r S(j)\,\Delta^r x(j) =\\ &= (-1)^r\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{m-1}\bigl(c_1(p)\,b_r(pn-j)+c_2(p)\,b_r(pn+1-j)\bigr)\Delta^r x(j) =\\ &= (-1)^r\sum_{p=0}^{m-1}c_1(p)\sum_{j=0}^{N-1}b_r(pn-j)\Delta^r x(j) +\\ &+ (-1)^r\sum_{p=0}^{m-1}c_2(p)\sum_{j=0}^{N-1}b_r(pn+1-j)\Delta^r x(j). \end{aligned}$$

Согласно свойству (3)

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(pn-j)\Delta^r x(j) = x(pn) - e,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(pn+1-j)\Delta^r x(j) = x(pn+1) - e,$$

где $e = N^{-1}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)$. Значит,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j)\,\Delta^r x(j) = (-1)^r \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)\,x(pn) + c_2(p)\,x(pn+1)\bigr) -$$

$$- \frac{(-1)^r e}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p) + c_2(p)\bigr).$$

Осталось заметить, что $\sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p) + c_2(p)\bigr) = 0$. □

ТЕОРЕМА 2. *Единственным решением задачи* (8) *является интерполяционный сигнал* $S_* \in D_r$.

Доказательство. Пусть x — произвольный сигнал, удовлетворяющий ограничениям задачи (8). Положим $\eta = x - S_*$. Ясно, что

$$\eta(ln) = \eta(ln+1) = 0 \qquad \text{при } \ l \in 0 : m-1.$$

В силу линейности конечной разности r-го порядка имеем

$$f(x) = f(S_* + \eta) = \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r S_*(j) + \Delta^r \eta(j)\bigr|^2 =$$

$$= f(S_*) + f(\eta) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\,\Delta^r\,\overline{\eta}(j).$$

По лемме 3

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\,\Delta^r\,\overline{\eta}(j) = (-1)^r \sum_{p=0}^{m-1} \bigl(c_1(p)\,\overline{\eta}(pn) + c_2(p)\,\overline{\eta}(pn+1)\bigr) = 0.$$

Следовательно, $f(x) = f(S_*) + f(\eta)$. Поэтому $f(x) \geqslant f(S_*)$, то есть S_* — решение задачи (8).

Проверим единственность решения. Если $f(x) = f(S_*)$, то $f(\eta) = 0$. Но тогда $\Delta^r \eta(j) = 0$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Из разложения (3) следует, что $\eta \equiv \mathrm{const}$, а так как $\eta(0) = 0$, то $\eta \equiv 0$, что влечёт $x = S_*$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если* $\sum_{l=0}^{m-1} z(l) = 0$, *то интерполяционный сигнал* S *представим в виде*

$$S(j) = S_1(j) + S_2(j-1),$$

где $S_1, S_2 \in S_r^m$.

Доказательство. По построению интерполяционного сигнала

$$C_1(0) = Z(0)/\big(T_1(0) + T_{-1}(0) - 2T_0(0)\big),$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$. Но $Z(0) = \sum_{l=0}^{m-1} z(l) = 0$, поэтому $C_1(0) = 0$ и $C_2(0) = -C_1(0) = 0$. Следовательно,

$$\sum_{p=0}^{m-1} c_1(p) = C_1(0) = 0, \quad \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) = C_2(0) = 0.$$

Положим

$$S_1(j) = c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, b_{2r}(j - pn + r),$$
$$S_2(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, b_{2r}(j - pn + r).$$

Ясно, что $S(j) = S_1(j) + S_2(j-1)$, а по теореме о представлении дискретного периодического сплайна с помощью функций Бернулли [1, с. 17] сигналы S_1 и S_2 принадлежат S_r^m, что и требовалось. □

4°. Сигналы из пространства D_r можно использовать для построения замкнутых кривых. Пусть заданы наборы векторов

$$y(l) = \big(y_1(l), \ldots, y_d(l)\big) \in \mathbb{R}^d, \qquad l \in 0 : m-1,$$
$$z(l) = \big(z_1(l), \ldots, z_d(l)\big) \in \mathbb{R}^d, \qquad l \in 0 : m-1.$$

Найдём интерполяционные сигналы $S_0, S_1, \ldots, S_d$ из D_r, удовлетворяющие условиям

$$S_\nu(ln) = y_\nu(l), \qquad l \in 0 : m-1,$$
$$\Delta S_\nu(ln) = z_\nu(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

По предложению 1 все значения $S_\nu(j)$ будут вещественными. Поэтому можно построить замкнутую ломаную в пространстве $\mathbb{R}^d$ с вершинами

$$S(j) = \big(S_1(j), \ldots, S_d(j)\big), \qquad j \in 0 : N-1.$$

Эта ломаная будет проходить через заданные точки $y(l)$ и иметь в этих точках заданные направления $z(l)$.

Пусть $x(j) = \big(x_1(j), \dots, x_d(j)\big)$. Поскольку

$$\sum_{j=0}^{N-1} \big\|\Delta^r x(j)\big\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{d} \big|\Delta^r x_\nu(j)\big|^2 = \sum_{\nu=1}^{d} \sum_{j=0}^{N-1} \big|\Delta^r x_\nu(j)\big|^2,$$

то, принимая во внимание экстремальное свойство интерполяционных сигналов S_ν, можно утверждать, что вектор-функция $S(j)$ является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N-1} \big\|\Delta^r x(j)\big\|^2 \to \min, \\ x(ln) &= y(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta x(ln) &= z(l), \qquad l \in 0 : m-1, \end{aligned}$$

на множестве дискретных N-периодических вектор-функций $x(j)$.

ПРИМЕР. Положим $r = 3$, $d = 2$. На рисунках 1–4 изображены ломаные с вершинами $S(j)$. Векторы $y(l)$ показаны жирными точками, направления векторов $z(l)$ указаны пунктирными стрелками. Параметр n равен 20 на всех рисунках, кроме рисунка 1, где он равен 30.

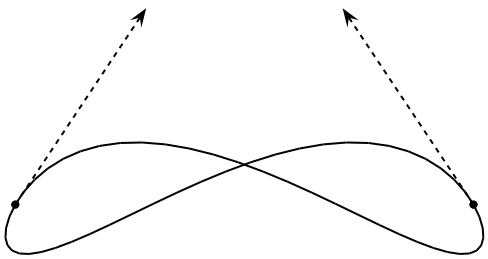


Рис. 1. 2 узла

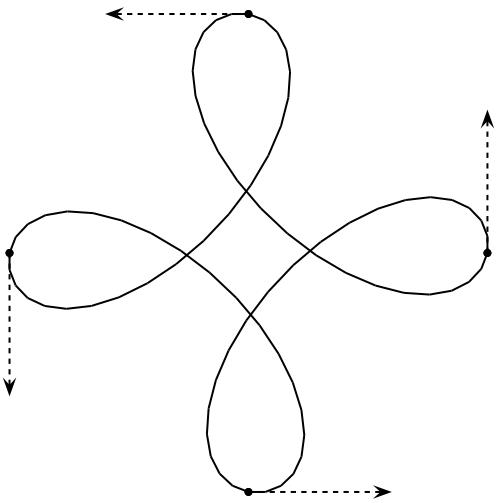


Рис. 2. 4 узла

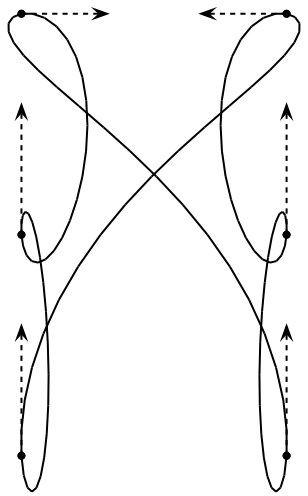


Рис. 3. 6 узлов

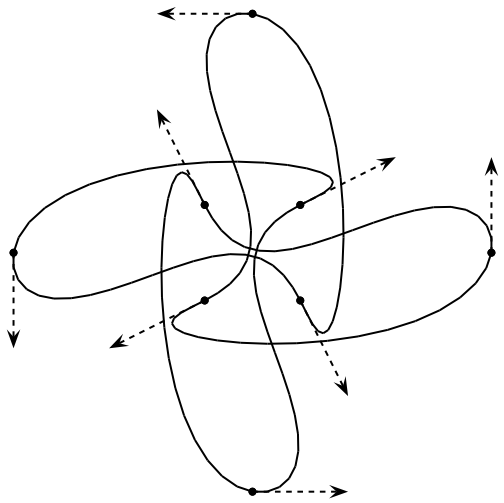


Рис. 4. 8 узлов

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

СФЕРИЧЕСКИЕ ДИЗАЙНЫ

А. М. Дурягин А. Б. Певный

4 марта 2009 г.

Даётся определение сферического t-дизайна в $\mathbb{R}^n$. Приводится пример 4-дизайна в $\mathbb{R}^3$, состоящего из вершин икосаэдра. Подробно исследуется вопрос о виде t-дизайнов на плоскости.

1°. Пусть t — чётное число, $t \geqslant 2$. Система единичных векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *сферическим t-дизайном*, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_i \rangle\big]^t = A\|x\|^t,$$

где $A > 0$ — некоторая константа. Такое определение используется в [1].

При $t = 2$ сферические 2-дизайны — это то же самое, что жёсткие фреймы, состоящие из единичных векторов.

Следует отметить, что есть другое определение сферического дизайна, связанное с интегрированием по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [2, 3]).

Количество элементов сферического t-дизайна не может быть меньше некоторой нижней границы. А именно, при $t = 2s$ должно выполнятся неравенство (см. [1]):

$$m \geqslant C_{n+s-1}^{n-1}. \tag{1}$$

Например, при $n = 3$, $t = 4$, $s = 2$ выполняется неравенство

$$m \geqslant C_4^2 = 6.$$

2°. Приведём пример минимального (состоящего из 6 векторов) 4-дизайна в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha, 1, 0), & g_4 &= (\alpha, -1, 0),\\ g_2 &= (0, \alpha, 1), & g_5 &= (0, \alpha, -1),\\ g_3 &= (1, 0, \alpha), & g_6 &= (-1, 0, \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. Точки $g_1, \ldots, g_6$ лежат на сфере S_R радиуса

$$R = \sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Введём единичные векторы $\varphi_i = g_i/R$. Эти векторы обладают свойством равноугольности

$$|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \quad i \neq j.$$

Покажем, что система $\{\varphi_i\}_{i=1}^6$ является сферическим 4-дизайном.

Пусть $X = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$. Вычислим сумму

$$\begin{aligned} F_4(X) = \sum_{i=1}^{6} [\langle g_i, X \rangle]^4 = (\alpha x + y)^4 + (\alpha y + z)^4 + \\ + (\alpha z + x)^4 + (\alpha x - y)^4 + (\alpha y - z)^4 + (\alpha z - x)^4. \end{aligned} \tag{2}$$

При возведении в 4-ую степень все нечётные степени x, y, z уничтожатся. Придём к выражению

$$\begin{aligned} F_4(X) = 2\,\big[\,(1+\alpha^4)\,x^4 + (1+\alpha^4)\,y^4 + (1+\alpha^4)\,z^4 + \\ + 6\,\alpha^2\,x^2\,y^2 + 6\,\alpha^2\,y^2\,z^2 + 6\,\alpha^2\,x^2\,z^2\,\big]. \end{aligned}$$

Нетрудно подсчитать, что $1 + \alpha^4 = 3\alpha^2 = \frac{3}{2}(3+\sqrt{5})$.

Введём обозначение

$$A = 2(1+\alpha^4) = 2 \cdot 3\alpha^2 = 3(3+\sqrt{5}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_4(X) = A\,\big[\,x^4 + y^4 + z^4 + 2\,x^2\,y^2 + 2\,y^2\,z^2 + 2\,x^2\,z^2\,\big] = \\ = A\,(x^2+y^2+z^2)^2 = A\|X\|^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставим в (2) $g_i = R\varphi_i$. С учётом (3) получим

$$\sum_{i=1}^{6} \big[\langle \varphi_i, X \rangle\big]^4 = \frac{A}{R^4}\,\|X\|^4 = \frac{6}{5}\,\|X\|^4 \qquad \forall X \in \mathbb{R}^3\,.$$

Значит, система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_6\}$ является сферическим 4-дизайном в $\mathbb{R}^3$.

Ясно, что система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_6\}$ не является сферическим 6-дизайном в $\mathbb{R}^3$, ибо при $n = 3$, $t = 6$, $s = 3$ выполнялось бы неравенство $m \geqslant C_5^2 = 10$, а у нас только 6 векторов.

Дополним систему $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ векторами $-\varphi_1, \ldots, -\varphi_6$. Получившуюся систему из 12 векторов в $\mathbb{R}^3$ обозначим $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{12}\}$. Выпуклая оболочка системы Φ является икосаэдром, вписанным в единичную сферу. Система Φ является сферическим 2-дизайном и 4-дизайном.

3°. В этом пункте рассматриваются сферические t-дизайны на плоскости, где t — произвольное чётное число, $t \geqslant 2$. Такие дизайны можно назвать круговыми.

Система единичных векторов $\{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$ в $\mathbb{R}^2$ будет круговым t-дизайном, если выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big[\langle b_k, X\rangle\big]^t = A\|X\|^t, \tag{4}$$

где $A > 0$ — константа, $X = (x, y)$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть $t = 2s$. Неравенство (1) принимает вид

$$m \geqslant C_{s+1}^1 = s + 1 = \frac{t}{2} + 1.$$

Если $m = \frac{t}{2} + 1$, то дизайн будем называть *минимальным*. При $t = 2$ минимальный дизайн должен содержать два вектора ($m = 2$). Два единичных вектора b_0 и b_1 образуют 2-дизайн (жёсткий фрейм) только тогда, когда эти векторы ортогональны: $\langle b_0, b_1\rangle = 0$. В этом случае концы векторов $\{b_0, b_1, -b_0, -b_1\}$ совпадают с вершинами квадрата.

В работе [1, с. 23] без доказательства утверждается, что при любом $t \geqslant 2$ половина вершин правильного $(t + 2)$-угольника, вписанного в единичную окружность, образует круговой t-дизайн. Нашей целью является доказательство этого утверждения путём непосредственной проверки равенства (4).

Пусть t — чётное, $t \geqslant 2$. Положим

$$m = \frac{t}{2} + 1. \tag{5}$$

Разделим окружность на $2m = t + 2$ частей и рассмотрим векторы

$$b_k = \left(\cos\frac{k\pi}{m},\ \sin\frac{k\pi}{m}\right), \qquad k \in 0 : m - 1. \tag{6}$$

Это половина векторов с концами в вершинах правильного $2m$-угольника (см. рис. 1):

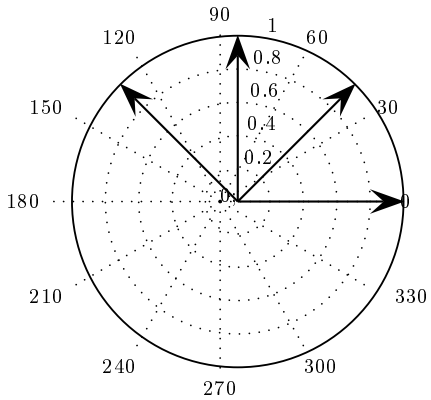


Рис. 1

ТЕОРЕМА. *Векторы* (6) *образуют* p*-дизайн с константой*

$$A_p = \frac{m(p-1)!!}{p!!}$$

для любого $p = 2, 4, \ldots, t$.

4°. Перед доказательством теоремы приведём хорошо известную лемму о точности квадратурной формулы прямоугольников для тригонометрических полиномов.

ЛЕММА. *Разделим отрезок* $[0, 2\pi]$ *на* $2m$ *равных частей с шагом* $h = \frac{\pi}{m}$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

порядка p, *где* $p \leqslant 2m - 1$, *справедливо равенство*

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} f\Big(\frac{j\pi}{m}\Big). \tag{7}$$

Доказательство. Полином $f(\varphi)$ можно записать в виде

$$f(\varphi) = \sum_{k=-p}^{p} c_k\, e^{ik\varphi}.$$

Достаточно доказать (7) для функции $e^{ik\varphi}$, $|k| \leqslant p$. При $k = 0$ получаем равенство $2\pi = 2\pi$. Если же $1 \leqslant |k| \leqslant p \leqslant 2m - 1$, то сумма в (7) будет геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = e^{ik\pi/m} \neq 1.$$

Сумма в (7) равна

$$\frac{q^{2m}-1}{q-1} = \frac{e^{2ik\pi}-1}{q-1} = 0.$$

Интеграл также равен нулю. □

5°. Доказательство теоремы.

Произвольный вектор $X = (x, y)$ можно представить в виде

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2} = \|X\|$, а θ — некоторый угол.

Тогда для любого $p = 2, 4, \ldots, t$ справедливы равенства

$$\langle b_k, X\rangle = r\left(\cos\frac{k\pi}{m}\cos\theta + \sin\frac{k\pi}{m}\sin\theta\right) = r\cos\left(\frac{k\pi}{m}-\theta\right),$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\big[\langle b_k, X\rangle\big]^p = r^p\, S(\theta), \tag{8}$$

где

$$S(\theta) = \sum_{k=0}^{m-1}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{m}-\theta\right)\right]^p.$$

Поскольку p — чётное, то функция $\cos^p\varphi$ имеет период π. Отсюда

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{m}-\theta\right)\right]^p.$$

Выражение $\big[\cos(\varphi-\theta)\big]^p$ является тригонометрическим полиномом порядка p по переменной φ. В силу (5) $2m = t+2$, отсюда $p \leqslant t = 2m-2 < 2m-1$. По лемме

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\frac{m}{\pi}\int_0^{2\pi}\big[\cos(\varphi-\theta)\big]^p\,d\varphi = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big[\cos\varphi\big]^p\,d\varphi, \tag{9}$$

так как при сдвиге аргумента 2π-периодической функции на фиксированное число θ интеграл не меняется. Значение последнего интеграла известно:

$$\int_0^{2\pi}\cos^p\varphi\,d\varphi = 4\int_0^{\pi/2}\cos^p\varphi\,d\varphi = 2\pi\,\frac{(p-1)!!}{p!!}\,.$$

В силу (8) и (9) придём к равенству

$$\sum_{k=0}^{m-1}\big[\langle b_k, X\rangle\big]^p = \frac{m(p-1)!!}{p!!}\,\|X\|^t.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Добавим к системе (6) противоположные векторы $-b_0, -b_1, \ldots, -b_{m-1}$. Получим систему из $2m$ векторов

$$b_k = \Big(\cos\frac{k\pi}{m}\,,\ \sin\frac{k\pi}{m}\Big), \qquad k \in 0 : 2m-1. \tag{10}$$

Эти векторы направлены в вершины правильного $2m$-угольника (см. рис. 2).

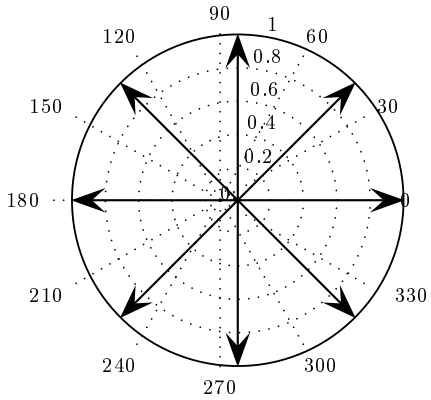


Рис. 2

Векторы (10) также образуют круговой p-дизайн (с константой $2\,A_p$).

Можно сказать так: вершины правильного $2m$-угольника образуют круговой p-дизайн при любом $p = 2, 4, \ldots, 2m-2$ (из формулы (5) следует, что $t = 2m-2$).

Более подробные сведения о сферических t-дизайнах можно найти в [4, 2, 1, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Memoirs of Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. N 463. P. 1–155.

2. Waldron S. *Generalized Welch bound equality sequences are tight frame* // Technical Report. 18 March 2003. (`http://www.math.auckland.ac.nz/~waldron`).

3. Bannai E., Munemasa A., Venkov B. *The nonexistence certain tight spherical designs* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.

4. Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Матем. просвещение. Сер. 3. Вып. 1. 1997. С. 115–121.

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ДИСКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА

Н. В. Чашников

14 марта 2009 г.

1°. Напомним определение обобщённой поверхности Кунса, данное в [1].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \dots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \dots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:m. \tag{1}$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \dots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \dots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:n. \tag{2}$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Пусть s — натуральное число. Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v:

$$\mathbf{T}_u = \left\{ \mathbf{g} \colon D_u \to \mathbb{R}^s \;\middle|\; \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^s(u)\big),\ g^k \in T_u \right\},$$

$$\mathbf{T}_v = \left\{ \mathbf{f} \colon D_v \to \mathbb{R}^s \;\middle|\; \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \dots, f^s(v)\big),\ f^k \in T_v \right\}.$$

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \dots, L_i^u(g^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^s(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ i \in 1:m;$$

$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \dots, L_j^v(f^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \dots, f^s(u)\big) \in \mathbf{T}_v,\ j \in 1:n.$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{3}$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{c} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s$:

$$\mathbf{c}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{4}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{c}(u,v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса.* В [1] доказано, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}_i^u(\mathbf{c}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), && i \in 1:m, && v \in D_v,\\ &\mathbf{L}_j^v(\mathbf{c}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), && j \in 1:n, && u \in D_u. \end{aligned} \tag{5}$$

2°. Рассмотрим частный случай обобщённых поверхностей Кунса, в котором в качестве смешивающих функций будут использоваться дискретные периодические сплайны.

Пусть $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$, где m_1, n_1 и m_2, n_2 — натуральные числа, отличные от единицы. Положим $D_u = D_v = \mathbb{Z}$. Определим пространство T_u как множество всех N_1-периодических, а T_v — как множество всех N_2-периодических вещественных функций над $\mathbb{Z}$. Зададим функционалы L_i^u и L_j^v формулами

$$\begin{aligned} &L_i^u(g) = g(in_1), && i \in 0:m_1-1,\\ &L_j^v(f) = f(jn_2), && j \in 0:m_2-1. \end{aligned}$$

Пусть r_1, r_2 — натуральные числа. Возьмём в качестве H_0^u интерполяционный сплайн порядка r_1, удовлетворяющий условиям

$$H_0^u(kn_1) = \delta_{m_1}(k), \qquad k \in 0:m_1-1,$$

а в качестве H_0^v — интерполяционный сплайн порядка r_2, удовлетворяющий условиям

$$H_0^v(kn_2) = \delta_{m_2}(k), \qquad k \in 0:m_2-1.$$

Остальные смешивающие функции определим формулами

$$\begin{aligned} &H_i^u(u) = H_0^u(u-in_1), && i \in 1:m_1-1, && u \in \mathbb{Z},\\ &H_j^v(v) = H_0^v(v-jn_2), && j \in 1:m_2-1, && v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Все функции H_i^u являются дискретными периодическими сплайнами порядка r_1, а все функции H_j^v — дискретными периодическими сплайнами порядка r_2.

Проверим, что выполняются соотношения (1):

$$L_i^u(H_j^u) = H_j^u(in_1) = H_0^u(in_1 - jn_1) = \delta_{m_1}(i-j) = \delta_{ij} \quad \text{при} \quad i,j \in 0 : m_1 - 1.$$

Аналогично проверяются соотношения (2).

Пусть заданы наборы вектор-функций

$$\mathbf{f}_0, \ldots, \mathbf{f}_{m_1-1},\ \mathbf{g}_0, \ldots, \mathbf{g}_{m_2-2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^s,$$

где вектор-функции $\mathbf{f}_i$ — N_2-периодические, $\mathbf{g}_j$ — N_1-периодические. Условия согласования (3) сведутся к равенствам

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{6}$$

Формула (4) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u,v) = &\sum_{i=0}^{m_1-1} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \\ &- \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(in_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Построенная по ней вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ будет удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \qquad u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \qquad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ясно, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ периодична с периодом N_1 по первому аргументу и с периодом N_2 — по второму.

3°. Обратимся к геометрической интерпретации вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$ при $s = 3$. Опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{g}_j$ задают два набора замкнутых ломаных в пространстве $\mathbb{R}^3$. Условия согласования (6) означают, что каждая из ломаных первого набора пересекается с каждой ломаной второго набора, образуя сетку. Пример сетки опорных кривых приведён на рис. 1. В этом примере $m_1 = 4$, $m_2 = 2$. Вектор-функции $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ задают замкнутые ломаные, полученные из одной ломаной последовательными поворотами на угол 90° вокруг вертикальной оси. Вектор-функции $\mathbf{g}_0$ и $\mathbf{g}_1$ задают замкнутые ломаные, лежащие в горизонтальной плоскости. Точки пересесений ломаных отмечены кружками. Значения n_1 и n_2 равны 20, поэтому ломаные $\mathbf{f}_i$ состоят из 40 отрезков, а ломаные $\mathbf{g}_j$ — из 80 отрезков.

Вектор-фунция $\mathbf{c}(u,v)$ задаёт набор точек в $\mathbb{R}^3$. Соединяя наборы из четырёх соседних точек

$$\mathbf{c}(u,v),\ \mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1) \text{ и } \mathbf{c}(u+1,v+1)$$

билинейной поверхностью для всех пар u и v, получим замкнутую кусочно-билинейную поверхность. Согласно условиям (8) полученная поверхность будет проходить через все опорные ломаные. На рис. 2 показана дискретная поверхность Кунса, построенная по опорным кривым, изображённым на рис. 1 для параметров $r_1 = r_2 = 3$.

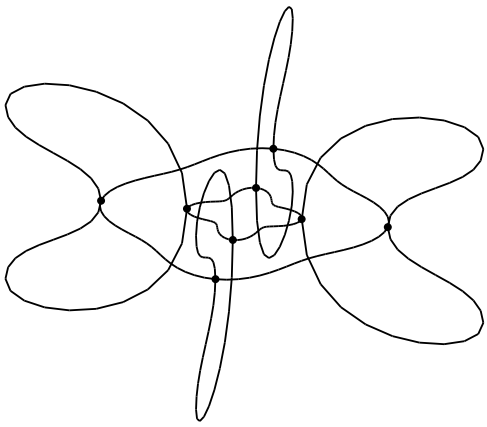


Рис. 1. Опорные кривые

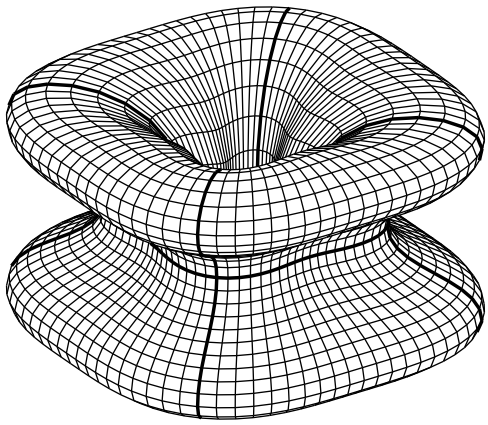


Рис. 2. Дискретная поверхность Кунса

4°. Установим экстремальное свойство дискретной поверхности Кунса.

Пусть $\mathbf{T}_{uv}$ — пространство всех вектор-функций от двух целочисленных аргументов, имеющих период N_1 по первому аргументу и N_2 — по второму. Положим

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{a}(u+i,v+j). \tag{9}$$

Отображение Δ^{r_1,r_2} является линейным оператором над $\mathbf{T}_{uv}$. Последовательно подставляя в (9) ноль вместо r_1 и r_2, получаем

$$\Delta^{r_1,0}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\mathbf{a}(u+i,v),$$

$$\Delta^{0,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{a}(u,v+j).$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) = \Delta^{r_1,0}\,\Delta^{0,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) = \Delta^{0,r_2}\,\Delta^{r_1,0}\,\mathbf{a}(u,v). \tag{10}$$

Если вектор-функция $\mathbf{a}(u,v)$ представима в виде $\mathbf{a}(u,v)=\mathbf{x}(u)\,\mathbf{y}(v)$, то

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)=\sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{x}(u+i)\,\mathbf{y}(v+j)=$$
$$=\sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\mathbf{x}(u+i)\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{y}(v+j).$$

Таким образом, выполняется равенство

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)=\Delta^{r_1}\,\mathbf{x}(u)\,\Delta^{r_2}\,\mathbf{y}(v). \tag{11}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}F(\mathbf{a}):=\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\right\|^2\to\inf,\\ \mathbf{a}(\cdot,jn_2)=\mathbf{g}_j,\qquad j\in 0:m_2-1,\\ \mathbf{a}(in_1,\cdot)=\mathbf{f}_i,\qquad i\in 0:m_1-1,\\ \mathbf{a}\in\mathbf{T}_{uv}.\end{gathered} \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 1. *Вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$, *построенная по формуле* (7), *является единственным решением экстремальной задачи* (12).

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}(u,v)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (12), а $\mathbf{c}(u,v)$ — вектор-функция, построенная по формуле (7). Положим $\boldsymbol{\eta}(u,v)=\mathbf{a}(u,v)-\mathbf{c}(u,v)$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(in_1,\cdot)&=0,\qquad i\in 0:m_1-1,\\ \boldsymbol{\eta}(\cdot,jn_2)&=0,\qquad j\in 0:m_2-1.\end{aligned} \tag{13}$$

Через $c^d(u,v)$, $\eta^d(u,v)$, $f_i^d(v)$, $g_j^d(u)$ будем обозначать координаты с индексом d векторов $\mathbf{c}(u,v)$, $\boldsymbol{\eta}(u,v)$, $\mathbf{f}_i(v)$ и $\mathbf{g}_j(u)$ соответственно. В силу линейности оператора Δ^{r_1,r_2} имеем

$$F(\mathbf{a})=F(\mathbf{c}+\eta)=\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{c}(u,v)+\Delta^{r_1,r_2}\,\boldsymbol{\eta}(u,v)\right\|^2=$$
$$=F(\mathbf{c})+F(\boldsymbol{\eta})+2\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\langle\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{c}(u,v),\Delta^{r_1,r_2}\,\boldsymbol{\eta}(u,v)\right\rangle=$$

$$= F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta}) + 2\sum_{d=1}^{3} l^d(c^d),$$

где

$$l^d(c^d) = \sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_1,r_2}\, c^d(u,v)\, \Delta^{r_1,r_2}\, \eta^d(u,v).$$

Формулу (7) для координаты с индексом d можно переписать в виде

$$c^d(u,v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_i^u(u)\, f_i^d(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u), \tag{14}$$

где $\widehat{g}_j^d(u) = g_j^d(u) - \sum_{i=0}^{m_1-1} H_i^u(u)\, g_j^d(in_1)$.

Применяя формулу (11), получаем

$$l^d\big(H_i^u(u)\, f_i^d(v)\big) = \sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_1} H_i^u(u)\, \Delta^{r_2} f_i^d(v)\, \Delta^{r_1,r_2}\, \eta^d(u,v) =$$

$$= \sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} f_i^d(v) \sum_{u=0}^{N_1-1} \Delta^{r_1} H_i^u(u)\, \Delta^{r_1,0}\, \Delta^{0,r_2}\, \eta^d(u,v).$$

Зафиксируем произвольное v. Из (13) следует, что $\Delta^{0,r_2}\, \eta^d(in_1, v) = 0$ для всех $i \in 0 : m_1 - 1$. Принимая во внимание, что H_i^u является дискретным периодическим сплайном порядка r_1, по теореме 3.2 из [2, с. 20] получаем

$$\sum_{u=0}^{N_1-1} \Delta^{r_1} H_i^u(u)\, \Delta^{r_1,0}\, \Delta^{0,r_2}\, \eta^d(u,v) = 0.$$

Следовательно, $l^d\big(H_i^u(u)\, f_i^d(v)\big) = 0$.

Аналогично, применяя формулу (11) и используя равенство (10), получаем

$$l^d\big(H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u)\big) = \sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} H_j^v(v)\, \Delta^{r_2}\, \widehat{g}_j^d(u)\, \Delta^{r_1,r_2}\, \eta^d(u,v) =$$

$$= \sum_{u=0}^{N_1-1} \Delta^{r_1}\, \widehat{g}_j^d(u) \sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} H_j^v(v)\, \Delta^{0,r_2}\, \Delta^{r_1,0}\, \eta^d(u,v).$$

Зафиксируем произвольное u. Из (13) следует, что $\Delta^{r_1,0}\, \eta^d(u, jn_2) = 0$ для всех $j \in 0 : m_2 - 1$. Принимая во внимание, что H_j^v является дискретным периодическим сплайном порядка r_2, получаем

$$\sum_{v=0}^{N_2-1} \Delta^{r_2} H_j^v(v)\, \Delta^{0,r_2}\, \Delta^{r_1,0}\, \eta^d(u,v) = 0.$$

Следовательно, $l^d\big(H_j^v(v)\,\widehat{g}_j^d(u)\big) = 0$.

Итак, отображение l^d обращается в ноль на всех слагаемых выражения (14). А так как l^d линейно, то $l^d(c^d)$ также равно нулю. Значит, $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta})$. Отсюда следует неравенство $F(\mathbf{a}) \geqslant F(\mathbf{c})$, что гарантирует оптимальность плана $\mathbf{c}(u,v)$ в задаче (12).

Проверим единственность решения. Допустим, что $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c})$. Тогда $F(\boldsymbol{\eta}) = 0$, что влечёт $\Delta^{r_1,r_2}\,\boldsymbol{\eta}(u,v) \equiv 0$. Зафиксируем произвольное u и положим $\boldsymbol{\mu}(v) = \Delta^{r_1,0}\,\boldsymbol{\eta}(u,v)$. Имеем $\Delta^{r_2}\,\boldsymbol{\mu}(v) \equiv 0$ и, согласно (13), $\boldsymbol{\mu}(0) = 0$. Значит, $\boldsymbol{\mu}(v) \equiv 0$, то есть $\Delta^{r_1,0}\,\boldsymbol{\eta}(u,v) = 0$ для всех u и v. Теперь зафиксируем произвольное v. Так как $\boldsymbol{\eta}(0,v) = 0$, то $\boldsymbol{\eta}(u,v) \equiv 0$. Из последнего тождества следует равенство $\mathbf{a} = \mathbf{c}$. Таким образом, единственность решения доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ФРЕЙМАХ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ

В. Н. Малозёмов

25 марта 2009 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из [1].

1°. Пусть $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ — фрейм Мерседес-Бенц в $\mathbb{R}^n$ [2]. Здесь и далее верхний индекс указывает на размерность вектора.

Возьмём ненулевой вектор a^n и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} F(\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1}) \to \min \\ \frac{n}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\xi_j\, b_j^n = a^n. \end{gathered} \tag{1}$$

Приведём конструктивный способ сведения задачи (1) к одномерной задаче безусловной минимизации.

2°. Напомним [2], что фреймы Мерседес-Бенц определяются рекуррентно:

$$\begin{gathered} b_1^1 = -1, \quad b_2^1 = 1\,; \\ b_j^k = \begin{pmatrix} c_k\, b_j^{k-1} \\ -1/k \end{pmatrix}, \ \ j \in 1:k\,; \quad b_{k+1}^k = (0,\ldots,0,1)^T; \quad k = 2,3,\ldots,n\,, \end{gathered} \tag{2}$$

где $c_k = \sqrt{k^2-1}/k$. При этом

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n+1} b_j^n = \mathbb{O}\,, \\ \frac{n}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\langle a^n, b_j^n\rangle\, b_j^n = a^n. \end{gathered} \tag{3}$$

В частности, вектор ξ_*^{n+1} с компонентами $\xi_*^{n+1}(j) = \langle a^n, b_j^n\rangle$ является планом задачи (1).

Найдём множество решений однородной системы

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \, b_j^n = \mathbb{O} \, . \tag{4}$$

Ранг матрицы системы (4) равен n, поскольку подматрица, составленная из столбцов $b_2^n, \ldots, b_{n+1}^n$, — нижнетреугольная с положительными диагональными элементами. Значит, множество решений системы (4) одномерно. Вектор ξ_0^{n+1} с компонентами $\xi_0^{n+1}(j) = 1$ согласно (3) удовлетворяет системе (4). Следовательно, множество решений системы (4) имеет вид $\xi^{n+1} = \lambda \, \xi_0^{n+1}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Множество планов задачи (1) допускает представление

$$\xi^{n+1} = \xi_*^{n+1} + \lambda \, \xi_0^{n+1}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \, .$$

Сама задача (1) сводится к одномерной задаче безусловной минимизации

$$f(\lambda) := F\big(\xi_*^{n+1} + \lambda \, \xi_0^{n+1}\big) \to \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \, . \tag{5}$$

3°. Покажем, как вычислять компоненты вектора ξ_*^{n+1}.

Введём обозначения $a^k = (a_1, \ldots, a_k)^T$; $\xi_*^{k+1}(j) = \langle a^k, b_j^k \rangle$, $j \in 1 : k+1$.

ЛЕММА. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\begin{gathered} \xi_*^{k+1}(j) = c_k \, \xi_*^k(j) - \tfrac{1}{k} \, a_k \, , \quad j \in 1 : k \, ; \quad \xi_*^{k+1}(k+1) = a_k \, ; \quad k = 2, 3, \ldots, n \, ; \\ \xi_*^2(1) = -a_1 \, , \quad \xi_*^2(2) = a_1 \, . \end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство очевидным образом следует из (2).

Вычисление вектора ξ_*^{n+1} по формуле (6) можно осуществить в одном массиве («на месте»). В начальный момент (при $k = 1$) массив заполнен так: $(-a_1, a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

4°. Рассмотрим три частных случая задачи (5). Предварительно упростим обозначение

$$\xi_j^* = \xi_*^{n+1}(j) \, , \quad j \in 1 : n+1 \, .$$

Отметим, что

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^* = 0 \, . \tag{7}$$

Действительно, согласно (3)

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^* = \sum_{j=1}^{n+1} \langle a^n, b_j^n \rangle = \Big\langle a^n, \sum_{j=1}^{n+1} b_j^n \Big\rangle = 0 \, .$$

Пусть

$$f_0(\lambda) = \left\|\xi_*^{n+1} + \lambda\,\xi_0^{n+1}\right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n+1}\left(\lambda + \xi_j^*\right)^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Минимум функции $f_0(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ достигается в единственной точке $\lambda = 0$.*

Доказательство следует из (7).

Таким образом, среди разложений вектора a^n по фрейму Мерседес-Бенц фреймовые коэффициенты $\xi_j^* = \langle a^n, b_j^n\rangle$, $j \in 1 : n+1$, образуют вектор с наименьшей l_2-нормой.

5°. Пусть теперь

$$f_1(\lambda) = \left\|\xi_*^{n+1} + \lambda\,\xi_0^{n+1}\right\|_1 = \sum_{j=1}^{n+1}\left|\lambda + \xi_j^*\right|.$$

Мы хотим найти разложение вектора a^n по фрейму Мерседес-Бенц с наименьшей l_1-нормой вектора коэффициентов разложения.

Упорядочим числа $(-\xi_j^*)$ по неубыванию. Полученную последовательность обозначим $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n+1}$. Очевидно, что

$$f_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1}\left|\lambda - \lambda_j\right|.$$

При этом согласно (7)

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j = 0\,.$$

Функция $f_1(\lambda)$ является выпуклой ломаной. При $\lambda \leqslant \lambda_1$ имеем

$$f_1(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n+1}\left(\lambda - \lambda_j\right) = -\left(n+1\right)\lambda\,.$$

Аналогично при $\lambda \geqslant \lambda_{n+1}$

$$f_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1}\left(\lambda - \lambda_j\right) = \left(n+1\right)\lambda\,.$$

Пусть $\lambda \in [\lambda_s, \lambda_{s+1}]$. Тогда

$$f_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{s}\left(\lambda - \lambda_j\right) - \sum_{j=s+1}^{n+1}\left(\lambda - \lambda_j\right).$$

В частности,

$$f_1(\lambda_{s+1}) - f_1(\lambda_s) = s\left(\lambda_{s+1} - \lambda_s\right) - \left(n+1-s\right)\left(\lambda_{s+1} - \lambda_s\right) =$$
$$= \left(2s - n - 1\right)\left(\lambda_{s+1} - \lambda_s\right).$$

При нечётном n положим $s_0 = \frac{n+1}{2}$. Ясно, что на множестве $(-\infty, \lambda_{s_0}]$ функция $f_1(\lambda)$ строго убывает, а на множестве $[\lambda_{s_0+1}, +\infty)$ строго возрастает. Если $\lambda_{s_0+1} = \lambda_{s_0}$, то $\lambda^* = \lambda_{s_0}$ — единственная точка минимума $f_1(\lambda)$ на $\mathbb{R}$. Если же $\lambda_{s_0+1} > \lambda_{s_0}$, то множество точек минимума совпадает с отрезком $[\lambda_{s_0}, \lambda_{s_0+1}]$.

При чётном n положим $s_0 = \frac{n+2}{2}$. В этом случае функция $f_1(\lambda)$ строго убывает на $(-\infty, \lambda_{s_0}]$ и строго возрастает на $[\lambda_{s_0}, +\infty)$. Единственной точкой минимума будет $\lambda^* = \lambda_{s_0}$.

Подведём итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Минимум функции $f_1(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке $\lambda^* = \lambda_{s_0}$, где $s_0 = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$. Это единственная точка минимума при чётном n. При нечётном n она единственна, когда $\lambda_{s_0} = \lambda_{s_0+1}$. Если же $\lambda_{s_0} < \lambda_{s_0+1}$, то множество точек минимума совпадает с отрезком $[\lambda_{s_0}, \lambda_{s_0+1}]$.*

Отметим, что план $\xi^{n+1} = \xi_*^{n+1} + \lambda^* \xi_0^{n+1}$ задачи (1) имеет наименьшую l_1-норму. При этом хотя бы одна компонента этого плана равна нулю.

6°. Согласно (3) при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ справедлива формула

$$a^n = \frac{n}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\langle a^n, b_j^n \rangle + \lambda\right] b_j^n .$$

Это значит, что в разложении вектора a^n по фрейму Мерседес-Бенц можно обеспечить равенство нулю любого коэффициента.

7°. В случае, когда целевая функция имеет вид

$$f_2(\lambda) = \max_{j \in 1:n+1} |\lambda + \xi_j^*| = \max_{j \in 1:n+1} |\lambda - \lambda_j| ,$$

справедливо следующие очевидное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Минимум функции $f_2(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ достигается в единственной точке $\lambda_* = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{n+1})$.*

План $\xi^{n+1} = \xi_*^{n+1} + \lambda_* \xi_0^{n+1}$ задачи (1) имеет наименьшую чебышёвскую норму.

8°. К теме доклада примыкает работа [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. Я., Рябцов И. С. *Оптимизация фреймовых представлений для сжатого зондирования МВ-фрейма.* 2009. 12 с. Препринт.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. Вып. 39, 2009. С. 3–25.

3. Donoho D. L. *Compressed sensing* // IEEE Trans. Inf. Theory. 2006. V. 52(4). P. 1289–1306.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ

М. Н. Истомина В. В. Максименко А. Б. Певный

1 апреля 2009 г.

Для каждого (n, m)-фрейма Парсеваля в $\mathbb{R}^n$, где $1 < n < m - 1$, определяются дополнительные фреймы Парсеваля в пространстве размерности $n' = m - n$. Путём перенормировки дополнительные фреймы можно определить для любого жёсткого фрейма.

1°. В пространстве $\mathbb{R}^n$ будем использовать обычное скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть m, n — натуральные числа, $1 < n < m - 1$. Напомним, что фреймом Парсеваля называется жёсткий фрейм с константой $A = 1$, т.е. система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется фреймом Парсеваля, если

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\langle x, x_k\rangle\right]^2 = \left\|x\right\|^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Через Φ обозначим матрицу со столбцами $x_1, \ldots, x_m$. Хорошо известно (см. [1]), что условие (1) равносильно условию

$$\Phi\,\Phi^T = I_n\,, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. В силу (2)

$$\langle \gamma_i, \gamma_k\rangle = \delta_{ik}\,,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Здесь, в отличие от (1), угловые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Дополним систему $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ строками $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m$ так, чтобы все m строк $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m\}$ образовали ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$. Такое дополнение, конечно, возможно. Через Φ_0 обозначим матрицу со строками $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Она является ортогональной:

$$\Phi_0\,\Phi_0^T = I_m\,. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_0^T \Phi_0 = I_m \,.$$

Это означает, что столбцы $X_1, \ldots, X_m$ матрицы Φ_0 также образуют ортонормированную систему. Столбец X_k можно записать в виде

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \qquad k \in 1:m, \tag{4}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — исходные векторы-столбцы, а $y_k \in \mathbb{R}^{m-n}$ — дополнительные вектор-столбцы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$, при этом выполнены соотношения*

$$\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2 = 1, \tag{5}$$

$$\langle x_k, x_s \rangle + \langle y_k, y_s \rangle = 0 \quad \textit{при } k \neq s. \tag{6}$$

Доказательство. Через Ψ обозначим матрицу со столбцами $y_1, \ldots, y_m$. Она состоит из добавленных строк $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m$, удовлетворяющих соотношению

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}\,, \qquad i, k \in n+1:m,$$

что соответствует равенству $\Psi\Psi^T = I_{m-n}$. Значит, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$. Соотношения (5) и (6) вытекают из ортонормированности векторов (4).

Предложение доказано. □

Построенный фрейм $\{y_1, \ldots, y_m\}$ называется *дополнительным фреймом Парсеваля.* Он обладает характерным свойством

$$\langle y_k, y_s \rangle = -\langle x_k, x_s \rangle \quad \text{при } k \neq s.$$

2°. Конструкции из п. 1° можно придать другую форму. Введём матрицу размера $n \times m$

$$P = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ldots\ldots & & & & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right].$$

Умножение P на вектор $X = (x_1, \ldots, x_m)^T$ приводит к отбрасыванию последних $m-n$ компонент вектора X:

$$PX = (x_1, \ldots, x_n)^T.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система векторов* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *является фреймом Парсеваля в* $\mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис* $\{X_1, \ldots, X_m\}$ *в* $\mathbb{R}^m$ *такой, что*

$$PX_k = x_k\,, \qquad k \in 1:m. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Если $\{x_k\}_{k=1}^m$ — фрейм Парсеваля, то существует ортонормированная система в $\mathbb{R}^m$ вида (4), а тогда $PX_k = x_k$, $k \in 1:m$.
Достаточность. Пусть существует ортонормированный базис $\{X_k\}_{k=1}^m$ и выполнено (7). Рассмотрим матрицу Φ_0 со столбцами $X_1, \ldots, X_m$. Это ортогональная матрица. Её строки $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ также образуют ортонормированную систему:

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}\,, \qquad i, k \in 1:m. \tag{8}$$

Из векторов $x_k = PX_k$, $k \in 1:m$, составим матрицу Φ размера $n \times m$. Её строками являются $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. В силу (8) выполнено равенство $\Phi\Phi^T = I_n$, значит, $\{x_k\}_{k=1}^m$ — фрейм Парсеваля.

Предложение доказано. □

Формула (7) даёт единообразный способ получения фреймов Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^n$. На этот способ обращали внимание многие авторы (см., например, [2, 3]).

3°. Обратимся к построению дополнительных фреймов для равноугольных жёстких фреймов.

Напомним [1], что система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *равноугольным жёстким фреймом*, если

1) $\|\varphi_k\| = 1, \quad k \in 1:m;$

2) $|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle| = c \quad$ при $k \neq s;$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^m \left[\langle x, \varphi_k \rangle\right]^2 = A\|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$

где c и A — некоторые константы. Показывается [1], что константы определяются однозначно:

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}\,, \qquad A = \frac{m}{n}\,.$$

Равноугольные жёсткие фреймы существуют не для всех пар (n, m). Полезным является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* $1 < n < m - 1$. *Если для данной пары* (n, m) *существует равноугольный жёсткий фрейм* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, *то существует равноугольный жёсткий фрейм* $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ *для пары* (n', m), *где* $n' = m - n$; *при этом*

$$\operatorname{sign}\langle \psi_k, \psi_s \rangle = -\operatorname{sign}\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle \quad \textit{при } k \neq s.$$

Доказательство. Векторы

$$x_k = \sqrt{\frac{n}{m}}\, \varphi_k\,, \qquad k \in 1 : m,$$

образуют фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^n$. По построению п. 1° существует дополнительный фрейм Парсеваля $\{y_k\}$ в $\mathbb{R}^{n'}$, при этом выполнены равенства (5) и (6).

Из этих равенств получаем

$$\|y_k\|^2 = 1 - \|x_k\|^2 = 1 - \frac{n}{m} = \frac{m-n}{m}\,,$$

$$\langle y_k, y_s \rangle = -\langle x_k, x_s \rangle = -\frac{n}{m}\,\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle = -\frac{n}{m}\,c \quad \text{при } k \neq s.$$

Введём теперь векторы

$$\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\, y_k\,, \qquad k \in 1 : m.$$

Они обладают свойствами:

1) $\|\psi_k\| = 1$, $k \in 1 : m$;

2) $|\langle \psi_k, \psi_s \rangle| = \frac{m}{m-n}\,|\langle y_k, y_s \rangle| = \frac{n}{m-n}\,c$ при $k \neq s$;

3) $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{R}^{n'}$ с константой

$$\frac{m}{m-n} = \frac{m}{n'}\,.$$

Значит, $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^{n'}$, где $n' = m - n$.

Предложение доказано. □

4°. Пусть $1 < n < m - 1$ и $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$. Введём матрицу Φ размера $n \times m$ со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Тогда условие жёсткого фрейма, как и выше, можно записать в виде

$$\Phi\,\Phi^T = \frac{m}{n}\, I_n\,. \tag{9}$$

Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Тогда (9) равносильно условию

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \frac{m}{n}\,\delta_{ik}\,, \qquad i, k \in 1:n.$$

Процесс построения дополнительного фрейма можно конкретизировать следующим образом:

1. Введём нормированные векторы-строки

$$s_i = \sqrt{\frac{n}{m}}\,\gamma_i\,, \qquad i \in 1:n.$$

2. Дополним систему $\{s_1, \ldots, s_n\}$ строками $s_{n+1}, \ldots, s_m$ до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^m$. Из строк $s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im})$, $i \in 1:m$, составим матрицу S.

3. Столбцы матрицы S представим в виде

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad y_k \in \mathbb{R}^{m-n}; \qquad k \in 1:m.$$

Нормированные векторы $\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\,y_k$, $k \in 1:m$, образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

5°. Введём симметричную матрицу размера $m \times m$

$$Q[i,k] = \begin{cases} 0, & i = k, \\ \operatorname{sign}\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle, & i \neq k, \end{cases}$$

которая является *конференц–матрицей* (см. [4]).

ТЕОРЕМА. *Столбцы $s_1^T, \ldots, s_n^T$ являются собственными векторами матрицы Q, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = \frac{m-n}{nc}$. Столбцы $s_{n+1}^T, \ldots, s_m^T$ являются собственными векторами матрицы Q, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = -\frac{1}{c}$.*

Доказательство. Введём матрицу Грама $G = \Phi^T\Phi$, состоящую из скалярных произведений $\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle$, $i, k \in 1:m$, и найдём её собственные числа. Для $k \in 1:n$ вычислим $Gs_k^T = \Phi^T\,\Phi\,s_k^T$. Строки матрицы Φ ранее были обозначены $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Имеем

$$\langle \gamma_i, s_k \rangle = 0, \quad i \neq k; \qquad \langle \gamma_k, s_k \rangle = \sqrt{\frac{n}{m}}\,\langle \gamma_k, \gamma_k \rangle = \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \frac{m}{n}\,.$$

Отсюда

$$Gs_k^T = \Phi^T(\Phi\,s_k^T) = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}\,\gamma_k^T = \frac{m}{n}\,s_k^T, \qquad k \in 1:n.$$

Кроме того, $Gs_k^T = \mathbb{O}$ при $k \in n+1:m$. Значит, собственными числами G являются числа $\frac{m}{n}$ и 0.

Ввиду равноугольности фрейма $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ справедливо равенство $Q = \frac{1}{c}(G - I_m)$. Отсюда получаем, что

$$Q\, s_k^T = \frac{1}{c}\left(\frac{m}{n} - 1\right) s_k^T = \frac{m-n}{nc}\, s_k^T, \qquad k \in 1:n;$$

$$Q\, s_k^T = -\frac{1}{c}\, s_k^T, \qquad k \in n+1:m.$$

Теорема доказана. □

6°. Один из возможных способов построения дополнительного равноугольного фрейма $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ основан на приведённой теореме. Найдём ортонормированные собственные векторы $s_{n+1}^T, \ldots, s_m^T$ матрицы Q, соответствующие собственному числу $-\frac{1}{c}$. Из строк $s_{n+1}, \ldots, s_m$ составим матрицу

$$Y = \begin{bmatrix} s_{n+1,1} & \ldots & s_{n+1,m} \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ s_{m1} & \ldots & s_{mm} \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы обозначим $y_1, \ldots, y_m$. Тогда векторы

$$\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\, y_k\,, \qquad k \in 1:m,$$

образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

ПРИМЕР. Пусть $n = 3$, $m = 6$. Известным примером равноугольной системы в $\mathbb{R}^3$ является набор из 6 векторов:

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha, 1, 0), & g_4 &= (\alpha, -1, 0), \\ g_2 &= (0, \alpha, 1), & g_5 &= (0, \alpha, -1), \\ g_3 &= (1, 0, \alpha), & g_6 &= (-1, 0, \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. Нормированные векторы $\varphi_k = g_k/\sqrt{1+\alpha^2}$, $k \in 1:6$, образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^3$, причём

$$\left|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\right| = \tfrac{1}{\sqrt{5}} =: c \quad \text{при } k \neq s.$$

Построим дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

В данном случае матрица Q имеет вид:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

У этой симметричной матрицы можно найти собственные векторы, соответсвующие собственному числу $\lambda_2 = -1/c = -\sqrt{5}$. Запишем эти векторы в строчку:

$$\gamma_4 = (-1, 0, 0, \alpha, \alpha, 1),$$

$$\gamma_5 = (0, 0, -1, \alpha, 1, \alpha),$$

$$\gamma_6 = (0, -1, 0, 1, \alpha, \alpha).$$

После ортогонализации и нормировки этих векторов получим векторы s_4, s_5, s_6, которые запишем в виде строк матрицы Y размера 3×6.

Столбцы этой матрицы, как и выше, обозначим $y_1, \ldots, y_6$. Векторы $\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\, y_k = \sqrt{2}\, y_k$, $k \in 1 : 6$, образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм. Матрица $\Psi = \left[\psi_1, \ldots, \psi_6\right]$ имеет вид

$$\Psi = \sqrt{2}\, Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{2}}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & \frac{2}{5+\sqrt{5}} & -\frac{2}{5+\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

При этом

$$\left|\langle \psi_k, \psi_s \rangle\right| = \tfrac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \langle \psi_k, \psi_s \rangle = -\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle \quad \text{при } k \neq s.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа. 2009. Вып. 39. С. 3–25.

2. Han D., Larson D. R. *Frames, bases and group representation* // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 147. N 697. P. 1–94.

3. Casazza P. G., Redmond D., Tremain J. C. *Real equiangular frames* // (`http://www.math.missouri.edu/~pete`).

4. Conway J. H., Sloane N. J. A. *Sphere packing, Lattices and Groups. 3rd edition.* Springer–Verlag, 1999.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЗАЙНОВ

Н. О. Котелина А. Б. Певный

4 апреля 2009 г.

Сферические дизайны исследовались в работах [1, 2, 4, 5]. В данном докладе выводится формула для константы A_t в тождестве Варинга, определяющем сферические t-дизайны. Приводится второе определение сферических t-дизайнов, связанное с интегрированием по сфере S^{n-1}, и доказывается эквивалентность двух определений.

1°. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Всюду далее t — чётное число, $t \geqslant 2$.

Определение. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется *сферическим t-дизайном*, если существует константа $A_t > 0$ такая, что выполнено тождество Варинга

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^t = A_t \, \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Такое определение используется в [2].

Нетрудно определить константу A_t последовательным применением оператора Лапласа Δ к обеим частям тождества (1). После первого применения Δ получим равенство

$$t\,(t-1) \sum_{i=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_i\rangle\big]^{t-2} = A_t \, t\,(t+n-2)\, \|x\|^{t-2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

откуда следует, что Φ является $(t-2)$-дизайном с константой

$$A_{t-2} = A_t\,(t+n-2)/(t-1).$$

Пусть $s = t/2$. После $s-1$ применений Δ придём к равенству

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_i\rangle\big]^2 = A_2 \, \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Это равенство означает, что система Φ является жестким фреймом в $\mathbb{R}^n$ (см. [3]). Применим к (2) оператор Δ. Получим равенство $2m = A_2 \cdot 2n$, откуда $A_2 = m/n$ (эта константа известна в теории фреймов [3]). Из рекуррентного соотношения

$$A_p = A_{p-2}\,\frac{p-1}{p+n-2}\,, \qquad p = 4, 6, \ldots, t; \qquad A_2 = \frac{m}{n}$$

легко получить формулу $A_t = cm$, где

$$c = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\ldots(n+t-2)}\,. \tag{3}$$

Попутно показано, что сферический t-дизайн Φ является сферическим p-дизайном для всех $p = 2, 4, \ldots, t$.

2°. В работах [1, 4, 5] использовалось другое определение сферических t-дизайнов. Приведём два утверждения, устанавливающие связь между двумя определениями. Пусть $\mathcal{P}_{n,t}$ — пространство однородных полиномов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ степени t.

ТЕОРЕМА 1. *Тождество* (1) *равносильно соотношению*

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i) \qquad \forall\ Q \in \mathcal{P}_{n,t}\,, \tag{4}$$

где $\sigma_n = 2\,\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ *— площадь сферы* S^{n-1}.

Замечание. Равенство (4) означает, что для любого полинома Q из $\mathcal{P}_{n,t}$ среднее значение $Q(x)$ на сфере равно среднему значению $Q(x)$ на системе точек $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$.

3°. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются ряд вспомогательных сведений.

В мемуаре [2], формула (8.11), приводится значение интеграла от одночлена x_1^t по единичной сфере S^{n-1} при четном $t = 2s$. Это значение чудесным образом выражается через константу c, определённую формулой (3):

$$\int_{S^n} x_1^t\,dS = \sigma_n \prod_{j=0}^{s-1}\frac{2j+1}{2j+n} = c\,\sigma_n, \tag{5}$$

где σ_n, как и выше, равно площади S^{n-1}. Формула (5) является частным случаем формулы для интеграла от одночлена $x_1^{i_1}\,x_2^{i_2}\,\ldots\,x_n^{i_n}$, приведённой в [6, с. 347]. Далее установим лемму, которая в [2] приписывается Гильберту.

ЛЕММА. *Для любого вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство*

$$I := \int_{S^{n-1}} \big[\langle \varphi, x\rangle\big]^t \, dS_\varphi = c\,\sigma_n \, \|x\|^t.$$

Доказательство. Зафиксируем вектор $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Сделаем ортогональное преобразование $\varphi = Uy$. Поскольку $\big|\det(U)\big| = 1$, получим равенство

$$I = \int_{S^{n-1}} \big[\langle Uy, x\rangle\big]^t \, dS_y = \int_{S^{n-1}} \big[\langle U^T x, y\rangle\big]^t \, dS_y \,. \tag{6}$$

Выберем теперь U так, чтобы

$$U^T x = \|x\| \, e_1 := \|x\| \, (1, 0, \ldots, 0)^T. \tag{7}$$

Для этого нужно взять первый столбец U равным $x/\|x\|$, а остальные столбцы выбрать так, чтобы все n столбцов были ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$. Тогда матрица U будет ортогональной и будет выполнено (7). В силу (7), (6) и (5) имеем

$$I = \int_{S^{n-1}} \big[\langle \|x\| \, e_1, y\rangle\big]^t \, dS_y = \|x\|^t \int_{S^{n-1}} y_1^t \, dS_y = c\,\sigma_n \, \|x\|^t.$$

Лемма доказана. □

4°. Возьмём два полинома $f, g \in \mathcal{P}_{n,t}$:

$$f(x) = \sum_{|i|=t} a(i)\, x^i, \qquad g(x) = \sum_{|i|=t} b(i)\, x^i,$$

где $i = (i_1, \ldots, i_n)$ — мультииндекс, $|i| = i_1 + \ldots + i_n$, $x^i = x_1^{i_1} \, x_2^{i_2} \, \ldots \, x_n^{i_n}$. Введём скалярное произведение

$$[f, g] = \sum_{|i|=t} \frac{a(i)\, b(i)}{c(i)}\,, \quad \text{где} \quad c(i) = \frac{t!}{i_1!\, i_2! \, \ldots \, i_n!}\,.$$

С этим скалярным произведением $\mathcal{P}_{n,t}$ становится гильбертовым пространством. Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ введем полином

$$\rho_\varphi(x) = \big[\langle \varphi, x\rangle\big]^t = \big[\varphi_1 \, x_1 + \ldots + \varphi_n \, x_n\big]^t.$$

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathcal{P}_{n,t}$ легко проверяется равенство

$$[\rho_\varphi, f] = f(\varphi).$$

Оно следует из соотношений

$$\rho_\varphi(x) = \sum_{|i|=t} c(i)\,\varphi^i\,x^i, \tag{8}$$

$$[\rho_\varphi, f] = \sum_{|i|=t} \frac{c(i)\,\varphi^i\,a(i)}{c(i)} = f(\varphi).$$

Значит, $\rho_\varphi(x)$ является воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{P}_{n,t}$.

5°. Доказательство теоремы 1. Пусть выполнено тождество (1), которое можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}(x) = A_t\,\omega_t(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $\omega_t(x) = \|x\|^t$. В пункте 1° было установлено, что $A_t = cm$. Умножим (9) скалярно на произвольный полином $Q \in \mathcal{P}_{n,t}$:

$$\sum_{i=1}^{m} [\rho_{\varphi_i}, Q] = c\,m\,[\omega_t, Q]. \tag{10}$$

Чтобы перейти к интегралам, воспользуемся леммой:

$$\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\,dS_\varphi = \int_{S^{n-1}} \big[\langle x, \varphi\rangle\big]^t\,dS_\varphi = c\,\sigma_n\,\|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на Q. Получим

$$\Big[\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\,dS_\varphi\,,\ Q(x)\Big] = c\,\sigma_n\,[\omega_t, Q]. \tag{11}$$

Имеем в силу (8)

$$\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\,dS_\varphi = \sum_{|i|=t} c(i)\,M(i)\,x^i,$$

где $M(i) = \int_{S^{n-1}} \varphi^i\,dS_\varphi$. Полином $Q(x)$ запишем в виде

$$Q(x) = \sum_{|i|=t} q(i)\,x^i.$$

Тогда скалярное произведение в левой части (11) равно

$$\sum_{|i|=t} \frac{c(i)\,M(i)\,q(i)}{c(i)} = \int_{S^{n-1}} \sum_{|i|=t} q(i)\,\varphi^i\,dS_\varphi = \int_{S^{n-1}} Q(\varphi)\,dS_\varphi\,. \tag{12}$$

Таким образом, равенство (11) эквивалентно равенству

$$\int_{S^{n-1}} Q(\varphi)\, dS_\varphi = c\, \sigma_n\, [\omega_t, Q].$$

В интеграле букву φ заменим на x, а скалярное произведение выразим из (10). Получим

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [\rho_{\varphi_i}, Q] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i).$$

Пришли к равенству (4).

Обратно, пусть выполнено (4) для любого $Q \in \mathcal{P}_{n,t}$. Равенство (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(\varphi)\, dS_\varphi = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [\rho_{\varphi_i}, Q].$$

В силу равенств (12) интеграл в левой части записывается так:

$$\frac{1}{\sigma_n} \Big[\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\, dS_\varphi\,,\ Q(x) \Big] = \Big[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i},\ Q \Big]. \tag{13}$$

По лемме

$$\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\, dS_\varphi = \int_{S^{n-1}} \big[\langle x, \varphi \rangle\big]^t\, dS_\varphi = c\, \sigma_n\, \omega_t(x).$$

Подставляя в (13), получаем

$$c\, [\omega_t, Q] = \Big[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i},\ Q \Big].$$

Поскольку это выполнено для любого $Q \in \mathcal{P}_{n,t}$, то

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}(x) = c\, m\, \omega_t(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

что эквивалентно (1). Таким образом, условия (1) и (4) равносильны.

Теорема 1 доказана. □

6°. Симметричные дизайны. Рассмотрим систему из $2m$ точек

$$\Phi_0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_m\}.$$

Положим $\varphi_{m+i} = -\varphi_i$. Тогда $\Phi_0 = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2m}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический* t*-дизайн. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} Q(\varphi_i) \tag{14}$$

для любого полинома $Q(x)$ *степени не выше* $t+1$.

Эта теорема легко выводится из теоремы 1. Полином $Q(x)$ можно записать в виде $Q(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + \ldots + Q_{t+1}(x)$, где Q_p — однородный полином степени p. Для $Q_0(x) \equiv C = const$ равенство (14) примет вид $C = C$. Сферический t-дизайн Φ является сферическим p-дизайном для $p = 2, 4, \ldots, t$. Для этих p по теореме 1

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q_p(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q_p(\varphi_i) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} Q_p(\varphi_i).$$

Если же p нечетно, $p = 1, 3, \ldots, t+1$, то равенство (14) будет выполняться как равенство $0 = 0$.

В работах [1, 4, 5, 8] система Φ_0, удовлетворяющая (14), называется сферическим $(t+1)$-дизайном.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Venkov, *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, Enseign. Math., Géneve, 2001, P. 10–86.

2. B. Reznick, *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 96 (1992), No. 463, P. 1–155.

3. В. Н. Малоземов, А. Б. Певный, *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа, вып. 39 (2009), С. 3–25.

4. P. Delsarte, J. M. Goetals, J. J. Seidel, *Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials* // Philips Res. Repts. 30 (1975), No. 3, P. 91–105.

5. E. Bonnai, A. Munemasa, B. Venkov, *The nonexistence of certain tight spherical designes* // Алгебра и анализ, Т. 16 (2004), вып. 4, С. 1–23.

6. P. J. Davis, P. Rabinovitz, *Methods of numerical integration*, 2nd ed., Academic Press, 1984.

7. В. А. Юдин, *Вращение сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. № 3. С. 39–45.

8. L. C. Leal Junior, V. A. Menegatto, *On the construction of spherical designes* // TEMA Tend. Mat. Appl. Comput. 2007. V. 8. No. 3. P. 423–432.

ФРЕЙМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н. А. Соловьёва

11 апреля 2009 г.

1°. Представляется естественным начинать изложение теории фреймов в $\mathbb{C}^n$ со следующего определения:

Векторы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ образуют фрейм, если их линейная оболочка совпадает с $\mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{L}\big(\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}\big) = \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Обозначим через Φ матрицу со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда эрмитова матрица $S = \Phi\,\Phi^*$ положительно определена.*

Доказательство. При всех $x \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$\langle \Phi\,\Phi^* x, x\rangle = \big\|\Phi^* x\big\|^2. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что матрица S неотрицательно определена. Проверим, что при выполнении условия (1) она положительно определена.

Пусть $\langle Sx_0, x_0\rangle = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Согласно (2), $\Phi^* x_0 = 0$, то есть $\langle x_0, \varphi_k\rangle = 0$ при всех $k \in 0 : m-1$. В силу (1) существует разложение

$$x_0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\,\varphi_k\,.$$

Умножим его скалярно на x_0. Получим

$$\big\|x_0\big\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k \langle x_0, \varphi_k\rangle = 0\,.$$

Значит, $x_0 = 0$. Положительная определённость матрицы S установлена.

Наоборот, предположим, что матрица S положительно определена, и покажем, что выполняется соотношение (1).

Известно, что у эрмитовой положительно определённой матрицы существует обратная матрица, которая также является эрмитовой и положительно определённой. Введём векторы

$$\psi_k = S^{-1}\,\varphi_k\,, \qquad k \in 0 : m-1\,,$$

и обозначим через Ψ матрицу со столбцами $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$. Имеем $\Psi = S^{-1}\,\Phi$. Как следствие, $\Psi\,\Phi^* = I_n$. Переходя к сопряжённым матрицам, получаем

$$\Phi\,\Psi^* = I_n\,.$$

Умножим обе части последнего равенства на произвольный вектор $x \in \mathbb{C}^n$. Придём к разложению

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} \langle x, \psi_k \rangle\,\varphi_k\,,$$

которое гарантирует выполнение условия (1). □

Предложение 1 можно переформулировать в эквивалентном виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ *является фреймом в* $\mathbb{C}^n$ *тогда и только тогда, когда система линейных однородных уравнений*

$$\langle x, \varphi_k \rangle = 0\,, \qquad k \in 0 : m-1\,,$$

имеет только нулевое решение.

Доказательство очевидным образом следует из предложения 1 и формулы (2).

2°. Пусть U — унитарная матрица порядка n с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и соответствующими ортонормированными собственными векторами $p_1, \ldots, p_n$. Возьмём единичный вектор $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим при $m \geqslant n$ систему векторов

$$\left\{\varphi_0, U\varphi_0, U^2\varphi_0, \ldots, U^{m-1}\varphi_0\right\}. \tag{3}$$

Нас интересует вопрос, когда эта система будет фреймом.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система* (3) *была фреймом в* $\mathbb{C}^n$*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(α) *собственные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* U *попарно различны;*

(β) $\left|\langle \varphi_0, p_j \rangle\right| \neq 0$ *при всех* $j \in 1 : n$.

Доказательство. Наряду с векторами $\varphi_k = U^k\varphi_0$ рассмотрим векторы $g_k = P^*\varphi_k$, где P^* — сопряжённая матрица к унитарной матрице P, составленной из столбцов $p_1, \dots, p_n$. Обозначим через Φ и G матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$ соответственно. Имеем $G = P^*\Phi$ и

$$\langle GG^*x, x\rangle = \langle P^*\Phi\,\Phi^*Px, x\rangle = \langle \Phi\,\Phi^*y, y\rangle\,,$$

где $y = Px$. Отсюда и из предложения 1 следует, что система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ будет фреймом тогда и только тогда, когда фрейм образуют векторы $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$.

Воспользуемся спектральным разложением матрицы U:

$$U = P\,\Lambda\,P^*,$$

где Λ — диагональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Получим

$$g_k = P^*U^k\varphi_0 = P^*P\,\Lambda^kP^*\varphi_0 = \Lambda^k\big(P^*\varphi_0\big)\,. \tag{4}$$

Обозначим $b = P^*\varphi_0$. Это вектор с координатами $b(j) = \langle\varphi_0, p_j\rangle$, $j \in 1:n$. Координаты вектора g_k имеют вид

$$g_k(j) = \lambda_j^k\,b(j)\,, \qquad j \in 1:n\,, \quad k \in 0:m-1\,. \tag{5}$$

Нужно доказать, что векторы (5) образуют фрейм в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (α) и (β).

Будем опираться на предложение 2. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений $\langle x, g_k\rangle = 0$, $k \in 0:m-1$, которую в силу (5) можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\,b(j)\,\bar{x}(j) = 0\,, \qquad k \in 0:m-1\,. \tag{6}$$

Если система (6) имеет только нулевое решение, то условия (α) и (β) выполняются. Действительно, пусть $b(j_0) = 0$ при некотором $j_0 \in 1:n$. Тогда у (6) появляется ненулевое решение — единичный орт $x = e_{j_0}$. Значит, $b(j) \neq 0$ при всех $j \in 1:n$, что равносильно условию (β). В случае $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$ у (6) также появляется ненулевое решение

$$\bar{x}(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j_1\,; \\ -b(j_1)/b(j_2) & \text{при } j = j_2\,; \\ 0 & \text{при остальных } j \in 1:n\,. \end{cases}$$

Значит, собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы U попарно различны. Это составляет содержание условия (α).

Наоборот, пусть выполнены условия (α) и (β). Возьмём решение x_0 системы (6) и покажем, что $x_0 = \mathbb{O}$. Этим будет завершено доказательство теоремы.

Вектор x_0 удовлетворяет укороченной системе уравнений с квадратной матрицей:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \, b(j) \, \bar{x}_0(j) = 0 \,, \qquad k \in 0 : n-1 \,. \tag{7}$$

Матрица D системы (7) допускает разложение

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 \, b(1) & \dots & \lambda_n^0 \, b(n) \\ \lambda_1^1 \, b(1) & \dots & \lambda_n^1 \, b(n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} \, b(1) & \dots & \lambda_n^{n-1} \, b(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b(2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b(n) \end{bmatrix} .$$

Первый сомножитель в правой части этого разложения есть матрица Вандермонда. Она невырождена в силу условия (α). Второй сомножитель невырожден в силу условия (β). Значит, матрица D невырождена, поэтому сама система (7) имеет только нулевое решение.

Теорема доказана. □

Отметим, что условия (α) и (β) не зависят от m.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА

Н. В. Чашников

25 апреля 2009 г.

В докладах [1] и [2] было показано, что билинейная и дискретная поверхности Кунса обладают экстремальными свойствами, выделяющими их среди других поверхностей, удовлетворяющих определённым граничным условиям. В данном докладе будет установлено, что при некоторых предположениях экстремальным свойством обладает и обобщённая поверхность Кунса.

1°. Напомним определение обобщённой поверхности Кунса, данное в [3].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \dots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \dots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:m. \tag{1}$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \dots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \dots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:n.$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Пусть s — натуральное число. Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v:

$$\mathbf{T}_u = \Big\{ \mathbf{g} \colon D_u \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^s(u)\big),\ g^k \in T_u \Big\},$$

$$\mathbf{T}_v = \Big\{ \mathbf{f} \colon D_v \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \dots, f^s(v)\big),\ f^k \in T_v \Big\}.$$

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \dots, L_i^u(g^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^s(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ i \in 1:m;$$

$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \ldots, L_j^v(f^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \ldots, f^s(u)\big) \in \mathbf{T}_v, \ j \in 1:n.$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n.$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{c} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s$:

$$\mathbf{c}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{2}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{c}(u,v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса.* В [3] доказано, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}_i^u(\mathbf{c}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), && i \in 1:m, && v \in D_v, \\ &\mathbf{L}_j^v(\mathbf{c}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), && j \in 1:n, && u \in D_u. \end{aligned} \tag{3}$$

2°. В [1] отмечалось, что билинейная поверхность Кунса минимизирует интеграл

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \big\|\mathbf{a}_{uv}(u,v)\big\|^2 du\,dv$$

на множестве всех поверхностей, удовлетворяющих граничным условиям. В [2] установлено, что дискретная поверхность Кунса минимизирует сумму

$$\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1} \big\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\big\|^2$$

на множестве всех поверхностей, проходящих через опорные кривые. Мы будем рассматривать общий случай, когда в целевой функции вместо операций интегрирования и суммирования по периоду будут использоваться некоторые линейные функционалы, а вместо операций дифференцирования и вычисления конечной разности — некоторые линейные операторы. В качестве ограничений будут выступать условия (3). Целью данного доклада является доказательство того, что обобщённая поверхность Кунса доставляет единственный минимум в такой экстремальной задаче при определённых предположениях относительно используемых в целевой функции функционалов и операторов. Основные предположения будут связаны с экстремальными задачами

для функций одной переменной, заданных на множествах D_u и D_v. Аналогом этих предположений в дискретном случае является свойство минимальной нормы для дискретных интерполяционных сплайнов.

Пусть I_u, I_v — некоторые линейные функционалы на пространствах T_u и T_v соответственно. В дискретном случае

$$I_u\, g = \sum_{u=0}^{N_1-1} g(u), \qquad I_v\, f = \sum_{v=0}^{N_2-1} f(v).$$

Предположим, что для любой неотрицательной функции g из T_u значение $I_u\, g$ неотрицательно и обращается в нуль только для $g = 0$. Аналогично, пусть для любой неотрицательной функции f из T_v значение $I_v\, f$ неотрицательно и обращается в нуль только для $f = 0$. Кроме того, предположим, что пространства T_u и T_v замкнуты относительно умножения функций.

Пусть заданы линейные пространства E_u и E_v — подпространства T_u и T_v соответственно, причём

$$\begin{aligned} H_i^u &\in E_u, \qquad i \in 1:m, \\ H_j^v &\in E_v, \qquad j \in 1:n. \end{aligned}$$

Пусть на этих пространствах определены линейные операторы

$$A_u\colon E_u \to T_u, \qquad A_v\colon E_v \to T_v.$$

В дискретном случае $A_u\, g = \Delta^{r_1} g$, $A_v\, f = \Delta^{r_2} f$.

Прежде чем перейти к рассмотрению экстремальной задачи для вектор-функции двух переменных, обратимся к экстремальной задаче для функции одной переменной. В [4, с. 23] показано, что дискретный интерполяционный сплайн является решением некоторой экстремальной задачи. Опишем аналог этой задачи в общем случае.

Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — произвольные вещественные числа. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &G(g) := I_u\,(A_u\, g)^2 \to \inf, \\ &L_i^u\, g = z_i, \quad i \in 1:m, \\ &g \in E_u. \end{aligned} \tag{4}$$

Ясно, что в силу равенств (1) функция

$$g_*(u) := \sum_{i=1}^{m} z_i\, H_i^u(u) \tag{5}$$

удовлетворяет ограничениям задачи (4).

В дискретном случае задача (4) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{u=0}^{N_1-1} \left(\Delta^{r_1} g(u)\right)^2 \to \inf, \\ &g(in_1) = z_i, \quad i \in 1:m_1; \\ &g \in \mathbb{C}_{N_1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $N_1 = m_1 n_1$. В [4] показано, что единственным решением задачи (6) является интерполяционный сплайн. Если, следуя [2], в качестве смешивающих функций взять фундаментальные интерполяционные сплайны, определяемые соотношениями

$$H_i^u(jn_1) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:m_1,$$

то функция $g_*(u)$ совпадёт с интерполяционным сплайном. Таким образом, в дискретном случае единственным решением задачи (4) является функция $g_*(u)$. Предположим, что и в общем случае смешивающие функции $H_i^u(u)$ подобраны таким образом, что функция $g_*(u)$ является единственным решением задачи (4). Это основное предположение. Опишем критерий, облегчающий проверку того, что это предположение выполняется для заданных функций $H_i^u(i)$.

Определим множества K_u и K_v как множества функций, на которых обращаются в нуль все функционалы L_i^u и L_j^v соответственно:

$$K_u = \bigcap_{i=1}^{m} \ker L_i^u, \qquad K_v = \bigcap_{j=1}^{n} \ker L_j^v.$$

ТЕОРЕМА 1. *Функция вида* (5) *является единственным решением экстремальной задачи* (4) *для любого набора* $\{z_i\}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$I_u\left((A_u H_i^u)(A_u x)\right) = 0 \quad \text{для } x \in E_u \cap K_u, \quad i \in 1:m; \tag{7}$$

$$K_u \cap \ker A_u = \{0\}. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем произвольное число $i \in 1:m$ и функцию x из множества $E_u \cap K_u$ не равную тождественно нулю. Положим $z_j = \delta_{ij}$ для $j \in 1:m$. В этом случае функция g_* совпадает с H_i^u, поэтому функция $H_i^u(u)$ является единственным решением экстремальной задачи (4).

Определим для любого вещественного t функцию g_t по формуле

$$g_t(u) = H_i^u(u) + t\,x(u).$$

В силу линейности функционала I_u и оператора A_u имеем

$$G(g_t) = G(H_i^u + t\,x) = I_u\left[(A_u\,H_i^u)^2 + 2\,t\,(A_u\,H_i^u)\,(A_u\,x) + t^2\,(A_u\,x)^2\,\right] =$$
$$= G(H_i^u) + 2\,t\,I_u\left((A_u\,H_i^u)\,(A_u\,x)\right) + t^2\,G(x).$$

Ясно, что g_t удовлетворяет ограничениям задачи (4) для любого t. А так как $g_0 = H_i^u$, то единственный минимум функции $G(g_t)$ достигается при $t = 0$. Но $G(g_t)$ представляет собой квадратный трёхчлен, поэтому коэффициент при t равен нулю, а коэффициент при t^2 положителен. Следовательно, условие (7) выполнено для всех ненулевых функций x. Для функции $x(u) \equiv 0$ оно, очевидно, также выполняется.

Проверим условие (8), действуя от противного. Пусть найдётся функция x из множества $K_u \cap \ker A_u$, не равная тождественно нулю. Тогда $A_u\,x = 0$, следовательно, $G(x) = 0$. Но мы доказали, что $G(x)$ положительно. Полученное противоречие доказывает свойство (8). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $g_*(u)$ — функция, определяемая формулой (5), а $g(u)$ — произвольная функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (4). Положим $x(u) = g(u) - g_*(u)$. Ясно, что $x \in K_u \cap E_u$. Используя линейность функционала I_u и оператора A_u, а также равенство (7), получаем

$$G(g) = G(g_* + x) = I_u\left[(A_u\,g_*)^2 + 2\,(A_u\,g_*)\,(A_u\,x) + (A_u\,x)^2\,\right] =$$
$$= G(g_*) + G(x) + I_u\left((A_u\,H_i^u)\,(A_u\,x)\right) = G(g_*) + G(x).$$

Таким образом, $G(g) \geqslant G(g_*)$, что гарантирует оптимальность плана g_* в задаче (4).

Проверим единственность. Пусть $G(g) = G(g_*)$. Тогда $G(x) = 0$, поэтому $A_u\,x = 0$, то есть $x \in \ker A_u$. Значит, по условию (8) получаем, что $x = 0$, то есть $g = g_*$. Теорема доказана. □

Аналогичным образом можно определить экстремальную задачу для функций пространства E_v. Предположим, что и в этой задаче единственным решением является линейная комбинация смешивающих функций. Таким образом, выполняются условия

$$\begin{aligned} &I_u\left((A_u\,H_i^u)\,(A_u\,x)\right) = 0 \quad \text{для } x \in E_u \cap K_u, \quad i \in 1:m;\\ &I_v\left((A_v\,H_j^v)\,(A_v\,y)\right) = 0 \quad \text{для } y \in E_v \cap K_v, \quad j \in 1:n; \end{aligned} \tag{9}$$

и

$$K_u \cap \ker A_u = \{0\}, \qquad K_v \cap \ker A_v = \{0\}. \tag{10}$$

Эти предположения являются основными условиями, которые будут требоваться в теореме об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса.

3°. Распространим введённые функционалы и операторы на функции двух переменных. Пусть заданы некоторые линейные пространства T_{uv} и E_{uv}, элементами которых являются вещественные функции над $D_u \times D_v$, причём выполняются условия

$$\begin{aligned} &a(\cdot, v) \in T_u, \quad a(u, \cdot) \in T_v \quad \text{для } a \in T_{uv}, \\ &a(\cdot, v) \in E_u, \quad a(u, \cdot) \in E_v \quad \text{для } a \in E_{uv}. \end{aligned}$$

Определим для $a \in T_{uv}$ функцию $I_{u,*}\, a$ формулой

$$\big(I_{u,*}\, a\big)(v) = I_u\, \big(a(\cdot, v)\big), \qquad v \in D_v.$$

Таким образом, $I_{u,*}$ является отображением, которое сопоставляет каждой функции из T_{uv} некоторую функцию над множеством D_v. Ясно, что $I_{u,*}$ является линейным оператором. В дальнейшем для краткости будем опускать скобки в выражениях вида $\big(I_{u,*}\, a\big)(v)$, предполагая, что сначала оператор применяется к функции, а потом вычисляется значение полученной функции на заданном аргументе.

Аналогичным образом определим линейные операторы $I_{*,v}$, $L_i^{u,*}$ и $L_j^{*,v}$:

$$\begin{aligned} I_{*,v}\, a(u) &= I_v\big(a(u, \cdot)\big), \qquad u \in D_u, \\ L_i^{u,*}\, a(v) &= L_i^u\big(a(\cdot, v)\big), \qquad v \in D_v, \\ L_j^{*,v}\, a(u) &= L_j^v\big(a(u, \cdot)\big), \qquad u \in D_u. \end{aligned}$$

Далее, положим

$$\begin{aligned} A_{u,*}\, a(u, v) &= A_u\, \big(a(\cdot, v)\big)(u), \\ A_{*,v}\, a(u, v) &= A_v\, \big(a(u, \cdot)\big)(v). \end{aligned}$$

Оператор $A_{u,*}$ определён на тех $a(u, v)$ из пространства T_{uv}, для которых $a(\cdot, v)$ принадлежит E_u, а оператор $A_{u,*}$ — на тех $a(u, v)$, для которых $a(u, \cdot)$ принадлежит E_v.

ЛЕММА 1. *Если функция $a(u, v)$ из пространства E_{uv} имеет вид*

$$a(u, v) = g(u)\, f(v),$$

где $g \in E_u$, $f \in E_v$, то выполняется тождество

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, a(u, v) = \big(A_u\, g(u)\big)\, \big(A_v\, f(v)\big).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное u из D_u. По определению оператора $A_{*,v}$ имеем

$$A_{*,v}\, a(u,\cdot) = A_v\,\big(a(u,\cdot)\big) = A_v\,\big(g(u)\, f\big) = g(u)\, A_v\, f.$$

Зафиксируем произвольное v из D_v. Используя определение оператора $A_{u,*}$, получаем

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, a(\cdot,v) = A_u\,\big(A_{*,v}\, a(\cdot,v)\big) = A_u\,\big(g\, A_v\, f(v)\big) = \big(A_v\, f(v)\big)\,(A_u\, g),$$

что и требовалось. □

ЛЕММА 2. *Если функция $a(u,v)$ из пространства T_{uv} имеет вид*

$$a(u,v) = g(u)\, b(u,v),$$

где $g \in T_u$, $b \in T_{uv}$, то выполняется тождество

$$I_{*,v}\, a = g\, I_{*.v}\, b.$$

Аналогично, если функция $a(u,v)$ из пространства T_{uv} имеет вид

$$a(u,v) = f(v)\, b(u,v),$$

где $f \in T_v$, $b \in T_{uv}$, то справедливо равенство

$$I_{u,*}\, a = f\, I_{u,*}\, b.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное u из D_u. По определению оператора $I_{*,v}$ имеем

$$\begin{aligned} I_{*,v}\, a(u) &= I_v\,\big(a(u,\cdot)\big) = I_v\,\big(g(u)\, b(u,\cdot)\big) = \\ &= g(u)\, I_v\,\big(b(u,\cdot)\big) = g(u)\, I_{*,v}\, b(u), \end{aligned}$$

что и требовалось. Вторая часть леммы доказывается аналогичным образом. □

Введённые выше операторы действуют на одну из переменных при фиксированной второй. Поэтому естественно предположить, что операторы, действующие на разные переменные, коммутируют друг с другом.

Пусть для всех $a \in T_{uv}$ выполняются условия

$$I_{u,*}\, a \in T_v, \quad I_{*,v}\, a \in T_u \quad \text{и} \quad I_u\, I_{*,v}\, a = I_v\, I_{u,*}\, a. \tag{11}$$

Далее, пусть для всех $a \in E_{uv}$ функция $A_{u,*}a$ принадлежит области определения оператора $A_{*,v}$, функция $A_{*,v}a$ принадлежит области определения оператора $A_{u,*}$ и справедливо тождество

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, a = A_{*,v}\, A_{u,*}\, a. \tag{12}$$

Кроме того, пусть для всех $a \in E_{uv}$ выполняются условия

$$\begin{aligned} &L_i^{u,*}\, a \in E_v, \qquad A_v\, L_i^{u,*}\, a = L_i^{u,*}\, A_{*,v}\, a, \qquad i \in 1:m, \\ &L_j^{*,v}\, a \in E_u, \qquad A_u\, L_j^{*,v}\, a = L_j^{*,v}\, A_{u,*}\, a, \qquad j \in 1:n. \end{aligned} \tag{13}$$

ЛЕММА 3. *Пусть функция b из пространства T_{uv} неотрицательна. Тогда $I_u\, I_{*,v}\, b \geqslant 0$, причём равенство достигается только для $b = 0$.*

Доказательство. Для произвольного u из D_u имеем

$$I_{*,v}\, b(u) = I_v\, \big(b(u,\cdot)\big) \geqslant 0,$$

то есть $I_{*,v}\, b \geqslant 0$. Следовательно, $I_u\, I_{*,v}\, b \geqslant 0$.

Если же достигается равенство $I_u\, I_{*,v}\, b = 0$, то $I_{*,v}\, b = 0$. Поэтому для всех u из D_u выполняется $I_v\, \big(b(u,\cdot)\big) = 0$, что влечёт $b(u,\cdot) \equiv 0$. □

Определим множество K_{uv} как множество функций из E_{uv}, на которых обращаются в нуль все операторы $L_i^{u,*}$, $L_j^{*,v}$:

$$K_{uv} = E_{uv} \cap \bigcap_{i=1}^{m} \ker L_i^{u,*} \;\cap\; \bigcap_{j=1}^{n} \ker L_j^{*,v}.$$

ЛЕММА 4. *Если выполнены условия* (9), *то для любой функции η из множества K_{uv} справедливы равенства*

$$\begin{aligned} I_{u,*}\, \big((A_u\, H_i^u)\, (A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)\big) &= 0, \qquad i \in 1:m, \\ I_{*,v}\, \big((A_v\, H_j^v)\, (A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)\big) &= 0, \qquad j \in 1:n. \end{aligned}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное v из D_v. Согласно определению $I_{u,*}$ имеем

$$\begin{aligned} I_{u,*}\, \big[(A_u\, H_i^u)\, (A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)\big](v) &= I_u\, \big[(A_u\, H_i^u)\, \big((A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)(\cdot, v)\big)\big] = \\ &= I_u\, \big((A_u\, H_i^u)\, (A_u\, x)\big), \end{aligned}$$

где $x(u) = A_{*,v}\, \eta(u,v)$.

По определению $L^{u,*}$ и свойству (13) получим, что для любого $k \in 1:m$

$$L_k^u\, x = L_k^u \left(A_{*,v}\, \eta(\cdot, v)\right) = (L_k^{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)(v) = (A_v\, L_k^{u,*}\, \eta)(v) = 0.$$

Таким образом, $x \in K_u$. По свойству (12) функция $A_{*,v}\, \eta$ принадлежит области определения оператора $A_{u,*}$, следовательно, $x \in E_u$.

Итак, $x \in E_u \cap K_u$, поэтому по свойству (9)

$$I_{u,*} \left((A_u\, H_i^u)\, (A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)\right) = I_u \left((A_u\, H_i^u)\, (A_u\, x)\right) = 0.$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

ЛЕММА 5. *Пусть справедливы условия* (10) *и для функции* η *из множества* K_{uv} *выполняется равенство*

$$I_u\, I_{*,v} (A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)^2 = 0.$$

Тогда $\eta = 0$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что $A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta = 0$. Положим $\mu = A_{*,v}\, \eta$.

Зафиксируем произвольное v из D_v. По определению оператора $A_{u,*}$ имеем

$$A_u \left(\mu(\cdot, v)\right) = A_{u,*}\, \mu(\cdot, v) = 0.$$

Используя свойство (13), получаем для любого $i \in 1:m$

$$L_i^u \left(\mu(\cdot, v)\right) = L_i^{u,*}\, \mu(\cdot, v) = L_i^{u,*}\, A_{*,v}\, \eta(\cdot, v) = A_v\, L_i^{u,*}\, \eta(\cdot, v) = 0,$$

так как $L_i^{u,*}\, \eta = 0$.

Таким образом, функция $\mu(\cdot, v)$ принадлежит множеству $\ker A_u$, а также множествам $\ker L_i^u$ при $i \in 1:m$. Значит, по свойству (10), эта функция равна нулю. Следовательно, $A_{*,v}\, \eta = 0$.

Зафиксируем произвольное u из D_u. По определению оператора $A_{*,v}$ имеем

$$A_v \left(\eta(u, \cdot)\right) = A_{*,v}\, \eta(u, \cdot) = 0.$$

Для любого $j \in 1:n$ по определению оператора $L_j^{*,v}$ получим

$$L_j^v \left(\eta(u, \cdot)\right) = L_j^{*,v}\, \eta(u, \cdot) = 0,$$

так как $\eta \in K_{uv}$.

Таким образом, функция $\eta(u, \cdot)$ принадлежит множеству $\ker A_v$, а также множествам $\ker L_j^v$ при $j \in 1:n$. Из равенств (10) следует, что $\eta(u, \cdot) = 0$, что и требовалось. □

Положим

$$\mathbf{E}_{uv} = \Big\{\mathbf{a}\colon D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{a}(u,v) = \big(a^1(u,v),\dots,a^s(u,v)\big),\ a^k \in E_{uv}\Big\},$$

и определим векторные варианты операторов $A_{u,*}$ и $A_{*,v}$:

$$\mathbf{A}_{u,*}(\mathbf{a}) = \big(A_{u,*}(a^1),\dots,A_{u,*}(a^s)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{a}(u,v) = \big(a^1(u,v),\dots,a^s(u,v)\big);$$
$$\mathbf{A}_{*,v}(\mathbf{a}) = \big(A_{*,v}(a^1),\dots,A_{*,v}(a^s)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{a}(u,v) = \big(a^1(u,v),\dots,a^s(u,v)\big).$$

Сформулируем экстремальную задачу для обобщённой поверхности Кунса.

$$\begin{gathered} F(\mathbf{a}) := I_u\, I_{*,v}\, \big\|\mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\mathbf{a}\big\|^2 \to \inf, \\ \mathbf{L}_i^u(\mathbf{a}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in D_v, \\ \mathbf{L}_j^v(\mathbf{a}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in D_u, \\ \mathbf{a} \in \mathbf{E}_{uv}. \end{gathered} \tag{14}$$

Предположим, что обобщённая поверхность Кунса, построенная по формуле (2), принадлежит пространству $\mathbf{E}_{uv}$.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены условия* (9), (10), (11), (12) *и* (13), *то вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$, *определяемая формулой* (2), *является единственным решением экстремальной задачи* (14).

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}(u,v)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (14), а $\mathbf{c}(u,v)$ — поверхность Кунса, построенная по формуле (2). Положим $\boldsymbol{\eta}(u,v) = \mathbf{a}(u,v) - \mathbf{c}(u,v)$. Через $c^d(u,v)$, $\eta^d(u,v)$, $f_i^d(v)$, $g_j^d(u)$ будем обозначать координаты с индексом d векторов $\mathbf{c}(u,v)$, $\boldsymbol{\eta}(u,v)$, $\mathbf{f}_i(v)$ и $\mathbf{g}_j(u)$ соответственно. По построению η^d принадлежит K_{uv}. В силу линейности операторов $\mathbf{A}_{u,*}$, $\mathbf{A}_{*,v}$, $I_{*,v}$ и функционала I_u имеем

$$\begin{gathered} F(\mathbf{a}) = I_u\, I_{*,v}\, \|\mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\mathbf{c} + \mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\boldsymbol{\eta}\|^2 = \\ = F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta}) + 2\, I_u\, I_{*,v}\, \big\langle \mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\mathbf{c}, \mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\boldsymbol{\eta}\big\rangle = \\ = F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta}) + 2\sum_{d=1}^{s} l^d(c^d), \end{gathered}$$

где $l^d(c^d) = I_u\, I_{*,v}\, \big((A_{u,*}\, A_{*,v}\, c^d)\,(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d)\big)$. Формулу (2) для координаты с индексом d можно переписать в виде

$$c^d(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, f_i^d(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u), \tag{15}$$

где $\widehat{g}_j^d(u) = g_j^d(u) - \sum_{i=1}^m H_i^u(u)\, L_i^u(g_j^d)$.

Используя свойство (11) и леммы 1, 2 и 4, получаем для любого $i \in 1:m$

$$l^d\left(H_i^u(u)\, f_i^d(v)\right) = I_v\, I_{u,*}\left((A_u\, H_i^u)\,(A_v\, f_i^d)\,(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d)\right) =$$
$$= I_v\left[(A_v\, f_i^d)\, I_{u,*}\left((A_u\, H_i^u)\,(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d)\right)\right] = 0.$$

Аналогично, для любого $j \in 1:n$ имеем

$$l^d\left(H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u)\right) = I_u\, I_{*,v}\left((A_v\, H_j^v)\,(A_u\, \widehat{g}_j^d)\,(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d)\right) =$$
$$= I_u\left[(A_u\, \widehat{g}_j^d)\, I_{*,v}\left((A_v\, H_j^v)\,(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d)\right)\right] = 0.$$

Таким образом, отображение l^d обращается в ноль на всех слагаемых выражения (15). Следовательно, в силу линейности, $l^d(c^d) = 0$. Поэтому $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta})$, а так как F неотрицательно в силу леммы 3, то это гарантирует оптимальность вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$ для задачи (14).

Проверим единственность. Предположим, что $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c})$. Тогда $F(\boldsymbol{\eta}) = 0$, то есть

$$\sum_{d=1}^{s} I_u\, I_{*,v}\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)^2 = 0.$$

Следовательно, для всех d выполнено равенство $I_u\, I_{*,v}\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)^2 = 0$, что по лемме 5 влечёт $\eta^d = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{\eta} = 0$, то есть $\mathbf{a} = \mathbf{c}$. Теорема доказана. □

4°. Покажем, как установить экстремальное свойство бикубических поверхностей Кунса, рассмотренных в [5]. В этом случае пространства, функционалы и операторы для переменных u и v определяются одинаково. Положим $D = [0,1]$, $T = C^1(D)$, $m = 4$. Функционалы L_i задаются формулами

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1).$$

Смешивающими функциями являются кубические полиномы Эрмита

$$H_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \qquad H_2(t) = t^3 - 2u^2 + t,$$
$$H_3(t) = t^3 - t^2, \qquad H_4(t) = -2t^3 + 3t^2.$$

Пусть

$$E = C^2(D), \qquad I(f) = \int_0^1 f(t)\, dt, \qquad A(f) = f''.$$

Положим $T_{uv} = C\big([0,1]^2\big)$, $E_{uv} = C^4\big([0,1]^2\big)$. Свойства (11), (12) и (13), очевидно, выполнены. Свойство (9) принимает вид

$$\int_0^1 H_i''(t)\, x''(t)\, dt = 0, \qquad \text{если} \;\; x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0.$$

Так как $H_i(t)$ — полином третьей степени, то $H_i''(t)$ — линейная функция, и для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться правилом интегрирования по частям.

Условие (10) записывается в виде:

$$\text{если} \;\; x''(t) \equiv 0 \;\; \text{ и } \;\; x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0, \quad \text{то} \;\; x(t) \equiv 0.$$

Это условие также соблюдается.

Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому можно заключить, что бикубическая поверхность Кунса является единственным решением экстремальной задачи

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \left\| \frac{\partial^4 \mathbf{a}}{\partial^2 u\, \partial^2 v}\,(u,v) \right\|^2 du\, dv \to \inf,$$

$$\mathbf{a}(0,v) \equiv \mathbf{f}_1(v), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u}\,(0,v) \equiv \mathbf{f}_2(v), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u}\,(1,v) \equiv \mathbf{f}_3(v), \quad \mathbf{a}(1,v) \equiv \mathbf{f}_4(v),$$

$$\mathbf{a}(u,0) \equiv \mathbf{g}_1(u), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v}\,(u,0) \equiv \mathbf{g}_2(u), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v}\,(u,1) \equiv \mathbf{g}_3(u), \quad \mathbf{a}(u,1) \equiv \mathbf{g}_4(u),$$

$$\mathbf{a} \in C^4\big([0,1]^2\big).$$

Справедливость полученного экстремального свойства была показана в [6] непосредственно. Теперь же это свойство получается как частный случай теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Билинейные поверхности Кунса и поверхности Безье* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 ноября 2006 г. (`http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1118`).

2. Чашников Н. В. *Экстремальное свойство дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).

3. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`).

4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

5. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Бикубические поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 23 января 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0123`).

6. Игнатов М. И., Певный А. Б. *Натуральные сплайны многих переменных.* Л.: Наука, 1991. 128 с.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА ФРЕЙМАХ

М. Н. Истомина

6 мая 2009 г.

Настоящий доклад инициирован докладом В. Н. Малозёмова [1].

1°. Экстремальная задача на фреймах Мерседес-Бенц. Пусть $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ — фрейм Мерседес–Бенц в $\mathbb{R}^n$ (см. [2]). Здесь и далее верхний индекс указывает на размерность пространства.

Возьмём ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\xi\|^2 := \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^2 \to \min,$$

$$\frac{n}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \, b_j^n = a.$$

В докладе [1] доказывается, что минимум достигается на единственном векторе ξ^* с компонентами $\xi_j^* = \langle a, b_j^n \rangle$, $j \in 1 : n+1$.

2°. Экстремальная задача на жёстких фреймах. Рассмотрим при $m > n$ матрицу $\Phi = \Phi[1 : n, 1 : m]$ с вещественными элементами. Столбцы этой матрицы обозначим $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Набор векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ называется *жёстким фреймом* в $\mathbb{R}^n$, если

$$\Phi \, \Phi^T = A \, I_n \, .$$

Произвольный ненулевой вектор a из $\mathbb{R}^n$ может быть представлен в виде (см. [2]):

$$a = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{m} \xi_j \, \varphi_j \, .$$

Найдём разложение вектора a по жёсткому фрейму с наименьшей l_2-нормой вектора коэффициентов разложения. Это соответствует решению следующей

задачи минимизации:

$$\begin{gathered}\|\xi\|^2 := \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \to \min, \\ \frac{1}{A}\,\Phi\,\xi = a.\end{gathered} \tag{1}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Единственным решением задачи* (1) *является вектор* ξ^* *с компонентами*

$$\xi_j^* = \langle a, \varphi_j \rangle, \qquad j \in 1:m.$$

Доказательство. Очевидно, что $\xi^* = \Phi^T a$ удовлетворяет ограничению задачи (1):

$$\frac{1}{A}\,\Phi\,\Phi^T a = \frac{1}{A}\,A\,I_n\,a = a.$$

Возьмём произвольный план ξ задачи (1) и положим $h = \xi - \xi^*$. Тогда $\xi = \xi^* + h$, где $\Phi\,h = \mathbb{O}$. Задача (1) перепишется в следующем виде

$$\|\xi^* + h\|^2 \to \min_{\{h\,|\,\Phi\,h = \mathbb{O}\}}. \tag{2}$$

Единственным решением задачи (2) является $h^* = \mathbb{O}$. Действительно, если расписать квадрат нормы, получим

$$\|\xi^*\|^2 + 2\,\langle \xi^*, h\rangle + \|h\|^2 \to \min_{\{h\,|\,\Phi\,h = \mathbb{O}\}}.$$

Здесь, в силу ограничения $\Phi\,h = \mathbb{O}$, второе слагаемое равно нулю, так как $\langle \xi^*, h\rangle = \langle \Phi^T a, h\rangle = \langle a, \Phi\,h\rangle = 0$. Это гарантирует оптимальность и единственность ξ^*. □

3°. Экстремальная задача на произвольных фреймах. Пусть набор векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ образует фрейм в $\mathbb{R}^n$ $(m > n)$. Тогда $S = \Phi\,\Phi^T$ является симметричной положительно определённой матрицей и для неё существует обратная матрица S^{-1}. Рассмотрим векторы $\widetilde{\varphi}_i = S^{-1}\,\varphi_i$, $i \in 1:m$. Они образуют *канонический двойственный фрейм* (см. [3]).

Введём матрицу $\widetilde{\Phi}$ размера $n \times m$ со столбцами $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m$:

$$\widetilde{\Phi} = [\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m] = S^{-1}\,\Phi.$$

Для неё справедливо следующее равенство:

$$\widetilde{\Phi}\,\Phi^T = \Phi\,\widetilde{\Phi}^T = I_n\,. \tag{3}$$

Умножив обе части (3) на вектор $a \in \mathbb{R}^n$, получим разложение

$$a = \Phi\,\widetilde{\xi}, \tag{4}$$

где $\widetilde{\xi} = \widetilde{\Phi}^T a$. Следующее предложение есть в книге Добеши [4] (предложение 3.2.4). В конечномерном случае доказательство проводится совсем просто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Единственным решением задачи минимизации*

$$\|\xi\|^2 \to \min_{\{\xi \,|\, \Phi\,\xi = a\}} \tag{5}$$

является вектор $\widetilde{\xi}$ *с компонентами* $\widetilde{\xi}_j = \langle a, \widetilde{\varphi}_j \rangle$, $j \in 1:m$.

Доказательство. В силу (4) вектор $\widetilde{\xi}$ удовлетворяет ограничению задачи (5).

Рассмотрим произвольный план ξ задачи (5). Обозначим, как и выше, $h = \xi - \widetilde{\xi}$. Тогда $\Phi\, h = \mathbb{O}$ и $\xi = \widetilde{\xi} + h$. Имеем

$$\langle \widetilde{\xi}, h \rangle = \langle \widetilde{\Phi}^T a, h \rangle = \big\langle (S^{-1}\,\Phi)^T a, h \big\rangle = \langle \Phi^T S^{-1}\, a, h \rangle = \langle S^{-1}\, a, \Phi\, h \rangle = 0.$$

Получаем равенство

$$\|\widetilde{\xi} + h\|^2 = \|\widetilde{\xi}\|^2 + \|h\|^2.$$

Если $\xi \neq \widetilde{\xi}$, то h является ненулевым вектором. Значит $\|\xi\|^2 > \|\widetilde{\xi}\|^2$, что и требовалось доказать. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи на фреймах Мерседес–Бенц* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 25 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml\#0325`)

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. Вып. 39. 2009. С. 3–25.

3. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Двойственные фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 августа 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml\#0821`)

4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 464 с.

ОБОБЩЁННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА КЛАССА C^2

Н. В. Чашников

16 мая 2009 г.

В докладе показано, как построить поверхность класса C^2, натянутую на заданную сеть кривых.

1°. Пусть заданы два отрезка на вещественной оси и в каждом из них выбрано несколько узлов:

$$\begin{aligned} a \leqslant u_1 < u_2 < \dots < u_m \leqslant b, \qquad m \geqslant 2, \\ c \leqslant v_1 < v_2 < \dots < v_n \leqslant d, \qquad n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Кроме того, пусть заданы два набора кривых в пространстве $\mathbb{R}^s$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i \colon [c,d] \to \mathbb{R}^s, \qquad \mathbf{f}_i \in C^2\big([c,d]\big), \qquad i \in 1:m, \\ \mathbf{g}_j \colon [a,b] \to \mathbb{R}^s, \qquad \mathbf{g}_j \in C^2\big([a,b]\big), \qquad j \in 1:n, \end{aligned}$$

для которых выполняются равенства

$$\mathbf{f}_i(v_j) = \mathbf{g}_j(u_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{1}$$

Ставится задача: построить поверхность $\mathbf{r} \colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^s$, $\mathbf{r} \in C^2$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u_i, v) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in [c,d], \\ \mathbf{r}(u, v_j) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in [a,b]. \end{aligned} \tag{2}$$

2°. Для того, чтобы решить поставленную задачу, воспользуемся обобщением поверхности Кунса, предложенным в [1].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \dots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \dots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:m. \tag{3}$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \ldots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \ldots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:n. \tag{4}$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v :

$$\mathbf{T}_u = \Big\{\mathbf{g} \colon D_u \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^s(u)\big),\ g^k \in T_u\Big\},$$
$$\mathbf{T}_v = \Big\{\mathbf{f} \colon D_v \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \ldots, f^s(v)\big),\ f^k \in T_v\Big\}.$$

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \ldots, L_i^u(g^s)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^s(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ i \in 1:m;$$
$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \ldots, L_j^v(f^s)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \ldots, f^s(u)\big) \in \mathbf{T}_v,\ j \in 1:n.$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{5}$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{r} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s$:

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{6}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{r}(u,v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса.* В [1] доказано, что вектор-функция $\mathbf{r}(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}_i^u(\mathbf{r}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in D_v,\\ &\mathbf{L}_j^v(\mathbf{r}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in D_u. \end{aligned} \tag{7}$$

3°. Покажем, что можно подобрать функционалы и смешивающие функции таким образом, чтобы обобщённая поверхность Кунса решала поставленную в первом разделе задачу.

Положим $D_u = [a,b]$, $D_v = [c,d]$, $T_u = C([a,b])$, $T_v = C([c,d])$. Функционалы L_i^u и L_j^v определим следующим образом:

$$L_i^u(g) = g(u_i), \qquad i \in 1:m,$$
$$L_j^v(f) = f(v_j), \qquad j \in 1:n.$$

В этом случае условия (7) принимают вид (2). Равенства (3) сводятся к

$$H_j^u(u_i) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:m. \tag{8}$$

Будем искать смешивающие функции H_j^u среди натуральных кубических сплайнов с узлами $u_1,\dots,u_m$. Напомним, что натуральным кубическим сплайном называется функция класса C^2, совпадающая на отрезках $[u_k,u_{k+1}]$, $k \in 1:m-1$, с некоторыми полиномами третьего порядка и линейная на интервалах $(-\infty,u_1)$, $(u_m,+\infty)$ (см. [2, с. 68]). Для каждого H_j^u условия (8) задают интерполяционную задачу, причём узлы интерполяции совпадают с узлами сплайна. Согласно [2], такая задача всегда имеет решение. Аналогичным образом, в качестве смешивающих функций H_i^v возьмём натуральные кубические сплайны с узлами $v_1,\dots,v_n$, являющиеся решениями интерполяционных задач

$$H_i^v(v_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:m.$$

Для заданных функционалов L_i^u и L_j^v условия согласования (5) примут вид (1). Поэтому если для вектор-функций $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_m$, $\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_n$ выполнены соотношения (1), то обобщённая поверхность Кунса (6) будет удовлетворять условиям (2). В данном случае формула (6) принимает вид

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u_i). \tag{9}$$

Ясно, что $\mathbf{r} \in C^2([a,b]\times[c,d])$.

ПРИМЕР. Пусть $n = m = 3$. На рис. 1 пунктирными линиями показаны кривые f_1, f_2 и f_3, сплошными линиями — кривые g_1, g_2 и g_3, кружками отмечены точки пересечения кривых. Поверхность Кунса, построенная по этим кривым, приведена на рис. 2. Отметим, что кривые f_1, f_3, g_1 и g_3 лежат в одной плоскости, а кривые f_2 и g_2 — в ортогональных плоскостях.

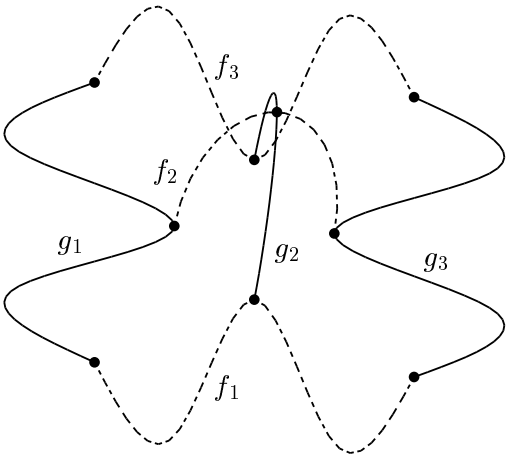


Рис. 1. Остовные кривые

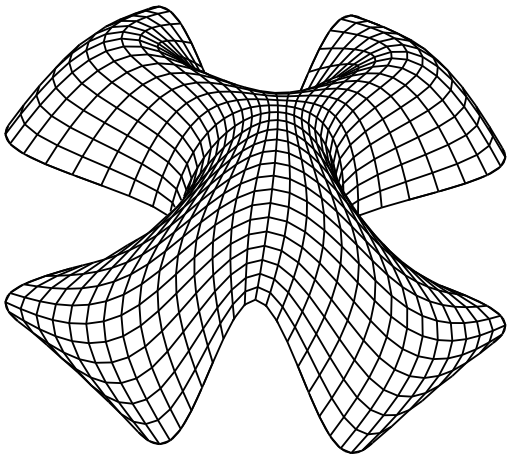


Рис. 2. Поверхность Кунса

4°. Пусть заданы наборы вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \in C^2\big([c,d]\big), \qquad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n \in C^2\big([a,b]\big),$$

удовлетворяющих условиям (1). Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}
\int_a^b \int_c^d \big\|\mathbf{r}_{uuvv}(u,v)\big\|^2 dv\, du \to \inf, \\
\mathbf{r}(u_i, v) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in [c,d], \\
\mathbf{r}(u, v_j) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in [a,b], \\
\mathbf{r} \in C^2\big([a,b] \times [c,d]\big), \quad \mathbf{r}_{uuvv}, \mathbf{r}_{vvuu} \in C\big([a,b] \times [c,d]\big), \\
\mathbf{r}_{uuvv}(u,v) \equiv \mathbf{r}_{vvuu}(u,v).
\end{gathered} \tag{10}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Поверхность Кунса класса C^2, построенная по формуле* (9)*, является единственным решением задачи* (10).

Доказательство. Воспользуемся теоремой об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, доказанной в [3]. Пусть

$$I_u\, g = \int_a^b g(u)\, du, \qquad I_v\, f = \int_c^d f(v)\, dv.$$

Положим $E_u = C^2\big([a,b]\big)$, $E_v = C^2\big([c,d]\big)$ и определим операторы A_u и A_v формулами

$$A_u\, g = g'', \qquad A_v\, f = f''.$$

Основное условие в теореме связано с экстремальными задачами для функций одной переменной, заданных на множествах D_u и D_v. В данном случае экстремальная задача для функции, заданной на множестве D_u, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\int_a^b \big[g''(u)\big]^2 du \to \inf,\\ g(u_i) = x_i, \quad i \in 1:m,\\ g \in C^2\big([a,b]\big).\end{gathered} \tag{11}$$

Согласно свойству минимальной нормы для натуральных сплайнов (см. [2, с. 73]), единственным решением задачи (11) является интерполяционный кубический сплайн, который может быть представлен в виде

$$g_*(u) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u)\, x_i.$$

Это в точности соответствует требуемому условию теоремы. Аналогичным образом проверяется условие, связанное с экстремальной задачей для функции, заданной на множестве D_v.

Положим

$$T_{uv} = C\big([a,b]\times[c,d]\big),$$
$$E_{uv} = \Big\{e \in C^2\big([a,b]\times[c,d]\big) \;\Big|\; e_{uuvv}, e_{vvuu} \in C\big([a,b]\times[c,d]\big),\ e_{uuvv} = e_{vvuu}\Big\}.$$

Так же, как в [3], обозначим через $\mathbf{E}_{uv}$ пространство вектор-функций, координатные функции которых принадлежат пространству E_{uv}. Проверим, что поверхность Кунса класса C^2, построенная по формуле (9), принадлежит пространству $\mathbf{E}_{uv}$. Действительно,

$$\mathbf{r}_{uuvv}(u,v) = \sum_{i=1}^m \big(H_i^u(u)\big)''\, \mathbf{f}_i''(v) + \sum_{j=1}^n \big(H_j^v(v)\big)''\, \mathbf{g}_j''(u) - \\ - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \big(H_i^u(u)\big)''\, \big(H_j^v(v)\big)''\, g_j(u_i) = \mathbf{r}_{vvuu}(u,v).$$

Так как в данном случае $A_{u,*} = \frac{d^2}{du^2}$, $A_{*,v} = \frac{d^2}{dv^2}$, то по построению пространства E_{uv} выполняется равенство

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, e = A_{*,v}\, A_{u,*}\, e, \qquad e \in E_{uv}.$$

Все оставшиеся условия, требуемые в теореме об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, являются элементарными свойствами интегралов

и производных функций двух переменных. Применяя теорему, заключаем, что поверхность Кунса, построенная по формуле (9), является единственным решением задачи (10). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`).

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Полиномиальные сплайны.* Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 120 с.

3. Чашников Н. В. *Экстремальные свойства поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).

О МАТРИЦЕ ФРЕЙМА

В. Н. Малозёмов Н. А. Соловьёва

20 мая 2009 г.

Доклад подготовлен на основе статьи [1].

1°. Напомним, что система ненулевых векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ называется фреймом, если эрмитова матрица $S = \Phi\,\Phi^*$, где Φ — матрица со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, положительно определена. Матрица S называется матрицей фрейма.

Отметим, что

$$\Phi\,\Phi^* = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j\,\varphi_j^*\,,$$

поэтому матрица фрейма S не меняется при перестановке векторов φ_j. Обозначим $a_j = \|\varphi_j\|$ и будем считать, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_m > 0\,.$$

Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n > 0$ — собственные числа матрицы S и $v_1, v_2, \dots, v_n$ — соответствующие ортонормированные собственные векторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы соотношения*

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,; \qquad \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \quad \textit{при всех } k \in 1:n\,. \tag{1}$$

Доказательство. Равенство в (1) проверяется просто. Обозначим через $\mathrm{tr}(S)$ след матрицы S. Имеем

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(\Phi\,\Phi^*) = \mathrm{tr}(\Phi^*\Phi) = \sum_{j=1}^{m} \left\|\varphi_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,.$$

Обратимся к неравенствам. Зафиксируем $k \in 1:n$ и обозначим через $\mathcal{L}$ линейную оболочку векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Построим в $\mathcal{L}$ ортонормированный

базис $\psi_1, \dots, \psi_s$, где $s \leqslant k$, и дополним его векторами $\psi_{s+1}, \dots, \psi_n$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим через Ψ матрицу со столбцами $\psi_1, \dots, \psi_s$ и положим $P = \Psi\Psi^*$. При всех $x \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$Px = \sum_{i=1}^{s} \langle x, \psi_i \rangle \, \psi_i \, . \tag{2}$$

В частности,

$$P\varphi_j = \varphi_j \, , \qquad j \in 1 : k \, . \tag{3}$$

Кроме того, при всех $j \in 1 : m$ согласно (2)

$$\left\| P\varphi_j \right\|^2 = \sum_{i=1}^{s} \left| \langle \varphi_j, \psi_i \rangle \right|^2 . \tag{4}$$

Вычислим величину

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} \left\| P\varphi_j \right\|^2 .$$

На основании (4) запишем

$$\begin{aligned}
\sigma = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \left| \langle \varphi_j, \psi_i \rangle \right|^2 &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \left| \Big\langle \sum_{l=1}^{n} \langle \varphi_j, v_l \rangle \, v_l \, , \sum_{l'=1}^{n} \langle \psi_i, v_{l'} \rangle \, v_{l'} \Big\rangle \right|^2 = \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \left| \sum_{l=1}^{n} \langle \varphi_j, v_l \rangle \, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle} \right|^2 = \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \sum_{l=1}^{n} \sum_{l'=1}^{n} \langle \varphi_j, v_l \rangle \, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle} \, \overline{\langle \varphi_j, v_{l'} \rangle} \, \langle \psi_i, v_{l'} \rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \sum_{l=1}^{n} \left| \langle \varphi_j, v_l \rangle \, \langle \psi_i, v_l \rangle \right|^2 .
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что при $l \neq l'$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \langle \varphi_j, v_l \rangle \, \overline{\langle \varphi_j, v_{l'} \rangle} \, \langle \psi_i, v_{l'} \rangle \, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle} = \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, v_l \rangle \, \overline{\langle \varphi_j, v_{l'} \rangle} \Big) \Big(\sum_{i=1}^{s} \langle \psi_i, v_{l'} \rangle \, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle} \Big) = 0 \, ,
\end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, v_l \rangle \, \overline{\langle \varphi_j, v_{l'} \rangle} = \sum_{j=1}^{m} \langle v_{l'}, \varphi_j \rangle \, \overline{\langle v_l, \varphi_j \rangle} =$$

$$= \langle \Phi^* v_{l'}, \Phi^* v_l \rangle = \langle S\, v_{l'}, v_l \rangle = \lambda_{l'} \langle v_{l'}, v_l \rangle = 0\,.$$

Приходим к формуле

$$\sigma = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \big|\langle v_l, \varphi_j \rangle\big|^2 \sum_{i=1}^{s} \big|\langle v_l, \psi_i \rangle\big|^2 = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{i=1}^{s} \big|\langle v_l, \psi_i \rangle\big|^2\,.$$

Обозначим

$$x_l = \sum_{i=1}^{s} \big|\langle v_l, \psi_i \rangle\big|^2\,.$$

Имеем

$$x_l \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big|\langle v_l, \psi_i \rangle\big|^2 = \big\|v_l\big\|^2 = 1\,,$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_l = \sum_{i=1}^{s} \sum_{l=1}^{n} \big|\langle \psi_i, v_l \rangle\big|^2 = \sum_{i=1}^{s} \big\|\psi_i\big\|^2 = s\,.$$

Значит,

$$\sigma = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l\, x_l\,,$$

где $0 \leqslant x_l \leqslant 1$ и $\sum\limits_{l=1}^{n} x_l = s$. Учитывая упорядоченность собственных чисел λ_l и равенство

$$\sum_{l=s+1}^{n} x_l = s - \sum_{l=1}^{s} x_l = \sum_{l=1}^{s} \big(1 - x_l\big)\,,$$

получаем,

$$\sigma \leqslant \sum_{l=1}^{s} \lambda_l\, x_l + \lambda_{s+1} \sum_{l=s+1}^{n} x_l = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l - \sum_{l=1}^{s} \lambda_l \big(1 - x_l\big) + \lambda_{s+1} \sum_{l=1}^{s} \big(1 - x_l\big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \lambda_l - \sum_{l=1}^{s} \big(\lambda_l - \lambda_{s+1}\big)\big(1 - x_l\big) \leqslant \sum_{l=1}^{s} \lambda_l\,. \tag{5}$$

Теперь доказательство требуемого неравенства заканчивается просто. Согласно (3) и (5)

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \big\|\varphi_j\big\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \big\|P\varphi_j\big\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \big\|P\varphi_j\big\|^2 =$$

$$= \sigma \leqslant \sum_{l=1}^{s} \lambda_l \leqslant \sum_{l=1}^{k} \lambda_l\,.$$

□

2°. Предложение 1 допускает обращение в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть S — произвольная эрмитова положительно определённая матрица порядка n с собственными числами $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n > 0$ и соответствующими ортонормированными собственными векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$. Возьмём положительные числа $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_m > 0$, где $m \geqslant n$. Если выполняются соотношения* (1), *то в $\mathbb{C}^n$ существует фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, такой, что $\|\varphi_j\| = a_j$ при $j \in 1:m$ и матрица S является матрицей этого фрейма.*

Доказательству предложения 2 предпошлём вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. *Пусть заданы вещественные числа $\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_m$ и $a_1, \dots, a_m$, причём $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_m > 0$. Введём диагональную матрицу $\widehat{\Lambda} = \operatorname{diag}(\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_m)$. Если выполнены условия*

$$\sum_{l=1}^{m} \widehat{\lambda}_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,; \qquad \sum_{l=1}^{k} \widehat{\lambda}_l \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \quad \text{при всех } k \in 1:m-1\,, \tag{6}$$

то существует ортогональная матрица Q, такая, что у матрицы $Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, \dots, a_m^2$.

Доказательство леммы отложим до следующего пункта и сразу перейдём к доказательству предложения 2.

Запишем спектральное разложение матрицы S,

$$S = V \Lambda V^*,$$

где V — матрица со столбцами $v_1, \dots, v_n$ и $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Введём матрицу G размера $n \times m$,

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем $G\,G^T = \Lambda$ и $G^T G = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0) =: \widehat{\Lambda}$. Обозначим $\widehat{\lambda}_l = \lambda_l$, $l \in 1:n$; $\widehat{\lambda}_l = 0$, $l \in n+1:m$. Тогда $\widehat{\Lambda} = \operatorname{diag}(\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_m)$.

Для чисел $\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_m$ и $a_1, \dots, a_m$ выполняются условия леммы. Действительно, согласно (1)

$$\sum_{l=1}^{m} \widehat{\lambda}_l = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,;$$

при $k \in 1:n$

$$\sum_{l=1}^{k} \widehat{\lambda}_l = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2$$

и при $k \in n+1:m-1$

$$\sum_{l=1}^{k} \widehat{\lambda}_l = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \,.$$

По лемме существует ортогональная матрица Q, такая, что у матрицы $Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, \ldots, a_m^2$.

Положим

$$\Phi = V G\, Q^T$$

и обозначим через $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ столбцы матрицы Φ. Имеем

$$\Phi\,\Phi^* = V G\, Q^T Q\, G^T V^* = V G\, G^T V^* = V \Lambda\, V^* = S \,.$$

Учитывая свойства матрицы S, заключаем, что $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — фрейм в $\mathbb{C}^n$ и S — матрица этого фрейма. При этом

$$\Phi^*\Phi = Q\, G^T V^* V G\, Q^T = Q\, G^T G\, Q^T = Q\,\widehat{\Lambda}\, Q^T .$$

Значит, на диагонали матрицы $\Phi^*\Phi$ стоят числа $a_1^2, \ldots, a_m^2$, а это равносильно тому, что $\|\varphi_j\| = a_j$ при $j \in 1:m$.

Предложение 2 доказано.

3°. Докажем лемму.

Воспользуемся индукцией по m. При $m = 2$ условия (6) принимают вид

$$\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 = a_1^2 + a_2^2 \,, \qquad \widehat{\lambda}_1 \geqslant a_1^2 \,. \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$a_1^2 - \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1 - a_2^2 \geqslant \widehat{\lambda}_1 - a_1^2 \geqslant 0 \,.$$

Значит, $\widehat{\lambda}_1 \geqslant a_1^2 \geqslant \widehat{\lambda}_2$. В частности, $\widehat{\lambda}_1 \geqslant \widehat{\lambda}_2$.

Сначала рассмотрим случай $\widehat{\lambda}_1 > \widehat{\lambda}_2$. Выберем параметр $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ так, чтобы

$$\sin t = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}} \,, \qquad \cos t = \sqrt{\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}} \,.$$

Введём ортогональную матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} .$$

Получим

$$Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\lambda}_1\,\cos t & -\widehat{\lambda}_1\,\sin t \\ \widehat{\lambda}_2\,\sin t & \widehat{\lambda}_2\,\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & b \\ b & a_2^2 \end{bmatrix},$$

где $b = -\sqrt{(\widehat{\lambda}_1 - a_1^2)\,(a_1^2 - \widehat{\lambda}_2)}$. Действительно,

$$\widehat{\lambda}_1\,\cos^2 t + \widehat{\lambda}_2\,\sin^2 t = \widehat{\lambda}_1\left(\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) + \widehat{\lambda}_2\left(\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) = a_1^2\,,$$

$$\widehat{\lambda}_1\,\sin^2 t + \widehat{\lambda}_2\,\cos^2 t = \widehat{\lambda}_1\left(\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) + \widehat{\lambda}_2\left(\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - a_1^2 = a_2^2\,.$$

Таким образом, на диагонали матрицы $Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T$ стоят числа a_1^2, a_2^2.

Перейдём к случаю $\widehat{\lambda}_1 = \widehat{\lambda}_2$. В силу (7)

$$a_1^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \leqslant 2\widehat{\lambda}_1 - a_1^2 = a_2^2 \leqslant a_1^2\,.$$

Значит, $a_1^2 = a_2^2 = \widehat{\lambda}_1 = \widehat{\lambda}_2$. Достаточно взять $Q = I_2$.

Сделаем индукционный переход от $m-1$ к m. Согласно (6), $\widehat{\lambda}_1 \geqslant a_1^2$. Допустим, что $\widehat{\lambda}_l \geqslant a_1^2$ при всех $l \in 1:m$. Тогда

$$ma_1^2 \leqslant \sum_{l=1}^{m} \widehat{\lambda}_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \leqslant ma_1^2\,.$$

Отсюда следует, что $a_1^2 = \dots = a_m^2 = \widehat{\lambda}_1 = \dots = \widehat{\lambda}_m$. Достаточно взять $Q = I_m$.

Остаётся предположить, что существует $s \in 2:m$, такое, что

$$\widehat{\lambda}_s < a_1^2\,; \qquad \widehat{\lambda}_l \geqslant a_1^2 \quad \text{при } l \in 1:s-1\,. \tag{8}$$

Покажем, что для чисел $\widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_{s-1}, \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2, \widehat{\lambda}_{s+1}, \dots, \widehat{\lambda}_m$ и $a_2, \dots, a_m$ выполняются условия, аналогичные (6). Имеем

$$\widehat{\lambda}_2 + \dots + \widehat{\lambda}_{s-1} + \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2\right) + \widehat{\lambda}_{s+1} + \dots + \widehat{\lambda}_m = a_2^2 + \dots + a_m^2\,;$$

при $k \in 1:s-1$

$$\widehat{\lambda}_2 + \dots + \widehat{\lambda}_k \geqslant (k-1)\,a_1^2 \geqslant (k-1)\,a_2^2 \geqslant a_2^2 + \dots + a_k^2\,;$$

при $k \in s:m-1$

$$\widehat{\lambda}_2 + \dots + \widehat{\lambda}_{s-1} + \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2\right) + \widehat{\lambda}_{s+1} + \dots + \widehat{\lambda}_k =$$

$$= \widehat{\lambda}_1 + \dots + \widehat{\lambda}_k - a_1^2 \geqslant a_2^2 + \dots + a_k^2 \,.$$

Обозначим $\widehat{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}(\widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_{s-1}, \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2, \widehat{\lambda}_{s+1}, \dots, \widehat{\lambda}_m)$. По индукционному предположению найдётся ортогональная матрица Q_1 порядка $m-1$, такая, что у матрицы $Q_1 \widehat{\Lambda}_1 Q_1^T$ на диагонали стоят числа $a_2^2, \dots, a_m^2$.

Вернёмся к соотношениям (8). Выбор индекса s обеспечивает неравенство $\widehat{\lambda}_1 > \widehat{\lambda}_s$. Найдём $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, исходя из условий

$$\sin t = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_s}}\,, \qquad \cos t = \sqrt{\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_s}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_s}}\,. \tag{9}$$

Обозначим через Θ_s матрицу порядка s вида

$$\Theta_s = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \dots & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \dots & 0 & \cos t \end{bmatrix}$$

и положим

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_s & 0 \\ 0 & I_{m-s} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что Θ — ортогональная матрица порядка m.

Нас интересует матрица

$$H = \Theta \widehat{\Lambda} \Theta^T = \begin{bmatrix} \Theta_s & 0 \\ 0 & I_{m-s} \end{bmatrix} \widehat{\Lambda} \begin{bmatrix} \Theta_s^T & 0 \\ 0 & I_{m-s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Theta_s \widehat{\Lambda}[1:s, 1:s] \Theta_s^T & 0 \\ 0 & \widehat{\Lambda}[s+1:m, s+1:m] \end{bmatrix}.$$

Покажем, что

$$H = \begin{bmatrix} a_1^2 & h^T \\ h & \widehat{\Lambda}_1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\widehat{\Lambda}_1$ — введённая выше диагональная матрица порядка $m-1$.

Согласно (9) имеем

$$H[1,1] = \widehat{\lambda}_1 \cos^2 t + \widehat{\lambda}_s \sin^2 t = a_1^2\,,$$

$$H[s,s] = \widehat{\lambda}_1 \sin^2 t + \widehat{\lambda}_s \cos^2 t = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2\,.$$

Кроме того, очевидно, что $H[l,l] = \widehat{\lambda}_l$ при $l \in 2 : s-1$. Таким образом, на диагональных элементах равенство (10) выполняется. Остаётся проверить, что $H[l,j] = 0$ при $l, j \in 2 : s$, $l \neq j$. Это проверяется в два приёма: $H[l,j] = 0$ при $l \in 2 : s-1$, $j \in 2 : s$, $l \neq j$ и $H[s,j] = 0$ при $j \in 2 : s-1$. Отметим, что у $(m-1)$-мерного вектора h лишь одна компонента, возможно, отлична от нуля. Точнее,

$$H[1,s] = H[s,1] = -\sqrt{(\widehat{\lambda}_1 - a_1^2)\,(a_1^2 - \widehat{\lambda}_s)}\,.$$

Формула (10) установлена.

Рассмотрим ортогональную матрицу Q_0 порядка m,

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix},$$

где матрица Q_1, как и $\widehat{\Lambda}_1$, определена выше. Согласно (10) имеем

$$Q_0\, H\, Q_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 & h^T \\ h & \widehat{\Lambda}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & (Q_1\, h)^T \\ Q_1\, h & Q_1\, \widehat{\Lambda}_1\, Q_1^T \end{bmatrix}.$$

Видим, что у матрицы $Q_0\, H\, Q_0^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_m^2$. При этом

$$Q_0\, H\, Q_0^T = Q_0\, \Theta\, \widehat{\Lambda}\, \Theta^T\, Q_0^T\,.$$

Ортогональная матрица $Q = Q_0\, \Theta$ обладает тем свойством, что у матрицы $Q\, \widehat{\Lambda}\, Q^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, \ldots, a_m^2$.

Лемма доказана. □

4°. Приведём одно следствие из предложения 2. Напомним, что фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ называется равномерным, если $\|\varphi_1\| = \cdots = \|\varphi_m\|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть S — эрмитова положительно определённая матрица порядка n. Тогда при каждом $m \geqslant n$ в $\mathbb{C}^n$ существует равномерный фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, у которого матрица фрейма равна S.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$ — собственные числа матрицы S. Обозначим $A = \sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_l$. Фиксируем $m \geqslant n$ и положим

$$a_j = \sqrt{\tfrac{A}{m}}\,, \qquad j \in 1 : m\,.$$

Тогда

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = A = \sum_{j=1}^{m} a_j^2$$

и при $k \in 1:n$

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 = \frac{k}{m}\,A = k\,\frac{n}{m}\,\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l \leqslant k\,\frac{n}{m}\,\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \leqslant \sum_{l=1}^{k}\lambda_l\,.$$

Мы воспользовались тем, что в силу упорядоченности λ_l

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \geqslant \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\,. \tag{11}$$

Проверим это неравенство. Имеем

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \geqslant \lambda_{k+1} = \sum_{l=1}^{k+1}\lambda_l - \sum_{l=1}^{k}\lambda_l\,.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \geqslant \frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}\lambda_l\,.$$

Продолжив аналогично, придём к (11).

Показано, что для чисел $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n > 0$ и $a_1 = \dots = a_m = \sqrt{\frac{A}{m}}$ условия предложения 2 выполнены. Согласно этому предложению требуемый фрейм существует. □

5°. Сформулируем аналоги предложений 1 и 2 для жёстких фреймов, у которых по определению $\lambda_1 = \dots = \lambda_n =: \lambda > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — жёсткий фрейм в $\mathbb{C}^n$ с константой фрейма λ и $a_j = \|\varphi_j\|$, причём $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_m > 0$. Тогда*

$$n\,\lambda = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \quad \text{и} \quad \lambda \geqslant a_1^2\,. \tag{12}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть заданы натуральное число $n \geqslant 2$ и вещественное $\lambda > 0$. При $m \geqslant n$ возьмём числа $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_m > 0$, удовлетворяющие условиям (12). Тогда в $\mathbb{C}^n$ существует жёсткий фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ с константой фрейма λ, такой, что $\|\varphi_j\| = a_j$ при $j \in 1:m$.*

Отметим, что из неравенства $\lambda \geqslant a_1^2$ следует, что при всех $k \in 1:n$

$$k\,\lambda \geqslant k\,a_1^2 \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2\,.$$

З а м е ч а н и е. По ходу доказательства предложения 2 было установлено, что требуемый фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ состоит из столбцов матрицы $\Phi = VGQ^T$, где матрицы G и Q зависят только от чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $a_1, \ldots, a_m$, а унитарная матрица V участвует в спектральном разложении матрицы S, $S = V\Lambda V^*$. В случае жёсткого фрейма $S = \lambda I_n$, так что в качестве V можно взять любую унитарную матрицу порядка n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Casazza P. G., Leon M. T. *Frames with a given frame operator.* 2002. Preprint.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ПОЛУДИЗАЙНОВ

Н. О. Котелина А. Б. Певный

27 мая 2009 г.

Данный доклад является продолжением доклада [1]. Для любого чётного $t \geqslant 2$ и любой системы векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ вводится понятие t-потенциала $P_t(\Phi) = \sum_{i,j=1}^m \big[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big]^t$. Доказывается, что минимум t-потенциала достигается на сферических полудизайнах порядка t и только на них. Впервые аналогичное утверждение было установлено Б. Б. Венковым [2]. Даётся обобщение на случай систем Φ, не лежащих на сфере S^{n-1}. Вводятся также потенциалы В. А. Юдина $U_k(\Phi)$, $k = 2, 4, \dots, t$, и доказывается, что они также достигают минимума на сферических полудизайнах порядка t и только на них.

1°. Обозначения и предварительные сведения. Используем скалярное произведение $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Пусть

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Всюду далее t — чётное число, $t \geqslant 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим полудизайном порядка t (или кратко сферическим t-полудизайном), если существует константа $A_t > 0$ такая, что выполнено тождество Варинга

$$\sum_{i=1}^m \big[\langle \varphi_i, x \rangle\big]^t = A_t \, \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

В докладе [1] последовательным применением оператора Лапласа Δ к обеим частям тождества (1) определена константа A_t. В результате установлено, что $A_t = cm$, где

$$c = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}\,. \tag{2}$$

Попутно показано, что сферический полудизайн порядка t является сферическим полудизайном для всех порядков $k = 2, 4, \dots, t$.

2°. Сферические дизайны и их связь с полудизайнами. Сферические p-дизайны определили Delsarte, Goethals, Seidel [5] в 1977 г. Это же определение использовалось во многих других работах [3, 6, 12, 13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система точек $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим p-дизайном, если выполнено тождество

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i) \tag{3}$$

для всех полиномов $Q(x)$ степени не выше p.

Здесь $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ — площадь сферы S^{n-1}, порядок p может быть нечётным, а полином $Q(x)$ не обязательно однородный.

В докладе [1] установлена связь между определениями 1 и 2. Если $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический полудизайн чётного порядка t, то

$$\Phi_{2m} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_m\}$$

будет сферическим дизайном порядка $t+1$.

Обратно, пусть множество $\Phi_{2m} \subset S^{n-1}$ является симметричным, т. е. вместе с каждым вектором $\varphi \in \Phi_{2m}$ содержит вектор $-\varphi$. Тогда Φ_{2m} можно представить в виде

$$\Phi_{2m} = \Phi \cup -\Phi, \qquad \Phi \cap -\Phi = \varnothing.$$

Если Φ_{2m} — сферический $(t+1)$-дизайн, то Φ будет сферическим полудизайном порядка t.

Следует также отметить, что существуют несимметричные сферические дизайны. Содержательные примеры приведены в работах В. А. Юдина [12, 13].

3°. Неравенство Б. Б. Венкова. Рассмотрим произвольную систему векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1}. Величину

$$P_t(\Phi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big]^t. \tag{4}$$

будем называть t-потенциалом этой системы. При $t = 2$ потенциал $P_2(\Phi)$ называется фреймовым потенциалом. Он был введен в работах [8, 9].

ТЕОРЕМА 1 (Б. Б. Венков [2]). *Для любой системы* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ *справедливо неравенство*

$$P_t(\Phi) \geqslant c\, m^2, \tag{5}$$

где константа c определена формулой (2). *Неравенство* (5) *превращается в равенство на сферических t-полудизайнах и только на них.*

В дальнейшем мы обобщим эту теорему на случай неединичных векторов (см. далее теорему 2).

ПРИМЕР. Рассмотрим икосаэдр, вписанный в S^2. Напомним, что икосаэдр имеет 12 вершин. Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ — система из 6 вершин икосаэдра, не содержащая противоположных векторов. Вычислим 4-потенциал $P_4(\Phi)$.

Поскольку $\varphi_i \in S^2$, то $\|\varphi_i\|^2 = 1$, $i \in 1:6$. По теореме Haantjes [6] для вершин икосаэдра выполнены соотношения

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{при } i \neq j.$$

Значит, $P_4(\Phi) = 6 \cdot 1 + 30 \cdot \frac{1}{25} = \frac{36}{5}$. В то же время при $n = 3$, $t = 4$, $m = 6$ имеем

$$c\, m^2 = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5} 6^2 = \frac{36}{5}\,.$$

Следовательно, $P_4(\Phi) = cm^2$, так что система Φ является 4-полудизайном. Система $\Phi_{12} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_6, -\varphi_1, \dots, -\varphi_6\}$ всех 12 вершин икосаэдра является сферическим 5-дизайном.

4°. Несферические полудизайны. Перейдем к рассмотрению t-полудизайнов в $\mathbb{R}^n$, состоящих из векторов разной длины. Пусть t — четное, $t \geqslant 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система ненулевых векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется t-полудизайном, если существует $A_t > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x \rangle\big]^t = A_t \, \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

ЛЕММА 1. *Пусть $t \geqslant 4$ и система Φ является t-полудизайном. Тогда система векторов*

$$\theta_i = \big\{ \|\varphi_i\|^{2/(t-2)} \, \varphi_i \big\}_{i=1}^{m}$$

является $(t-2)$-полудизайном с константой

$$A_{t-2} = A_t \, \frac{t+n-2}{t-1}\,.$$

Доказательство. Применим оператор Лапласа Δ к обеим частям тождества (6). Получим

$$t(t-1) \sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x \rangle\big]^{t-2} \, \|\varphi_i\|^2 = A_t \, t\,(t+n-2) \|x\|^{t-2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Положим $s = t/2$. После $s-1$ применений оператора Δ придем к равенству

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^2 \, \|\varphi_i\|^{t-2} = A_2 \, \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Применим ещё раз оператор Δ. Получим

$$2 \sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^t = A_2 \cdot 2n.$$

Отсюда $A_2 = \mu/n$, где

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^t. \tag{7}$$

Из рекуррентного соотношения (3) и равенства $A_2 = \mu/n$ следует, что $A_t = c\mu$, где c определено формулой (2).

5°. Неравенство для t-потенциала. Как и выше, t-потенциал $P_t(\Phi)$ определяется формулой (4).

ТЕОРЕМА 2. *Для любой системы ненулевых векторов Φ в пространстве $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$P_t(\Phi) \geqslant c \left(\sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^t \right)^2, \tag{8}$$

где константа c определяется формулой (2). *Равенство в* (8) *достигается на t-полудизайнах и только на них.*

Для доказательства потребуется некоторая техника, связанная со скалярным произведением в пространстве однородных полиномов $\mathcal{P}_{n,t}$ степени t.

Возьмем два полинома $f,\, g \in \mathcal{P}_{n,t}$

$$f(x) = \sum_{|i|=t} a(i)\, x^i, \qquad g(x) = \sum_{|i|=t} b(i)\, x^i,$$

где $i = (i_1, \ldots, i_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами (мультииндекс), $|i| = i_1 + \cdots + i_n$, $x^i = x_1^{i_1}\, x_2^{i_2} \, \cdots \, x_n^{i_n}$. Введём скалярное произведение

$$[f,\, g] = \sum_{|i|=t} \frac{a(i)\, b(i)}{c(i)}\,, \qquad \text{где } c(i) = \frac{t!}{i_1!\, i_2! \, \cdots \, i_n!}\,.$$

С этим скалярным произведением $\mathcal{P}_{n,t}$ становится гильбертовым пространством. Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ введём полином

$$\rho_\varphi(x) = \big[\langle \varphi, x\rangle\big]^t = [\varphi_1\, x_1 + \cdots + \varphi_n\, x_n]^t.$$

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathcal{P}_{n,t}$ легко проверяется равенство

$$[\rho_\varphi, f] = f(\varphi), \tag{9}$$

т. е. $\rho_\varphi(x)$ является воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{P}_{n,t}$. Введём также полином $\omega_t(x) = \|x\|^t$ (по-прежнему t — чётное число, $t \geqslant 2$). В [2] и [3] установлено равенство

$$[\omega_t, \omega_t] = \frac{1}{c}\,, \tag{10}$$

где c — константа вида (2).

Доказательство. Доказательство теоремы 2 следует идее, указанной Венковым Б. Б. [2]. С помощью обозначения μ, введённого в (7), требуемое неравенство перепишется в виде $P_t(\Phi) \geqslant c\mu^2$. Запишем неравенство

$$W := \Big[\sum_{i=1}^m \rho_{\varphi_i} - c\,\mu\,\omega_t,\ \sum_{j=1}^m \rho_{\varphi_j} - c\,\mu\,\omega_t\Big] \geqslant 0.$$

Отсюда

$$W = W_1 - 2\,c\,\mu\,W_2 + c^2\,\mu^2\,[\omega_t, \omega_t],$$

где

$$W_1 = \sum_{i,j=1}^m [\rho_{\varphi_i}, \rho_{\varphi_j}], \qquad W_2 = \sum_{i=1}^m [\rho_{\varphi_i}, \omega_t].$$

В силу (9)

$$W_1 = \sum_{i,j=1}^m \rho_{\varphi_j}(\varphi_i) = \sum_{i,j=1}^m \big[\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\big]^t = P_t(\Phi),$$
$$W_2 = \sum_{i=1}^m \omega_t(\varphi_i) = \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|^t = \mu.$$

Следовательно, с учетом (10),

$$W = P_t(\Phi) - 2\,c\,\mu^2 + c^2\,\mu^2\,\frac{1}{c} = P_t(\Phi) - c\,\mu^2.$$

Поскольку $W \geqslant 0$, то $P_t(\Phi) \geqslant c\mu^2$, что равносильно (8).

Исследуем вопрос о достижении равенства.

Пусть система Φ является t-полудизайном. В определении (6) положим $x = \varphi_j$ и учтем, что $A_t = c\mu$. Получим

$$\sum_{i=1}^m \big[\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\big]^t = c\,\mu\,\|\varphi_j\|^t, \qquad j \in 1:m. \tag{11}$$

Суммируя (11), приходим к равенству $P_t(\Phi) = c\mu^2$.

Обратно, пусть для некоторой системы Φ в (8) достигается равенство. Тогда величина W равна нулю. Из определения W следует

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}(x) - c\,\mu\,\omega_t(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

т. е. выполнено (6) с константой $A_t = c\mu$. Значит, Φ является t-полудизайном. Теорема доказана. □

6°. Полиномы Гегенбауэра и теорема В. А. Юдина. Зафиксируем натуральное $n \geqslant 3$. Рассмотрим вес

$$w_n(u) = (1-u^2)^{(n-3)/2}, \qquad u \in [-1,\,1].$$

Пусть $G_k(u)$ — полиномы Гегенбауэра (ультрасферические многочлены) степени k. Они обладают свойством ортогональности с весом $w_n(u)$:

$$\int_{-1}^{1} G_k(u)\,G_s(u)\,w_n(u)\,du = 0 \qquad \text{при } k \neq s \tag{12}$$

(см. [10]). Отметим, что $G_0(u) \equiv 1$ при $k = 0$. При $k \geqslant 1$ полиномы $G_k(u)$ содержат либо только чётные степени u, либо только нечётные в зависимости от чётности k. Справедлива формула сложения

$$G_k\big(\langle x, y\rangle\big) = \sum_{j=1}^{N(k)} Y_j(x)\,Y_j(y), \qquad x,\,y \in S^{n-1}, \tag{13}$$

где Y_j, $j \in 1 : N(k)$ — сферические функции порядка k (см. [11]).

Пусть $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*\} \subset S^{n-1}$ — сферический t-полудизайн, где t — чётное число, $t \geqslant 2$. В. А. Юдин [13] получил критерий сферического дизайна в терминах полиномов Гегенбауэра. Поскольку наше определение сферического t-полудизайна несколько отличается от определения, принятого в [13], то пришлось внести изменения в формулировку теоремы и дать новое доказательство.

ТЕОРЕМА 3 (В. А. Юдин). *Для того чтобы система $\Phi^* \in S^{n-1}$ была сферическим t-полудизайном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\sum_{i=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, x\rangle\big) = 0, \qquad x \in S^{n-1}, \quad k = 2, 4, \ldots, t. \tag{14}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ^* — сферический t-полудизайн. Тогда (см. п. 1°) Φ^* является сферическим s-полудизайном для $s = 2, 4, \ldots, t$ с константой $A_s = mc(s)$, где

$$c(s) = \frac{(s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+s-2)}\,.$$

Покажем, что справедливы равенства

$$c(s) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\int_{-1}^{1} u^s\, w_n(u)\, du, \qquad s = 2, 4, \ldots, t, \tag{15}$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ — площадь сферы S^{n-1}. Интеграл в (15) вычисляется так:

$$I(s) = 2\int_0^1 u^s\, w_n(u)\, du = \int_0^1 x^{(s-1)/2}\,(1-x)^{(n-3)/2}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+n}{2}\right)}\,. \tag{16}$$

При $s = 0$ отсюда получим

$$I(0) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\,.$$

Преобразуем гамма-функции в (16) на основании свойства $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$:

$$\Gamma\left(\tfrac{s+1}{2}\right) = (s-1)!!\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s/2}}\,, \qquad \Gamma\left(\tfrac{n+s}{2}\right) = \frac{n(n+2)\cdots(n+s-2)}{2^{s/2}}\,\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).$$

В результате при $s = 2, 4, \ldots, t$

$$I(s) = \frac{(s-1)!!\,\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{n(n+2)\cdots(n+s-2)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\,c(s), \tag{17}$$

откуда следует (15).

Определим теперь значение $c(0)$ по формуле (15) при $s = 0$:

$$c(0) := \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\,I(0) = 1.$$

По определению сферических полудизайнов выполнены равенства

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\langle \varphi_i^*, x\rangle\right]^s = c(s), \qquad x \in S^{n-1}, \quad s = 2, 4, \ldots, t. \tag{18}$$

Равенство (18) будет выполнено и при $s = 0$ (оно примет вид $\frac{1}{m}\,m = c(0) = 1$).

Зафиксируем $k \in \{2, 4, \ldots, t\}$. Полином Гегенбауэра $G_k(u)$ содержит только чётные степени u:

$$G_k(u) = \sum_{s=0,2,\ldots,k} a(s)\, u^s.$$

Умножим (18) на $a(s)$ и сложим для $s = 0, 2, \ldots, t$. Получим с учетом равенств (15)

$$\sum_{i=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, x\rangle\big) = \sum_{s=0,2,\ldots,k} a(s)\, c(s) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \int_{-1}^{1} G_k(u)\, w_n(u)\, du = 0$$

для всех $x \in S^{n-1}$. Равенство интеграла нулю выполняется в силу свойства ортогональности (12).

Достаточность. Пусть выполнены равенства (14). Нужно доказать, что система $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*\}$ является сферическим полудизайном порядка t. Разложим полином u^t по полиномам $G_k(u)$, $k = 0, 2, \ldots, t$:

$$u^t = \sum_{k=0,2,\ldots,t} d(k)\, G_k(u). \tag{19}$$

Подставим $u = \langle \varphi_i^*, x\rangle$, где $x \in S^{n-1}$, и просуммируем по $i \in 1 : m$:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i^*, x\rangle\big]^t = \frac{1}{m} \sum_{k=0,2,\ldots,t} d(k) \sum_{i=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, x\rangle\big).$$

В силу равенств (14) и равенства $G_0(u) = 1$ имеем

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i^*, x\rangle\big]^t = d(0), \qquad x \in S^{n-1}.$$

Возьмём любой вектор $x \neq \mathbb{O}$ и подставим в записанное выше равенство вектор $x/\|x\|$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i^*, x\rangle\big]^t = m\, d(0)\, \|x\|^t.$$

По определению 1 система Φ^* — сферический полудизайн. Теорема доказана. $\square$

7°. Потенциалы В. А. Юдина. Для любой системы $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1} определим потенциалы В. А. Юдина

$$U_k(\Phi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big), \qquad k = 1, 2, \dots, t.$$

Поводом для введения названия «потенциал» послужила неотрицательность выражений $U_k(\Phi)$. Действительно, по формуле сложения (13)

$$U_k(\Phi) = \sum_{s=1}^{N(k)} \sum_{i=1}^{m} Y_s(\varphi_i) \sum_{j=1}^{m} Y_s(\varphi_j) = \sum_{s=1}^{N(k)} \Big[\sum_{i=1}^{m} Y_s(\varphi_i)\Big]^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, для любой системы $\Phi \subset S^{n-1}$ потенциалы Юдина $U_k(\Phi)$ неотрицательны для всех $k = 1, 2, \dots, t$.

В случае $n = 3$, когда полиномы Гегенбауэра переходят в полиномы Лежандра, следующее утверждение сформулировано в [14]. При доказательстве достаточности удобно опираться на теорему Венкова.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть t — чётное число, $t \geqslant 2$. Система $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*\}$ на сфере S^{n-1} является сферическим t-полудизайном тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$U_k(\Phi^*) = 0, \qquad k = 2, 4, \dots, t. \tag{20}$$

Доказательство. Необходимость. Для сферического t-полудизайна Φ^* по теореме Юдина выполнены равенства (14). Подставим в них $x = \varphi_j^*$ и просуммируем по $j \in 1 : m$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle\big) = 0, \qquad k = 2, 4, \dots, t, \tag{21}$$

что равносильно (20).

Достаточность. Опираемся на теорему 1. Пусть выполнены равенства (20). Вычислим обычный t-потенциал

$$P_t(\Phi^*) = \sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle\big]^t$$

и убедимся, что он равен cm^2, где c определено формулой (2).

Полином u^t разлагается по четным полиномам Гегенбауэра по формуле (19). Подставим $u = \langle \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle$ и просуммируем по $i, j \in 1 : m$. Получим

$$P_t(\Phi^*) = \sum_{k=0,2,\dots,t} d(k) \sum_{i,j=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle\big).$$

В силу (21) и равенства $G_0(u) \equiv 1$ приходим к формуле

$$P_t(\Phi^*) = d(0)\, m^2. \tag{22}$$

Для вычисления $d(0)$ умножим (19) скалярно на G_0, используя скалярное произведение в пространстве $L_2(-1,1)$ с весом $w_n(u)$:

$$d(0) = \frac{(u^t, G_0)}{(G_0, G_0)} = \frac{\int_{-1}^{1} u^t\, w_n(u)\, du}{\int_{-1}^{1} w_n(u)\, du} = \frac{I(t)}{I(0)}\,.$$

Интегралы $I(t)$ и $I(0)$ были вычислены ранее. Подставив их значения, придём к равенству

$$d(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{t+n}{2}\right)} = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)} = c,$$

где c определено в (2). Из (22) следует, что $P_t(\Phi^*) = cm^2$. По теореме Венкова Φ^* является сферическим t-полудизайном. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Для симметричного сферического t-полудизайна вида

$$\Phi^*_{2m} = \{\varphi^*_1, \ldots, \varphi^*_m, -\varphi^*_1, \ldots, -\varphi^*_m\}$$

теорема в части необходимости может быть усилена: будут выполняться равенства

$$U_k(\Phi^*_{2m}) = 0 \qquad \text{для всех } k = 1, 2, 3, \ldots, t.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. О. Котелина, А. Б. Певный. *Сферические дизайны и их основные свойства* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0404`).

2. B. Venkov. *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, Enseign. Math., Géneve, 2001, p. 10–86.

3. B. Reznick. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 96 (1992), no. 463, p. 1–155.

4. В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа, вып. 39 (2009), с. 3–25.

5. P. Delsarte, J. M. Goetals, J. J. Seidel. *Spherical codes and designes* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

6. E. Bonnai, A. Munemasa, B. Venkov. *The nonexistence of certain tight spherical designes* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.

7. J. Haantjes. *Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional space* // Nieuw. Arch. Wisk. 1948. V. 22. P. 355–362.

8. J. J. Benedetto, M. Fickus. *Finite normalized tight frames. Frame potentials.* Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. № 2–4, p. 357–385.

9. P. G. Casazza. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 61–86.

10. Г. Сегё. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962.

11. С. Л. Соболев. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974.

12. В. А. Юдин. *О вариациях дизайнов* // Проблемы передачи информации. 1999. Т. 35. Вып. 4. С. 68–73.

13. В. А. Юдин. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. № 3. С. 39–45.

14. Н. Н. Андреев, В. А. Юдин. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Матем. просвещение. Сер. 3. 1997. Вып. 1. С. 115–125.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Н. В. Чашников

27 июня 2009 г.

Зафиксируем натуральные числа r и $m \geqslant 2$ и рассмотрим m-периодическую последовательность $\mathbf{x}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, точек из $\mathbb{R}^d$. При каждом натуральном $n \geqslant 2$ положим $N = mn$ и построим дискретный N-периодический сплайн $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ порядка r со значениями в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Нас интересует поведение множества $\{\mathbf{S}_{r,n}(j) \,|\, j \in \mathbb{Z}\}$ точек из $\mathbb{R}^d$ при $n \to \infty$.

1°. Уточним постановку задачи. Напомним определение нормализованных дискретных N-периодических B-сплайнов [1, 2]. Так как параметр n будет изменяться, включим его в обозначение:

$$\widetilde{Q}_{1,n}(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ \quad 0 & \text{при } j \in n : N-n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N-n+1 : N-1; \end{cases}$$

$$\widetilde{Q}_{\nu,n} = \frac{1}{n}\left(\widetilde{Q}_{1,n} * \widetilde{Q}_{\nu-1,n}\right), \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

где знаком '$*$' обозначена циклическая свёртка. Дискретный периодический сплайн порядка r определяется формулой

$$\mathbf{S}_{r,n}(j) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}(l)\, \widetilde{Q}_{r,n}(j - ln), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\mathbf{c}(0), \mathbf{c}(1), \ldots, \mathbf{c}(m-1) \in \mathbb{R}^d$.

Пусть задан набор векторов $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$. Согласно [1], найдётся дискретный сплайн $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ вида (1), удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1. \tag{2}$$

Для каждого натурального числа n, отличного от единицы, значения сплайна $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ образуют множество из mn точек пространства $\mathbb{R}^d$. Цель данной заметки состоит в нахождении предела этого множества при $n \to \infty$. Для того, чтобы решить эту задачу, введём непрерывный аналог для дискретных периодических сплайнов.

2°. Пусть m — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический B-сплайн первого порядка как m-периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_1(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{при } t \in [0,1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t-m+1, & \text{при } t \in (m-1, m]. \end{cases} \tag{3}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_\nu(t) = \int_0^m P_{\nu-1}(s)\, P_1(t-s)\, ds, \qquad \nu = 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

Ясно, что $P_\nu(t) \geqslant 0$ для любого натурального ν и вещественного t.

ЛЕММА 1. *Справедливо тождество*

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(t-l) \equiv 1.$$

Доказательство. Докажем это тождество методом математической индукции. При $\nu = 1$ оно следует из определения. Предположим, что оно справедливо для P_ν. Тогда

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_{\nu+1}(t-l) = \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^m P_\nu(s)\, P_1(t-l-s)\, ds =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^m P_\nu(s-l)\, P_1(t-s)\, ds = \int_0^m \Big(\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(s-l) \Big) P_1(t-s)\, ds =$$

$$= \int_0^m P_1(t-s)\, ds = \int_0^m P_1(s)\, ds = 1.$$

Индукционный переход доказан. □

Из леммы 1 следует, что $P_\nu(t) \in [0,1]$ для любого натурального ν и вещественного t.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Периодический сплайн P_ν обладает следующими свойствами:*

1) $P_\nu \in C^{2\nu-2}$;

2) *на каждом отрезке $[k, k+1]$, где k — целое, сплайн P_ν совпадает с некоторым многочленом степени не выше $2\nu - 1$.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $\nu = 1$ свойства выполнены. Предположим, что они выполняются для P_ν. Имеем

$$P_{\nu+1}(t) = \int_0^m P_\nu(s)\, P_1(t-s)\, ds = \int_{t-m/2}^{t+m/2} P_\nu(s)\, P_1(t-s)\, ds =$$
$$= \int_{t-1}^{t} P_\nu(s)\,(1-t+s)\, ds + \int_t^{t+1} P_\nu(s)\,(1+t-s)\, ds.$$

Продифференцируем последнее выражение по t:

$$P'_{\nu+1}(t) = -\int_{t-1}^{t} P_\nu(s)\, ds + \int_t^{t+1} P_\nu(s)\, ds. \tag{5}$$

Дифференцируя ещё один раз, получаем

$$P''_{\nu+1}(t) = P_\nu(t-1) + P_\nu(t+1) - 2P_\nu(t).$$

По индукционному предположению $P_\nu \in C^{2\nu-2}$. Следовательно, $P_{\nu+1} \in C^{2\nu}$. Если t принадлежит отрезку $[k, k+1]$, где k — целое, то $t-1 \in [k-1, k]$, $t+1 \in [k+1, k+2]$, поэтому $P''_{\nu+1}(t)$ совпадает с некоторым многочленом степени не выше $2\nu - 1$. Значит, $P_{\nu+1}$ на этом отрезке является многочленом степени не выше $2\nu + 1$. Предложение доказано. □

ЛЕММА 2. *Для любого натурального ν и вещественных x и y справедливо неравенство*

$$\bigl|P_\nu(x) - P_\nu(y)\bigr| \leqslant |x - y|.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ неравенство, очевидно, выполняется. Пусть $\nu > 1$. Подставляя в формулу (5) величину $\nu - 1$ вместо ν, получаем, что $P'_\nu(t)$ равно разности двух интегралов по промежуткам единичной длины, причём значения подынтегральных выражений принадлежат отрезку $[0,1]$. Поэтому $\bigl|P'_\nu(t)\bigr| \leqslant 1$, из чего следует требуемое неравенство. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого порядка ν найдётся такое A_ν, что*

$$\left|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\tfrac{j}{n})\right| \leqslant \frac{A_\nu}{n} \qquad \text{для всех } j, n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 2. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $\nu = 1$ имеем $\widetilde{Q}_{1,n}(j) = P_1(\frac{j}{n})$, поэтому можно взять $A_1 = 0$.

Пусть (6) выполнено для некоторого ν. По определению имеем

$$\left|\widetilde{Q}_{\nu+1,n}(j) - P_{\nu+1}(\tfrac{j}{n})\right| = \left|\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,\widetilde{Q}_{1,n}(k) - \int_0^m P_\nu(\tfrac{j}{n}-t)\,P_1(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,P_1(\tfrac{k}{n}) - \tfrac{1}{n}\int_0^N P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\,P_1(\tfrac{s}{n})\,ds\right| =$$

$$= \tfrac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,P_1(\tfrac{k}{n}) - \int_k^{k+1} P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\,P_1(\tfrac{s}{n})\,ds\Big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\left|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,P_1(\tfrac{k}{n}) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\,P_1(\tfrac{s}{n})\right| ds =$$

$$= \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\left|\big(\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\big)\,P_1(\tfrac{k}{n}) + P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\big(P_1(\tfrac{k}{n}) - P_1(\tfrac{s}{n})\big)\right| ds.$$

Рассмотрим компоненты последнего подынтегрального выражения. Известно, что $\left|P_1(\frac{k}{n})\right| \leqslant 1$ и $\left|P_\nu(\frac{j-s}{n})\right| \leqslant 1$. Воспользовавшись леммой 2, получим

$$\left|P_1(\tfrac{k}{n}) - P_1(\tfrac{s}{n})\right| \leqslant \left|\tfrac{k}{n} - \tfrac{s}{n}\right| \leqslant \tfrac{1}{n}\,,$$

так как $s \in [k, k+1]$. Применяя индукционное предположение и лемму 2, установим, что

$$\left|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\right| \leqslant \left|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\tfrac{j-k}{n})\right| +$$

$$+ \left|P_\nu(\tfrac{j-k}{n}) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\right| \leqslant \frac{A_\nu}{n} + \left|\frac{s-k}{n}\right| \leqslant \frac{A_\nu + 1}{n}\,.$$

Таким образом,

$$\left|\widetilde{Q}_{\nu+1,n}(j) - P_{\nu+1}(\tfrac{j}{n})\right| \leqslant \frac{1}{n}\,N\,\frac{A_\nu + 2}{n} = \frac{m(A_\nu + 2)}{n}\,.$$

Для доказательства индукционного перехода осталось положить $A_{\nu+1} = m(A_\nu + 2)$. □

3°. Пусть фиксировано натуральное число m, отличное от единицы, и заданы точки интерполяции $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ — дискретные сплайны вида (1), удовлетворяющие интерполяционным условиям (2).

ТЕОРЕМА 1. *Коэффициенты интерполяционных сплайнов сходятся:*

$$\mathbf{c}_n(l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Если положить

$$\mathbf{S}_r(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}(l)\, P_r(t-l), \qquad t \in \mathbb{R},$$

то

$$\left\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r(\tfrac{j}{n})\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{равномерно по } j. \tag{7}$$

Доказательство. Следуя схеме решения интерполяционной задачи [3, с. 21], положим $h_n(l) = \widetilde{Q}_{r,n}(ln)$. Условие (2) запишется в виде $\mathbf{c}_n * h_n = \mathbf{x}$. Переходя в спектральную область, получаем эквивалентную систему уравнений

$$\mathbf{C}_n(k)\, H_n(k) = \mathbf{X}(k), \qquad k \in 0 : m-1,$$

где $\mathbf{C}_n = \mathcal{F}_m(\mathbf{c}_n)$, $H_n = \mathcal{F}_m(h_n)$, $\mathbf{X} = \mathcal{F}_m(\mathbf{x})$. Согласно предложению 2,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(l) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{Q}_{r,n}(ln) = P_r(l).$$

Следовательно, последовательность $H_n(k)$ также сходится:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{m-1} h_n(l)\, \omega_m^{-kl} = \sum_{l=0}^{m-1} P_r(l)\, \omega_m^{-kl}.$$

Положим $H(k) = \lim_{n\to\infty} H_n(k)$.

Покажем, что $H(k) > 0$ для всех k. Из [1] известно явное выражение для $H_n(k)$:

$$H_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ \left(\sin\frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \sum_{l=0}^{n-1} \left(n \sin\frac{\pi(lm+k)}{mn}\right)^{-2r}, & \text{при } k \in 1 : m-1. \end{cases}$$

Ясно, что $H(0) = 1 > 0$. Пусть $k \in 1 : m-1$. Тогда

$$H_n(k) \geqslant \left(\sin\frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \left(n \sin\frac{\pi k}{mn}\right)^{-2r} \geqslant \left(\sin\frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \left(\frac{\pi k}{m}\right)^{-2r}.$$

Таким образом,

$$H(k) \geqslant \left(\sin\frac{\pi k}{m}\right)^{2r}\left(\frac{\pi k}{m}\right)^{-2r} > 0.$$

Итак, $H(k) > 0$ для $k \in 0 : m-1$. Значит, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{C}_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{X}(k)}{H_n(k)} = \frac{\mathbf{X}(k)}{H(k)}\,.$$

Следовательно, сходятся и последовательности $\mathbf{c}_n(l)$. Осталось показать, что выполнено утверждение (7). Имеем

$$\left\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r(\tfrac{j}{n})\right\| = \left\|\sum_{l=0}^{m-1}\left(\mathbf{c}_n(l)\,\widetilde{Q}_{r,n}(j-ln) - \mathbf{c}(l)\,P_r(\tfrac{j}{n}-l)\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{m-1}\left\|\mathbf{c}_n(l)\left(\widetilde{Q}_{r,n}(j-ln) - P_r(\tfrac{j}{n}-l)\right)\right\| + \left\|\left(\mathbf{c}_n(l) - \mathbf{c}(l)\right)P_r(\tfrac{j}{n}-l)\right\|.$$

В силу предложения 2

$$\widetilde{Q}_{r,n}(j-ln) - P_r(\tfrac{j}{n}-l) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{равномерно по } j.$$

Последовательность $\mathbf{c}_n(l)$ сходится, поэтому ограничена. Выражение $\mathbf{c}_n(l) - \mathbf{c}(l)$ стремится к нулю и не зависит от j, а величина $P_r(\frac{j}{n}-l)$ не превосходит единицы. Таким образом, равномерная сходимость (7) доказана. □

Заметим, что из формулы (7) следует, что $\mathbf{S}_{r,n}(ln) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{S}_r(l)$. Значит, сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_r(l) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Кроме того, вектор-функция $\mathbf{S}_r(t)$ периодична с периодом m.

4°. Перейдём к геометрической интерпретации теоремы 1. Рассмотрим дискретный интерполяционный сплайн $\mathbf{S}_{r,n}(j)$. Для наглядности соединим отрезками пары соседних точек $\mathbf{S}_{r,n}(j)$, $\mathbf{S}_{r,n}(j+1)$ для $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную, проходящую через точки $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1)$. При этом между соседними точками интерполяции содержится n отрезков ломаной. При увеличении n количество отрезков ломаной будет увеличиваться, но ломаная по-прежнему будет проходить через точки $\mathbf{x}(l)$. Согласно теореме 1, при неограниченном увеличении n построенные ломаные будут стремиться к кривой, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$.

ПРИМЕР. На рисунках 1–4 штриховыми линиями изображены ломаные, соответствующие дискретным сплайнам, построенным для различных значений n по одному и тому же набору из восьми точек интерполяции. Кроме того, на каждом рисунке сплошной линией показана предельная кривая, задаваемая вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$. Порядок всех сплайнов r равен двум. Точки интерполяции отмечены кружками.

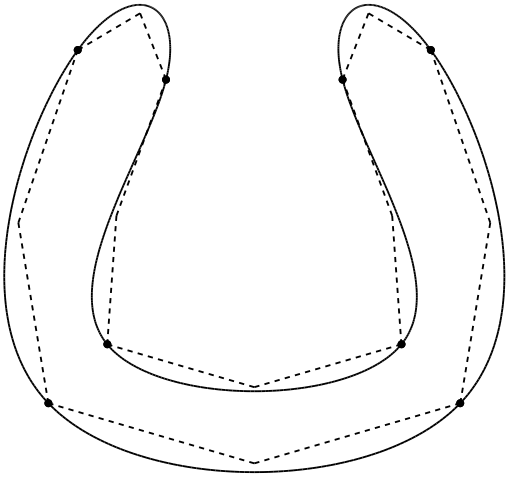


Рис. 1. $n = 2$

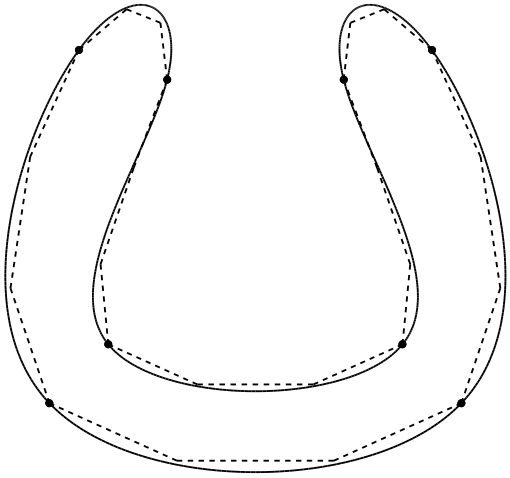


Рис. 2. $n = 3$

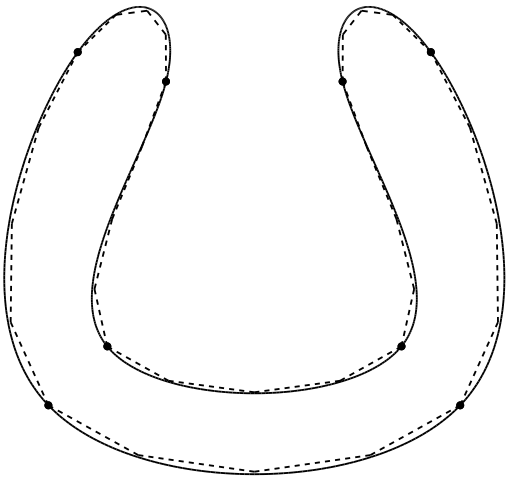


Рис. 3. $n = 4$

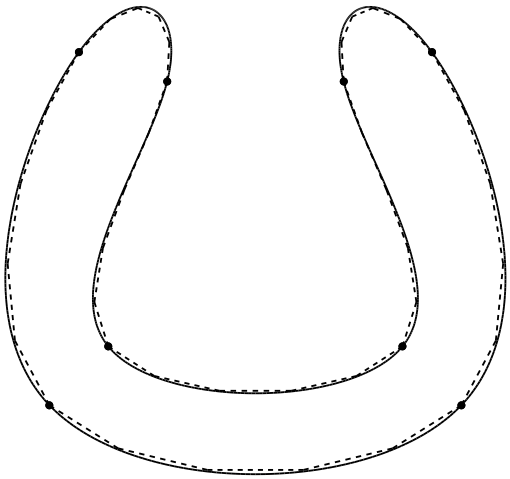


Рис. 4. $n = 5$

5°. Пусть m и r — натуральные числа, $m \geqslant 2$. Обозначим через $\widetilde{W}^r$ пространство m-периодических вектор-функций $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$.

Пусть заданы точки $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(\mathbf{f}) := \int_0^m \left\|\mathbf{f}^{(r)}(t)\right\|^2 dt \to \min, \\ &\mathbf{f}(l) = \mathbf{x}(l), \quad l \in 0 : m-1, \\ &\mathbf{f} \in \widetilde{W}^r. \end{aligned} \tag{8}$$

Из предложения 1 следует, что интерполяционный сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}^r$.

ТЕОРЕМА 2. *Интерполяционный сплайн* $\mathbf{S}_r(t)$ *является единственным решением задачи* (8).

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (8). Положим $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{S}_r$. Ясно, что $\mathbf{h}(l) = 0$ при $l \in 0 : m-1$ и $\mathbf{h} \in \widetilde{W}^r$. Пусть $\mathbf{h}(t) = \big(h_1(t), \ldots, h_d(t)\big)$, $\mathbf{S}_r(t) = \big(\sigma_1(t), \ldots, \sigma_d(t)\big)$. Имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{h} + \mathbf{S}_r) = \int_0^m \Big(\left\|\mathbf{h}^{(r)}(t)\right\|^2 + 2\left\langle \mathbf{h}^{(r)}(t), \mathbf{S}_r^{(r)}(t)\right\rangle + \left\|\mathbf{S}_r^{(r)}(t)\right\|^2 \Big) dt =$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r) + 2\sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r)}(t)\, dt.$$

Зафиксируем $\alpha \in 1 : d$. Интегрируя по частям, получаем

$$L(h_\alpha, \sigma_\alpha) := \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r)}(t)\, dt = h_\alpha^{(r-1)}(m)\, \sigma_\alpha^{(r)}(m) - h_\alpha^{(r-1)}(0)\, \sigma_\alpha^{(r)}(0) -$$

$$- \int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r+1)}(t)\, dt = - \int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r+1)}(t)\, dt.$$

Проведя интегрирование по частям ещё $r-2$ раза, придём к равенству

$$L(h_\alpha, \sigma_\alpha) = (-1)^{r-1} \int_0^m h'_\alpha(t)\, \sigma_\alpha^{(2r-1)}(t)\, dt.$$

В силу предложения 1 функция $\sigma_\alpha^{(2r-1)}(t)$ постоянна на каждом интервале вида $(k, k+1)$, где k — целое. Поэтому

$$L(h_\alpha, \sigma_\alpha) = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} h'_\alpha(t)\, \sigma_\alpha^{(2r-1)}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \big(h_\alpha(k+1) - h_\alpha(k)\big)\, \sigma_\alpha^{(2r-1)}(k+0)\, dt = 0.$$

Итак, $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$. Следовательно, $\mathbf{F}(\mathbf{f}) \geqslant \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, поэтому $\mathbf{S}_r$ является решением задачи (8).

Проверим единственность решения. Если $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, то $\mathbf{F}(\mathbf{h}) = 0$. Значит, $\mathbf{h}^{(r)}(t) = 0$ почти везде на отрезке $[0, m]$. Тогда вектор-функция $\mathbf{h}^{(r-1)}$ постоянна на $[0, m]$, а в силу m-периодичности — и на всей вещественной оси. Следовательно, $\mathbf{h}(t)$ — многочлен с векторными коэффициентами. Но единственный периодический многочлен — постоянная функция, что вместе с условием $\mathbf{h}(0) = 0$ приводит к тождеству $\mathbf{h}(t) \equiv 0$. Таким образом, имеем $\mathbf{f} = \mathbf{S}_r$, что доказывает единственность решения (8). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0904`).

2. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. №8. С. 1235–1246.

3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

В. Н. Малозёмов

5 сентября 2009 г.

Цель данного доклада — показать, следуя [1], как на основе гармонического анализа проверяется иррациональность числа π. Попутно обсуждаются более простые факты об иррациональных числах.

1°. Положительное число a называется *рациональным*, если его можно представить в виде $a = \frac{m}{n}$, где m, n — взаимно простые натуральные числа. Остальные вещественные числа называются *иррациональными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Число $\sqrt{p}$, где p — простое, является иррациональным.*

Доказательство. Допустим, вопреки утверждению, что $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, где m, n — взаимно простые натуральные числа. Тогда $pn^2 = m^2$. Отсюда следует, что m^2 делится на p и, в силу простоты p, m делится на p. Имеем $m = kp$ и $pn^2 = k^2p^2$, так что $n^2 = pk^2$. Отсюда следует, что n делится на p. Получили, что m и n делятся на p. Но это противоречит взаимной простоте m и n. $\square$

В частности, иррациональными являются числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, что известно с древних времён. Менее известным является факт существования пары иррациональных чисел α, β, таких, что α^β — рациональное число. Приведём соответствующий пример (см. [2, с. 45]).

Пусть $a = \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$. Возможны два случая:

1) a — рациональное число,

2) a — иррациональное число.

В первом случае требуемая пара иррациональных чисел найдена ($\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2}$). Во втором случае следует положить $\alpha = a$, $\beta = \sqrt{2}$. Получим

$$\alpha^\beta = \left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3.$$

2°. Для доказательства иррациональности числа α можно использовать общий приём, который заключается в следующем.

Предполагается, что α — рациональное число. После этого формируется выражение A, зависящее от α, относительно которого устанавливается, что

1) справедливы неравенства $0 < A < 1$;

2) A принимает целое значение.

Данные факты противоречивы. Значит, α — иррациональное число.

Приведём пример (см. [3, с. 94]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Число e — иррациональное.*

Доказательство. По определению

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\,.$$

Обозначим $s_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{1}{i!}$. Тогда

$$0 < e - s_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^i} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{k+2}} = \frac{k+2}{(k+1)!\,(k+1)}\,.$$

Отметим, что $(k+1)^2 > k^2 + 2k = k\,(k+2)$, поэтому

$$0 < e - s_k < \frac{1}{k!\,k}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{1}$$

При $k = 1$ получаем $0 < e - 2 < 1$, так что $2 < e < 3$.

Допустим, что e — рациональное число, т.е. $e = \frac{m}{n}$. Положим

$$A = n!\,(e - s_n).$$

Подставив в (1) $k = n$, придём к неравенствам

$$0 < A < \frac{1}{n} \leqslant 1. \tag{2}$$

Вместе с тем,

$$A = n!\,\frac{m}{n} - n!\,s_n = (n-1)!\,m - \Big(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!}\Big).$$

Видим, что A — целое число. Это противоречит (2). □

3°. Переходим к основному утверждению (см. [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Число π является иррациональным.*

Доказательство начнём издалека.

ЛЕММА. *Если $P(x)$ — алгебраический полином степени $2k$, то*

$$\int_0^1 P(x)\,\sin\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\,\big[Q(0)+Q(1)\big],$$

где

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}}\,P^{(2i)}(x).$$

Доказательство леммы. Приняв во внимание, что $P^{(2k+2)}(x)\equiv 0$, запишем

$$Q''(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}}\,P^{(2i+2)}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{\pi^{2i-2}}\,P^{(2i)}(x).$$

Далее

$$\pi^2\,Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i-2}}\,P^{(2i)}(x).$$

Значит,

$$Q''(x) + \pi^2\,Q(x) = \pi^2\,P(x).$$

Имеем

$$\frac{d}{dx}\,\big[Q'(x)\,\sin\pi x - \pi\,Q(x)\,\cos\pi x\big] = \big(Q''(x)+\pi^2\,Q(x)\big)\,\sin\pi x =$$

$$= \pi^2\,P(x)\,\sin\pi x.$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^1 P(x)\,\sin\pi x\,dx = \tfrac{1}{\pi^2}\,\big(Q'(x)\,\sin\pi x - \pi\,Q(x)\,\cos\pi x\big)\Big|_0^1 =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\,\big[Q(0)+Q(1)\big].$$

Лемма доказана. □

Обратимся к доказательству предложения 3. Допустим, что π — рациональное число. В этом случае $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Последовательность $\left\{\frac{\pi\, m^k}{k!}\right\}$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Выберем k столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\pi\, m^k}{k!} < 1. \tag{3}$$

Введём полином $P(x)$ степени $2k$:

$$P(x) = \frac{x^k\,(1-x)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{k} C_k^s\,(-1)^s\,x^{k+s}.$$

Ясно, что $P^{(i)}(0) = 0$ при $i \in 0 : k-1$ и

$$P^{(k+i)}(0) = C_k^i\,(-1)^i\,\frac{(k+i)!}{k!} \quad \text{при} \quad i \in 0 : k.$$

Учитывая, что $P(1-x) \equiv P(x)$, имеем также

$$P^{(i)}(1) = (-1)^i\,P^{(i)}(0), \qquad i \in 0 : 2k.$$

Полином

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}}\,P^{(2i)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i\,n^i}{m^i}\,P^{(2i)}(x)$$

обладает тем свойством, что $m^k\,[Q(0)+Q(1)]$ — целое число.

Положим

$$A = \pi\, m^k \int_0^1 P(x)\,\sin \pi x\,dx.$$

Согласно лемме

$$A = m^k\,\big[Q(0)+Q(1)\big],$$

так что A — целое число. Вместе с тем, согласно (3)

$$0 < A \leqslant \pi\, m^k \int_0^1 P(x)\,dx \leqslant \frac{\pi\, m^k}{k!} < 1.$$

Получили противоречие. Иррациональность π установлена. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips G. *The irrationality of π and e* // Alabama J. Math. 1981. Vol. 5. No. 1. P. 27–30.

2. Белая Н. А., Петров Н. Н. *Книга для чтения по высшей математике.* СПб.: Изд-во СПб ун-та экономики и финансов, 2007. 213 с.

3. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Том 1. Изд. 8-е. М.: Физматлит, 2007. 680 с.

ЦИКЛИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ФРЕЙМА МЕРСЕДЕС–БЕНЦ

В. Н. Малозёмов Н. А. Соловьёва

12 сентября 2009 г.

1°. Следуя [1], рассмотрим *матрицу Мерседес–Бенц* B_n порядка $n\times(n+1)$. Она определяется рекуррентно:

$$B_1 = [-1, 1];$$
$$B_k = \begin{bmatrix} & 0 \\ \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\, B_{k-1} & \vdots \\ & 0 \\ -\frac{1}{k}, \ldots, -\frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix}, \qquad k = 2, \ldots, n. \tag{1}$$

В частности,

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Для матрицы Мерседес–Бенц B_n справедливо равенство

$$B_n\, B_n^T = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) I_n\,, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Столбцы $b_1^n, \ldots, b_n^n, b_{n+1}^n$ матрицы B_n образуют *фрейм Мерседес–Бенц*. Векторы b_j^n — единичные и обладают следующими свойствами

$$\sum_{j=1}^{n+1} b_j^n = \mathbb{O}; \qquad \langle b_i^n, b_j^n \rangle = -\tfrac{1}{n} \quad \text{при } i \neq j. \tag{3}$$

Введём квадратную матрицу P_n порядка n с помощью рекуррентного соотношения

$$P_1 = [-1];$$
$$P_k = \begin{bmatrix} p_1^{k-1}, & \ldots, & p_{k-2}^{k-1}, & \frac{1}{k}\, p_{k-1}^{k-1}, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\, p_{k-1}^{k-1} \\ 0\,, & \ldots, & 0\,, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\,, & -\frac{1}{k} \end{bmatrix}, \quad k = 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где p_j^{k-1} — j-й столбец матрицы P_{k-1}. В частности,

$$P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad P_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы формулы*

$$P_n\, b_j^n = b_{j+1}^n\,, \quad j \in 1:n; \qquad P_n\, b_{n+1}^n = b_1^n. \tag{5}$$

Именно это имеется в виду под циклическим свойством фрейма Мерседес–Бенц.

2°. При $n = 1$ теорема очевидна. Общий случай $n \geqslant 2$ требует некоторой подготовки.

Обозначим через U_n и V_n квадратные матрицы порядка n, состоящие из столбцов $b_1^n, \ldots, b_n^n$ и $b_2^n, \ldots, b_{n+1}^n$ соответственно. Тогда первое равенство в (5) можно переписать в виде

$$P_n\, U_n = V_n\,. \tag{6}$$

ЛЕММА. *При $n \geqslant 2$ матрица U_n обратима, причём*

$$U_n^{-1} = \begin{bmatrix} & -1 \\ \frac{n-1}{\sqrt{n^2-1}}\, B_{n-1}^T & \vdots \\ & -1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Доказательство. Согласно (1)

$$U_n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, B_{n-1} \\ -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$D_n := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, B_{n-1} \\ -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & -1 \\ \frac{n-1}{\sqrt{n^2-1}}\, B_{n-1}^T & \vdots \\ & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n}\, B_{n-1} B_{n-1}^T & h \\ g^T & 1 \end{bmatrix},$$

где g и h — вектор-столбцы порядка $n-1$. По свойству (2)

$$\tfrac{n-1}{n}\, B_{n-1}\, B_{n-1}^T = I_{n-1}\,.$$

По свойству (3)

$$h = -\tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j^{n-1} = \mathbb{O}\,,$$

$$g = -\tfrac{n-1}{n\sqrt{n^2-1}} \sum_{j=1}^{n} b_j^{n-1} = \mathbb{O}\,.$$

Значит, $D_n = I_n$, что равносильно (7). $\square$

На основании (6) и леммы получаем явное представление для матрицы P_n:

$$P_n = V_n\, U_n^{-1}. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$P_n\, b_{n+1}^n = V_n\, U_n^{-1}\, b_{n+1}^n = -\sum_{j=2}^{n+1} b_j^n = b_1^n\,. \tag{9}$$

Осталось проверить, что матрица P_n, определяемая формулой (8), удовлетворяет рекуррентному соотношению (4) при $k = n$.

При $n = 2$ это проверяется непосредственно. В дальнейшем будем считать, что $n \geqslant 3$.

3°. Согласно (9) и (1)

$$p_n^n = b_1^n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, b_1^{n-1} \\ -\frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, p_{n-1}^{n-1} \\ -\frac{1}{n} \end{bmatrix},$$

что соответствует равенству последних столбцов в (4) (при $k = n$).

Разберёмся с предпоследними столбцами. Имеем

$$p_{n-1}^n = \tfrac{n-1}{\sqrt{n^2-1}} \Big(-\tfrac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} b_j^n + b_{n+1}^n \Big) = \tfrac{n-1}{\sqrt{n^2-1}} \Big(\tfrac{1}{n-1} \big(b_1^n + b_{n+1}^n\big) + b_{n+1}^n \Big) =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \big(b_1^n + n\, b_{n+1}^n\big) = \tfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, b_1^{n-1} \\ -\frac{1}{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\, p_{n-1}^{n-1} \\ \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \end{bmatrix},$$

что соответствует равенству предпоследних столбцов в (4).

Рассмотрим столбцы с индексами $k \in 1 : n-2$. На основании (8) и (1) запишем

$$p_k^n = \tfrac{n-1}{\sqrt{n^2-1}} \sum_{j=1}^{n} b_{j+1}^n\, b_j^{n-1}(k) = \tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k) \begin{bmatrix} b_{j+1}^{n-1} \\ -\frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Мы воспользовались тем, что $b_n^{n-1}(k) = 0$ при $k \in 1 : n-2$. Имеем

$$p_k^n(n) = -\tfrac{n-1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k) = \tfrac{n-1}{n^2}\, b_n^{n-1}(k) = 0.$$

Обозначим

$$g_k^{n-1} = \tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k)\, b_{j+1}^{n-1}\,. \tag{10}$$

Тогда

$$p_k^n = \begin{bmatrix} g_k^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k \in 1:n-2.$$

Покажем, что $g_k^{n-1} = p_k^{n-1}$. Этим завершится доказательство теоремы.

В силу (5) и (2)

$$b_{j+1}^{n-1} = P_{n-1}\, b_j^{n-1}\,; \quad j \in 1:n-1; \tag{11}$$

$$\tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j^{n-1}\, b_j^{n-1}(k) = e_k^{n-1}\,,$$

где e_k^{n-1} — k-й орт в $\mathbb{R}^{n-1}$. В последней сумме слагаемое, соответствующее $j = n$, при всех $k \in 1:n-2$ равно нулю, поэтому

$$\tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k)\, b_j^{n-1} = e_k^{n-1}\,, \qquad k \in 1:n-2. \tag{12}$$

На основании (10), (11) и (12) при $k \in 1:n-2$ получаем

$$g_k^{n-1} = \tfrac{n-1}{n}\, P_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k)\, b_j^{n-1} = P_{n-1}\, e_k^{n-1} = p_k^{n-1}\,.$$

Теорема доказана. □

4°. Выясним свойства матрицы P_n при $n \geqslant 2$.

ТЕОРЕМА 2. *Матрица P_n — ортогональная. Её собственными числами являются $\omega_{n+1}^1, \omega_{n+1}^2, \ldots, \omega_{n+1}^n$, где $\omega_{n+1} = \exp(\frac{2\pi i}{n+1})$.*

Доказательство. Ортогональность матрицы P_2 проверяется непосредственно. Предположим, что матрица P_{n-1} ортогональна, то есть

$$\langle p_k^{n-1}, p_s^{n-1} \rangle = \delta_{ks}\,, \qquad k, s \in 1:n-1,$$

где $\delta_{ks} = 1$ при $k = s$ и $\delta_{ks} = 0$ при $k \neq s$. Легко проверить, опираясь на рекуррентное соотношение (4) при $k = n$, что

$$\langle p_k^n, p_s^n \rangle = \delta_{ks}\,, \qquad k, s \in 1:n.$$

Значит, матрица P_n также ортогональна.

Система векторов $b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n$ в силу (2) является жёстким фреймом. Если учесть, что $b_j^n = P_n^{j-1} b_1^n$ при $j = 2, \ldots, n+1$, где P_n — ортогональная матрица, то, как показано в [2], существует число c, $|c| = 1$, такое, что $P_n^{n+1} = cI_n$; при этом собственные числа матрицы P_n суть попарно различные корни степени $n+1$ из c. Согласно (5) справедливо равенство $P_n b_{n+1}^n = b_1^n$ или $P_n^{n+1} b_1^n = b_1^n$ или $cb_1^n = b_1^n$. Отсюда следует, что $c = 1$. Таким образом, собственными числами матрицы P_n являются n попарно различных чисел из множества $\{1, \omega_{n+1}, \omega_{n+1}^2, \ldots, \omega_{n+1}^n\}$. Осталось проверить, что число $\lambda = 1$ не будет собственным числом для матрицы P_n.

При $n = 2$ это устанавливается непосредственно. Предположение о том, что $\lambda = 1$ не есть собственное число матрицы P_{n-1} означает, что столбцы матрицы $P_{n-1} - I_{n-1}$ линейно независимы. Покажем, что столбцы матрицы $P_n - I_n$ также линейно независимы. Этим завершится доказательство теоремы.

Составим линейную комбинацию столбцов матрицы $P_n - I_n$ и приравняем её нулю. Согласно (4) запишем

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n-2} c_k \big(p_k^{n-1} - e_k^{n-1}\big) + c_{n-1}\big(\tfrac{1}{n}\, p_{n-1}^{n-1} - e_{n-1}^{n-1}\big) + c_n\, \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, p_{n-1}^{n-1} = \mathbb{O}, \\ c_{n-1}\, \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} - c_n\big(1 + \tfrac{1}{n}\big) = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Предположим, что $c_n \neq 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $c_n = 1$. Тогда $c_{n-1} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$. Подставим эти значения в первую группу уравнений системы (13). Учитывая, что

$$\tfrac{1}{n}\sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}} + \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \tfrac{\sqrt{n+1}}{n}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-1}\Big) = \sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}}\,,$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{n-2} c_k \big(p_k^{n-1} - e_k^{n-1}\big) + \sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}}\big(p_{n-1}^{n-1} - e_{n-1}^{n-1}\big) = \mathbb{O}.$$

Но это противоречит линейной независимости столбцов матрицы $P_{n-1} - I_{n-1}$. Значит, $c_n = 0$. Тогда и $c_{n-1} = 0$. Остаётся

$$\sum_{k=1}^{n-2} c_k \big(p_k^{n-1} - e_k^{n-1}\big) = \mathbb{O}.$$

Из линейной независимости столбцов матрицы $P_{n-1} - I_{n-1}$ следует, что $c_1 = \cdots = c_{n-2} = 0$. Установлено, что столбцы матрицы $P_n - I_n$ линейно независимы. Теорема доказана. $\square$

5°. К вопросу о циклическом свойстве фрейма Мерседес–Бенц можно подойти иначе. В силу (3) и нормированности векторов b_j^n справедливо соотношение

$$\langle b_i^n, b_j^n \rangle = \langle b_{i+1}^n, b_{j+1}^n \rangle, \qquad i, j \in 1 : n+1,$$

где $b_{n+2}^n = b_1^n$. В этом случае, как показано в [3], существует ортогональная матрица P_n, такая, что $b_j^n = P_n^{j-1} b_1^n$, $j \in 2 : n+1$; при этом собственные числа матрицы P_n суть попарно различные корни степени $n+1$ из единицы. Согласно (8) матрица P_n определяется единственным образом.

В подходе, принятом в статье, указывается исключительно простое рекуррентное соотношение для матрицы P_n, которое, в частности, позволяет установить, что число $\lambda = 1$ не является собственным для P_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. 2009. Вып. 39. С. 3–25.

2. Соловьёва Н. А. *Обобщённые гармонические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 апреля 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml\#0416`).

3. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml\#0121`).

ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ЭРМИТОВОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Н. В. Чашников

19 сентября 2009 г.

В [1] был предложен способ построения mn-периодических вектор-функций целочисленного аргумента, принимающих заданные значения в m равноостоящих точках и имеющих в этих точках заданные приращения. Зафиксируем число m, точки интерполяции и направления векторов приращений. Целью данного доклада является нахождение предела множества значений интерполяционных вектор-функций при неограниченном увеличении n.

1°. Уточним постановку задачи. Пусть N — натуральное, а ν — целое неотрицательное число. Дискретной периодической функцией Бернулли порядка ν называется сигнал

$$b_{\nu,N}(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-\nu}\,\omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Параметр N включен в обозначение, так как он будет изменяться.

Зафиксируем натуральные числа r и m, $m \geqslant 2$. Для натурального n, отличного от единицы, положим $N = mn$ и обозначим через $\mathbf{D}_{r,n}$ пространство вектор-функций вида

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_1(p)\,b_{2r,N}(j - pn + r) + \sum_{p=0}^{m-1}\mathbf{c}_2(p)\,b_{2r,N}(j - pn + r - 1), \qquad (1)$$

где $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1(p), \mathbf{c}_2(p) \in \mathbb{R}^d$ — коэффициенты, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1}\big(\mathbf{c}_1(p) + \mathbf{c}_2(p)\big) = 0.$$

Пусть заданы наборы векторов $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1)$ и $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1)$ из пространства $\mathbb{R}^d$. В [1] показано, что найдётся вектор-функция $\mathbf{S}_{r,n} \in D_{r,n}$, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{r,n}(ln) &= \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta \mathbf{S}_{r,n}(ln) &= \frac{\mathbf{y}(l)}{n}, \qquad l \in 0 : m-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Цель данного доклада состоит в нахождения предела множества точек $\left\{\mathbf{S}_{r,n}(j) \,|\, j \in \mathbb{Z}\right\}$ при неограниченном увеличении n. Начнём с изучения поведения дискретных функций Бернулли $b_{\nu,N}$ при стремлении N к бесконечности.

2°. Согласно [2], для дискретных функции Бернулли справедливы соотношения

$$\Delta b_{\nu+1,N}(j) = b_{\nu,N}(j), \qquad \nu \in \mathbb{Z}_+,\ N \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_{\nu,N}(j) = 0, \qquad \nu \in \mathbb{Z}_+,\ N \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Исходя из этих равенств, выведем рекуррентную формулу для функций Бернулли. Последовательно применяя тождество (3), получаем

$$\begin{aligned} b_{\nu+1,N}(j) = b_{\nu+1,N}(j-1) + b_{\nu,N}(j-1) = b_{\nu+1,N}(j-2) + b_{\nu,N}(j-2) + \\ + b_{\nu,N}(j-1) = \ldots = b_{\nu+1,N}(0) + \sum_{k=0}^{j-1} b_{\nu,N}(k). \end{aligned}$$

Чтобы найти значение $b_{\nu+1,N}(0)$, воспользуемся равенством (4):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{N-1} b_{\nu+1,N}(j) = N\, b_{\nu+1,N}(0) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{j-1} b_{\nu,N}(k) = \\ &= N\, b_{\nu+1,N}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)\, b_{\nu,N}(k) = N\, b_{\nu+1,N}(0) - \sum_{k=0}^{N-1} k\, b_{\nu,N}(k). \end{aligned}$$

Итак,

$$b_{\nu+1,N}(j) = \sum_{k=0}^{j-1} b_{\nu,N}(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k\, b_{\nu,N}(k). \tag{5}$$

Из [2] известно, что $b_{0,N}(j) = \delta_N(j) - \frac{1}{N}$. Следовательно, по формуле (5) получим

$$b_{1,N}(j) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2N}, & \text{при } j = 0, \\ \frac{N-1}{2N} - \frac{j}{N}, & \text{при } j \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{6}$$

Определим последовательность функций $\beta_\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, периодических с периодом 1. Функцию $\beta_1(t)$ на основном периоде зададим формулой

$$\beta_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{при } t = 0, \\ \frac{1}{2} - t, & \text{при } t \in (0, 1]. \end{cases} \tag{7}$$

Остальные функции $\beta_\nu(t)$ на основном периоде определим при помощи рекуррентного соотношения

$$\beta_{\nu+1}(t) = \int_0^t \beta_\nu(\tau)\, d\tau + \int_0^1 \tau\, \beta_\nu(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [0, 1]. \tag{8}$$

Рекуррентная формула для многочленов Бернулли $B_\nu(t)$ (см. [3, с. 13]) выглядит схожим образом. Нетрудно проверить, что для $\nu \geqslant 2$ выполняется равенство

$$\beta_\nu(t) = -\frac{1}{\nu!}\, B_\nu(t), \qquad t \in [0, 1].$$

Обозначим через $\widetilde{C}^k$ пространство периодических с периодом 1 функций, имеющих непрерывную производную порядка k.

ЛЕММА 1. *Справедливы соотношения*

$$\beta'_{\nu+1}(t) = \beta_\nu(t), \qquad \nu \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$\int_0^1 \beta_\nu(t)\, dt = 0, \qquad \nu \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$\beta_\nu \in \widetilde{C}^{\nu-2}, \qquad \nu \geqslant 2.$$

Доказательство. Тождество (9) очевидным образом следует из формулы (8). Докажем равенство (10) по индукции. База индукции для $\nu = 1$ проверяется непосредственно. Проведём индукционный переход от ν к $\nu + 1$. По формуле (8)

$$\int_0^1 \beta_{\nu+1}(t)\, dt = \int_0^1 \left(\int_0^t \beta_\nu(\tau)\, d\tau \right) dt + \int_0^1 \tau\, \beta_\nu(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_\tau^1 \beta_\nu(\tau)\, dt \right) d\tau + \int_0^1 \tau\, \beta_\nu(\tau)\, d\tau = \int_0^1 \beta_\nu(\tau)\, d\tau = 0.$$

Равенство (10) доказано.

Рассмотрим функцию $\beta_2(t)$. Согласно формуле (8), имеем

$$\beta_2(t) = \int_0^t \beta_1(\tau)\, d\tau + \int_0^1 \tau\, \beta_1(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [0, 1].$$

Ясно, что $\beta_2(t) \in C\big([0,1]\big)$. Кроме того,

$$\beta_2(1) = \int_0^1 \beta_1(\tau)\,d\tau + \int_0^1 \tau\,\beta_1(\tau)\,d\tau = \int_0^1 \tau\,\beta_1(\tau)\,d\tau = \beta_2(0).$$

Таким образом, функция $\beta_2(t)$ непрерывна на всей вещественной оси. Воспользовавшись доказанным тождеством (9), получим, что $\beta_\nu \in \widetilde{C}^{\nu-2}$ при $\nu \geqslant 2$. Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *Для всех натуральных ν справедливы неравенства*

$$\big|\beta_\nu(t)\big| \leqslant \tfrac{1}{2}\,, \qquad t \in [0,1], \tag{11}$$

$$\big|\beta_\nu(x) - \beta_\nu(y)\big| \leqslant |x-y|, \qquad x, y \in [0,1]. \tag{12}$$

Доказательство. Проведём доказательство по индукции. База индукции для $\nu = 1$ очевидна. Пусть неравенства (11) и (12) выполняются для β_ν. Тогда для любых $x, y \in [0,1]$ имеем

$$\big|\beta_{\nu+1}(x) - \beta_{\nu+1}(y)\big| = \left|\int_x^y \beta_\nu(t)\,dt\right| \leqslant \tfrac{1}{2}|x-y|, \tag{13}$$

то есть неравенство (12) для $\beta_{\nu+1}$ выполнено. Положим

$$a = \max_{t\in[0,1]} \beta_{\nu+1}(t), \qquad b = \min_{t\in[0,1]} \beta_{\nu+1}(t).$$

Тогда

$$a \geqslant \int_0^1 \beta_{\nu+1}(t)\,dt \geqslant b,$$

то есть, в силу (10), $a \geqslant 0 \geqslant b$. Кроме того, из доказанного неравенства (13) следует, что $a - b \leqslant \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$a \leqslant b + \tfrac{1}{2} \leqslant \tfrac{1}{2}\,, \qquad b \geqslant a - \tfrac{1}{2} \geqslant -\tfrac{1}{2}\,,$$

что и требовалось. □

Введём обозначение

$$\tilde{b}_{\nu,N}(j) := \frac{b_{\nu,N}(j)}{N^{\nu-1}}\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого натурального ν найдётся A_ν такое, что*

$$\left|\tilde{b}_{\nu,N}(j) - \beta_\nu\big(\tfrac{j}{N}\big)\right| \leqslant \frac{A_\nu}{N}\,, \qquad N \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Замечание. Предложение допускает эквивалентную формулировку: для любого натурального ν найдётся A_ν такое, что

$$\left|\tilde{b}_{\nu,N}\big(\lfloor tN\rfloor\big)-\beta_\nu(t)\right|\leqslant\frac{A_\nu}{N}\,,\qquad N\in\mathbb{N},\quad t\in\mathbb{R}.$$

При такой форме записи проясняется смысл предложения, но для доказательства и дальнейшего использования удобнее иметь дело с первоначальной формулировкой.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $\nu=1$ имеем

$$\left|\tilde{b}_{1,N}(j)-\beta_1\big(\tfrac{j}{N}\big)\right|\equiv\frac{1}{2N}\,,$$

поэтому можно положить $A_1=\frac{1}{2}$. Пусть (14) выполнено для некоторого ν. Применяя формулы (5) и (8), получим

$$\begin{aligned}\left|\tilde{b}_{\nu+1,N}(j)-\beta_{\nu+1}\big(\tfrac{j}{N}\big)\right|\leqslant&\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\int_0^{j/N}\beta_\nu(t)\,dt\right|+\\&+\left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\int_0^1 t\,\beta_\nu(t)\,dt\right|.\end{aligned}\tag{15}$$

Оценим слагаемые в правой части по отдельности. Для первого слагаемого имеем

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\int_0^{j/N}\beta_\nu(t)\,dt\right|=\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\frac{1}{N}\int_0^{j}\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\,dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{j-1}\int_k^{k+1}\Big[\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\Big]dt\right|\leqslant\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{j-1}\int_k^{k+1}\left|\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\right|dt.$$

Из индукционного предположения и леммы 2 следует, что

$$\left|\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\right|\leqslant\left|\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\beta_\nu\big(\tfrac{k}{N}\big)\right|+\left|\beta_\nu\big(\tfrac{k}{N}\big)-\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\right|\leqslant\frac{A_\nu}{N}+\frac{1}{N}\,.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\int_0^{j/N}\beta_\nu(t)\,dt\right|\leqslant\frac{A_\nu+1}{N}\,.$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (15):

$$\left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\int_0^1 t\,\beta_\nu(t)\,dt\right|=\left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}k\,\tilde{b}_{\nu,N}(k)-\frac{1}{N^2}\int_0^{N}t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\,dt\right|=$$

$$= \frac{1}{N^2}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\Big[k\,\tilde b_{\nu,N}(k) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\Big]dt\right| \leqslant \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\left|k\,\tilde b_{\nu,N}(k) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\right|dt.$$

Для подынтегрального выражения справедливо неравенство

$$\left|k\,\tilde b_{\nu,N}(k) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\right| \leqslant \left|k\,\tilde b_{\nu,N}(k) - k\,\beta_\nu\big(\tfrac{k}{N}\big)\right| +$$
$$+\left|k\,\beta_\nu\big(\tfrac{k}{N}\big) - k\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\right| + \left|k\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big) - t\,\beta_\nu\big(\tfrac{t}{N}\big)\right|.$$

Первое слагаемое в правой части, согласно индукционному предположению, меньше $\frac{kA_\nu}{N}$. По лемме 2 второе слагаемое не превосходит $\frac{k}{N}$, а третье не больше $\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\left|\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}k\,\tilde b_{\nu,N}(k) - \int_0^1 t\,\beta_\nu(t)\,dt\right| \leqslant \frac{A_\nu+2}{N}\,.$$

Значит,

$$\left|\tilde b_{\nu+1,N}(j) - \beta_{\nu+1}\big(\tfrac{j}{N}\big)\right| \leqslant \frac{2A_\nu+3}{N}\,.$$

Осталось положить $A_{\nu+1} = 2A_\nu + 3$. Индукционный переход доказан. □

3°. Пусть фиксированы натуральные числа r и m, отличные от единицы. Определим функцию $e_{\alpha,n}$ для $\alpha \in \{0,1,2\}$ по формуле

$$e_{\alpha,n}(l) := \tilde b_{2r-\alpha,N}(l\,n + r - 1), \qquad l \in \mathbb{Z},$$

где $N = mn$. Ясно, что функция $e_{\alpha,n}(l)$ имеет период m. Положим $E_{\alpha,n} = \mathcal{F}_m(e_{\alpha,n})$.

ЛЕММА 3. *Для $\alpha \in \{0,1,2\}$ и $l \in 0:m-1$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} E_{\alpha,n}(l) =: E_\alpha(l).$$

Доказательство. Положим

$$e_\alpha(l) = \beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{l}{m}\big), \qquad l \in 0:m-1.$$

Имеем

$$|e_{\alpha,n}(l) - e_\alpha(l)| \leqslant \left|\tilde b_{2r-\alpha,N}(l\,n+r-1) - \beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{ln+r-1}{N}\big)\right| +$$
$$+\left|\beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{ln+r-1}{N}\big) - \beta_{2r-\alpha}\big(\tfrac{l}{m}\big)\right|.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю согласно предложению 1, а второе — в силу непрерывности функции $\beta_{2r-\alpha}$. Таким образом,

$$e_\alpha(l) = \lim_{n\to\infty} e_{\alpha,n}(l).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} E_{\alpha,n}(l) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{m-1} e_{\alpha,n}(p)\,\omega_m^{-pl} = \sum_{p=0}^{m-1} e_\alpha(p)\,\omega_m^{-pl}.$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 4. *Справедливы соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} E_{2,n}(0) \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l)\right] \neq 0, \qquad l \in 1:m-1.$$

Доказательство. В докладе [1] исследовались дискретные преобразования Фурье $T_{\alpha,n} = \mathcal{F}_m(t_{\alpha,n})$ сигналов

$$t_{\alpha,n}(l) = b_{2r,N}(ln + r + \alpha), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Были получены формулы

$$T_{1,n}(0) + T_{-1,n}(0) - 2\,T_{0,n}(0) = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{2\cos\frac{2\pi q}{n} - 2}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r}},$$

$$T_{0,n}(l)^2 - T_{1,n}(l)\,T_{-1,n}(l) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \frac{1-\omega_n^{p-q}}{\left(4\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\,\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}}.$$

Воспользовавшись тождеством (3), выразим $e_{0,n}$, $e_{1,n}$ и $e_{2,n}$ через функции $t_{\alpha,n}$:

$$e_{0,n}(l) = \frac{t_{-1,n}(l)}{N^{2r-1}},$$

$$e_{1,n}(l) = \frac{\Delta\,t_{-1,n}(l)}{N^{2r-2}} = \frac{t_{0,n}(l) - t_{-1,n}(l)}{N^{2r-2}},$$

$$e_{2,n}(l) = \frac{\Delta^2\,t_{-1,n}(l)}{N^{2r-3}} = \frac{t_{1,n}(l) - 2\,t_{0,n}(l) + t_{-1,n}(l)}{N^{2r-3}}.$$

В силу линейнсти дискретного преобразования Фурье имеем

$$E_{0,n}(l) = \frac{T_{-1,n}(l)}{N^{2r-1}}\,,$$

$$E_{1,n}(l) = \frac{T_{0,n}(l) - T_{-1,n}(l)}{N^{2r-2}}\,,$$

$$E_{2,n}(l) = \frac{T_{1,n}(l) - 2\,T_{0,n}(l) + T_{-1,n}(l)}{N^{2r-3}}\,.$$

Таким образом,

$$(-1)^{r-1}E_{2,n}(0) = (-1)^{r-1}\,\frac{T_{1,n}(0) - 2\,T_{0,n}(0) + T_{-1,n}(0)}{N^{2r-3}} =$$

$$= \frac{1}{n\,N^{2r-3}}\sum_{q=1}^{n-1}\frac{2 - 2\cos\frac{2\pi q}{n}}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r}} = \frac{1}{n\,N^{2r-3}}\sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{\left(2\sin\frac{\pi q}{n}\right)^{2r-2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n\,N^{2r-3}\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2r-2}} \geqslant \frac{1}{m^{2r-3}\,(2\pi)^{2r-2}}\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{r-1}E_{2,n}(0) \geqslant \frac{1}{m^{2r-3}\,(2\pi)^{2r-2}} > 0.$$

Первое из требуемых соотношений доказано. Докажем второе неравенство. Имеем

$$E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l) = \frac{\left(T_{0,n}(l) - T_{-1,n}(l)\right)^2}{N^{4r-4}} -$$

$$- \frac{T_{-1,n}(l)\big(T_{1,n}(l) - 2\,T_{0,n}(l) + T_{-1,n}(l)\big)}{N^{4r-4}} = \frac{T_{0,n}(l)^2 - T_{1,n}(l)\,T_{-1,n}(l)}{N^{4r-4}}\,.$$

Значит,

$$\mathrm{Re}\big[E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l)\big] = \frac{\mathrm{Re}\big[T_{0,n}(l)^2 - T_{1,n}(l)\,T_{-1,n}(l)\big]}{N^{4r-4}} =$$

$$= \frac{1}{n^2N^{4r-4}}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{1 - \cos\frac{2\pi(p-q)}{n}}{\left(4\sin\frac{\pi(pm+l)}{N}\,\sin\frac{\pi(qm+l)}{N}\right)^{2r}} \geqslant \frac{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}{n^2N^{4r-4}\left(4\sin\frac{\pi l}{N}\,\sin\frac{\pi(m+l)}{N}\right)^{2r}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{n^2N^{4r-4}\left(4\frac{\pi l}{N}\,\frac{\pi(m+l)}{N}\right)^{2r}} \geqslant \frac{2n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{m^{4r-4}\left(4\pi^2 l(m+l)\right)^{2r}}\,.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\big[E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)E_{2,n}(l)\big] \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{m^{4r-4}\big(4\pi^2\, l\,(m+l)\big)^{2r}} = \frac{2\pi^2}{m^{4r-4}\big(4\pi^2\, l\,(m+l)\big)^{2r}} > 0.$$

Лемма доказана. □

4°. Воспользовавшись тождеством (3), перепишем формулу (1) в виде

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, b_{2r-1,N}(j-pn+r-1) + \sum_{p=0}^{m-1} \big(\mathbf{c}_1(p)+\mathbf{c}_2(p)\big)\, b_{2r,N}(j-pn+r-1),$$

Следовательно, пространство $\mathbf{D}_{r,n}$ можно определить как множество вектор-функций вида

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{r,n}(j) = \mathbf{c}_{0,n} + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1) + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, \tilde{b}_{2r,N}(j-pn+r-1), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\mathbf{c}_{0,n}$, $\mathbf{c}_{1,n}(j)$, $\mathbf{c}_{2,n}(j) \in \mathbb{R}^d$ и выполняется условие

$$\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p) = 0. \tag{17}$$

Пусть заданы наборы векторов

$$\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d,$$
$$\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1) \in \mathbb{R}^d.$$

Построим для всех $n \geqslant 2$ вектор-функции вида (16), удовлетворяющие интерполяционным условиям (2).

ТЕОРЕМА 1. *Коэффициенты вектор-функций* $\mathbf{S}_{r,n}$ *сходятся:*

$$\mathbf{c}_{0,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}_0,$$
$$\mathbf{c}_{1,n}(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}_1(p), \quad p \in 0 : m-1,$$
$$\mathbf{c}_{2,n}(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}_2(p), \quad p \in 0 : m-1.$$

Доказательство. Подставим выражение (16) в равенства (2):

$$\mathbf{c}_{0,n} + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \tilde{b}_{2r-1,N}(ln - pn + r - 1) + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, \tilde{b}_{2r,N}(ln - pn + r - 1) = \mathbf{x}(l),$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \frac{\tilde{b}_{2r-2,N}(ln - pn + r - 1)}{N} + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, \frac{\tilde{b}_{2r-1,N}(ln - pn + r - 1)}{N} = \frac{\mathbf{y}(l)}{n}\,.$$

Перепишем эти условия с использованием функций $e_{\alpha,n}$:

$$\mathbf{c}_{0,n} + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, e_{1,n}(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, e_{0,n}(l-p) = \mathbf{x}(l),$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, e_{2,n}(l-p) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, e_{1,n}(l-p) = m\,\mathbf{y}(l).$$

Полученные выражения могут быть записаны более компактно с использованием циклической свёртки:

$$\mathbf{c}_{0,n} + \mathbf{c}_{1,n} * e_{1,n} + \mathbf{c}_{2,n} * e_{0,n} = \mathbf{x},$$
$$\mathbf{c}_{1,n} * e_{2,n} + \mathbf{c}_{2,n} * e_{1,n} = m\,\mathbf{y}.$$

При переходе в спектральную область уравнения примут вид

$$\begin{aligned} m\,\delta_m(l)\,\mathbf{c}_{0,n} + \mathbf{C}_{1,n}(l)\,E_{1,n}(l) + \mathbf{C}_{2,n}(l)\,E_{0,n}(l) = \mathbf{X}(l), \\ \mathbf{C}_{1,n}(l)\,E_{2,n}(l) + \mathbf{C}_{2,n}(l)\,E_{1,n}(l) = m\,\mathbf{Y}(l), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\mathbf{C}_{1,n} = \mathcal{F}_m(\mathbf{c}_{1,n})$, $\mathbf{C}_{2,n} = \mathcal{F}_m(\mathbf{c}_{2,n})$, $\mathbf{X} = \mathcal{F}_m(\mathbf{x})$, $\mathbf{Y} = \mathcal{F}_m(\mathbf{y})$.

Условие (17) эквивалентно равенству $\mathbf{C}_{2,n}(0) = 0$. Поэтому при $l = 0$ уравнения (18) сводятся к равенствам

$$\mathbf{C}_{1,n}(0) = m\,\mathbf{Y}(0)/E_{2,n}(0),$$
$$\mathbf{c}_{0,n} = \frac{\mathbf{X}(0) - \mathbf{C}_{1,n}(0)\,E_{1,n}(0)}{m}\,.$$

Согласно леммам 3 и 4 последовательности $\mathbf{C}_{1,n}(0)$ и $\mathbf{c}_{0,n}$ сходятся.

Пусть $l \in 1 : m-1$. В этом случае равенства (18) становятся системой двух линейных уравнений с неизвестными $\mathbf{C}_{1,n}(l)$ и $\mathbf{C}_{2,n}(l)$. Решение этой системы задаётся формулами

$$\mathbf{C}_{1,n}(l) = \frac{\mathbf{X}(l)\,E_{1,n}(l) - m\,\mathbf{Y}(l)\,E_{0,n}(l)}{E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)\,E_{2,n}(l)}\,,$$

$$\mathbf{C}_{2,n}(l) = \frac{m\,\mathbf{Y}(l)\,E_{1,n}(l) - \mathbf{X}(l)\,E_{2,n}(l)}{E_{1,n}(l)^2 - E_{0,n}(l)\,E_{2,n}(l)}\,.$$

По леммам 3 и 4 выражения в правых частях сходятся при $n \to \infty$. Таким образом, последовательности $\mathbf{C}_{1,n}(l)$ и $\mathbf{C}_{2,n}(l)$ сходятся при $n \to \infty$ для всех $l \in 0 : m-1$. Следовательно, сходятся и последовательности $\mathbf{c}_{1,n}(l)$ и $\mathbf{c}_{2,n}(l)$.

Теорема доказана. □

Определим вектор-функцию $\mathbf{S}_r(t)$ формулой

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\left(\tfrac{t-p}{m}\right) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\,\beta_{2r}\left(\tfrac{t-p}{m}\right). \tag{19}$$

Из леммы 1 следует, что $\mathbf{S}_r \in C^{2r-3}$. Кроме того, ясно, что вектор-функция $\mathbf{S}_r(t)$ периодическая с периодом m.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы предельные соотношения*

$$\left\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r\left(\tfrac{j}{n}\right)\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{равномерно по } j, \tag{20}$$

$$\left\|n\,\mathbf{\Delta} S_{r,n}(j) - \mathbf{S}'_r\left(\tfrac{j}{n}\right)\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{равномерно по } j. \tag{21}$$

Доказательство. Проверим соотношение (20). Имеем

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r\left(\tfrac{j}{n}\right)\right\| \leqslant \|\mathbf{c}_{0,n} - \mathbf{c}_0\| + \\ + \sum_{p=0}^{m-1}\left\|\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1) - \mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\left(\tfrac{j-pn}{N}\right)\right\| + \\ + \sum_{p=0}^{m-1}\left\|\mathbf{c}_{2,n}(p)\,\tilde{b}_{2r,N}(j-pn+r-1) - \mathbf{c}_2(p)\,\beta_{2r}\left(\tfrac{j-pn}{N}\right)\right\|.\end{gathered} \tag{22}$$

Рассмотрим слагаемые в правой части по отдельности. Величина $\|\mathbf{c}_{0,n} - \mathbf{c}_0\|$, очевидно, стремится к нулю. Покажем, что все слагаемые первой суммы стремятся к нулю равномерно по j. Имеем

$$\left\|\mathbf{c}_{1,n}(p)\,\tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1) - \mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\left(\tfrac{j-pn}{N}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1) - \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn+r-1}{N}\big) \right\| +$$

$$+ \left\| \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn+r-1}{N}\big) - \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big) \right\| +$$

$$+ \left\| \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big) - \mathbf{c}_{1}(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big) \right\|.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю по предложению 1, второе — в силу неравенства (12), а сходимость к нулю третьего слагаемого следует из теоремы 1. Аналогичным образом можно показать, что все слагаемые второй суммы в правой части неравенства (22) также стремятся к нулю равномерно по j. Предельное соотношение (20) доказано.

Согласно тождествам (3) и (9) имеют место равенства

$$\Delta \mathbf{S}_{r,n}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \frac{\tilde{b}_{2r-2,N}(j-pn+r-1)}{N} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, \frac{\tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1)}{N},$$

$$\mathbf{S}'_r(t) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_{2r-2}\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{t-p}{m}\big).$$

Следовательно,

$$\left\| n\, \mathbf{\Delta} S_{r,n}(j) - \mathbf{S}'_r\big(\tfrac{j}{n}\big) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m} \left\| \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{1,n}(p)\, \tilde{b}_{2r-2,N}(j-pn+r-1) - \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_{2r-2}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big) \right\| +$$

$$+ \frac{1}{m} \left\| \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_{2,n}(p)\, \tilde{b}_{2r-1,N}(j-pn+r-1) - \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{j-pn}{N}\big) \right\|.$$

Доказательство того, что правая часть последнего неравенства сходится к нулю, аналогично проведённому доказательству соотношения (20). □

СЛЕДСТВИЕ. *Вектор-функция* $\mathbf{S}_r(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\mathbf{S}_r(l) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1,$$

$$\mathbf{S}'_r(l) = \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Доказательство. Зафиксируем $l \in 0 : m-1$ и запишем (20) для $j = ln$. Согласно (2), получим

$$\left\|\mathbf{S}_{r,n}(ln) - \mathbf{S}_r(l)\right\| = \left\|\mathbf{x}(l) - \mathbf{S}_r(l)\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, $\mathbf{S}_r(l) = \mathbf{x}(l)$. Аналогично, подставим ln вместо j в (21) и воспользуемся равенствами (2):

$$\left\|n\,\Delta\mathbf{S}_{r,n}(ln) - \mathbf{S}'_r(l)\right\| = \left\|\mathbf{y}(l) - \mathbf{S}'_r(l)\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, $\mathbf{S}'_r(l) = \mathbf{y}(l)$, что и требовалось. □

5°. Дадим геометрическую интерпретацию теоремы 2. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{S}_{r,n}(j)$. Для наглядности соединим отрезками пары соседних точек $\mathbf{S}_{r,n}(j)$, $\mathbf{S}_{r,n}(j+1)$ для $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную, проходящую через точки $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1)$ и имеющую в этих точках направления $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1)$ соответственно. При этом между соседними точками интерполяции содержится n отрезков ломаной. При увеличении n количество отрезков ломаной будет увеличиваться, но ломаная по-прежнему будет проходить через точки $\mathbf{x}(l)$. Согласно теореме 2, при неограниченном увеличении n построенные ломаные будут стремиться к кривой, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$.

ПРИМЕР. Пусть $m = 4$, $r = 3$. На рисунках 1–4 штриховыми линиями показаны ломаные, соответствующие вектор-функциям $\mathbf{S}_{r,n}$ для различных значений n. Кружками отмечены точки интерполяции $\mathbf{x}(l)$, стрелками — направления векторов $\mathbf{y}(l)$. Кроме того, на каждом рисунке приведена предельная кривая $\mathbf{S}_r(t)$.

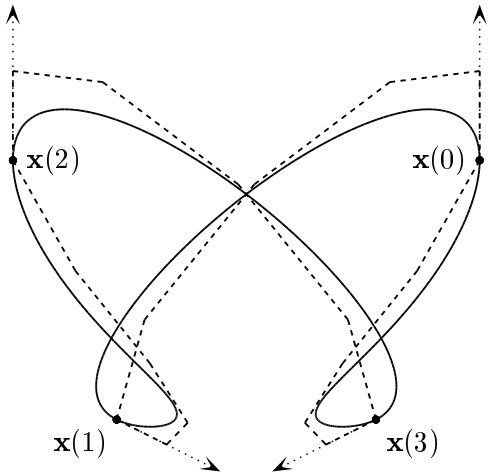


Рис. 1. $n = 5$

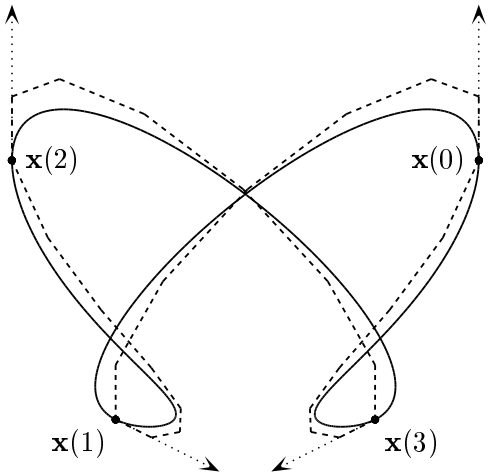


Рис. 2. $n = 7$

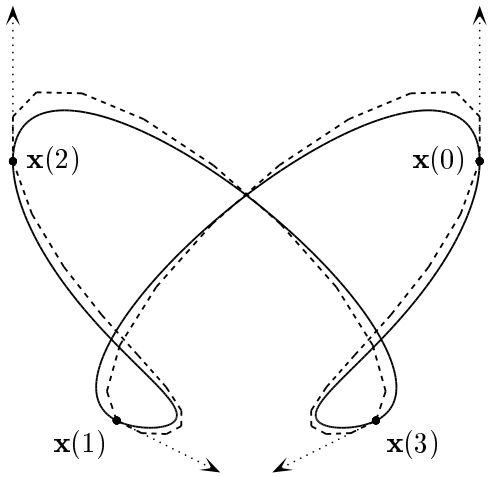


Рис. 3. $n = 10$

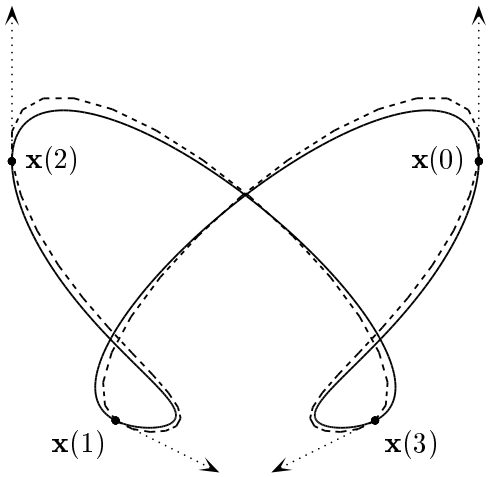


Рис. 4. $n = 15$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Аналог эрмитовой интерполяции в дискретном периодическом случае* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 февраля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0214`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

3. Крылов В. И. *Приближённое вычисление интегралов.* 2 изд. М.: Наука, 1967. 500 с.

ПОЛИНОМЫ ЛОРАНА

В. Н. Малозёмов Н. А. Соловьёва

24 октября 2009 г.

В докладе использованы материалы из обзорной статьи [1].

1°. *Полиномом Лорана* называется выражение вида

$$h(z) = \sum_{k=m}^{n} h_k\, z^{-k}, \tag{1}$$

где m, n — целые числа, $m \leqslant n$, и h_k — вещественные коэффициенты. Если h_m и h_n отличны от нуля, то число $|h| := n - m$ называется *степенью* полинома Лорана $h(z)$. Будем писать $h = 0$, если все коэффициенты полинома Лорана $h(z)$ равны нулю. Считаем, что $|h| = -\infty$, когда $h = 0$.

Полином Лорана нулевой степени имеет вид Cz^{-p}, где $C \neq 0$.

2°. Множество полиномов Лорана (при всех $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$) обычно обозначают через $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$. На $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$ естественным образом вводятся операции сложения и умножения. Пусть

$$h(z) = \sum_{k=m_1}^{n_1} h_k\, z^{-k}, \qquad g(z) = \sum_{k=m_2}^{n_2} g_k\, z^{-k}. \tag{2}$$

Обозначим $m = \min\{m_1, m_2\}$, $n = \max\{n_1, n_2\}$ и положим

$$h_k = 0 \ \text{ при } \ k \in m : n \setminus m_1 : n_1\,,$$
$$g_k = 0 \ \text{ при } \ k \in m : n \setminus m_2 : n_2\,.$$

Тогда формулы (2) можно переписать в виде

$$h(z) = \sum_{k=m}^{n} h_k\, z^{-k}, \qquad g(z) = \sum_{k=m}^{n} g_k\, z^{-k}.$$

По определению

$$\big(h + g\big)(z) = h(z) + g(z) = \sum_{k=m}^{n} \big(h_k + g_k\big)\, z^{-k}.$$

Далее положим

$$c_p \;=\; \sum_{\substack{k+s=p,\\ k\in m_1:n_1,\\ s\in m_2:n_2}} h_k\, g_s\,, \qquad p\in m_1+m_2:n_1+n_2\,.$$

В частности,

$$c_{m_1+m_2}=h_{m_1}\,g_{m_2}\,, \qquad c_{n_1+n_2}=h_{n_1}\,g_{n_2}\,. \tag{3}$$

По определению

$$\big(h\,g\big)(z)=h(z)\,g(z)=\sum_{p=m_1+m_2}^{n_1+n_2} c_p\,z^{-p}.$$

Отметим, что в силу (2) и (3)

$$\big|h\,g\big|=\big|h\big|+\big|g\big|. \tag{4}$$

Действительно,

$$\big|h\,g\big|=(n_1+n_2)-(m_1+m_2)=(n_1-m_1)+(n_2-m_2)=\big|h\big|+\big|g\big|.$$

Множество $\mathbb{R}[z,z^{-1}]$ с введёнными операциями сложения и умножения становится кольцом с единицей. Единицей является полином $h(z)\equiv 1$.

Элемент $h\in\mathbb{R}[z,z^{-1}]$ называется обратимым, если существует элемент $g\in\mathbb{R}[z,z^{-1}]$, такой, что $h(z)\,g(z)\equiv 1$. Согласно (4) обратимым может быть полином Лорана только нулевой степени. Вместе с тем, любой полином Лорана нулевой степени обратим, поскольку

$$C\,z^{-p}\big(\tfrac{1}{C}\,z^{p}\big)\equiv 1.$$

3°. Говорят, что полином Лорана $a(z)$ делится на полином Лорана $b(z)$, если существует полином Лорана $q(z)$, такой, что

$$a(z)=b(z)\,q(z).$$

Деление можно выполнять «в столбик».

ПРИМЕР 1. Пусть $a(z) = z + 2 + z^{-1}$, $b(z) = z + 1$. Имеем

$$\begin{array}{r|l} -\;z+2+z^{-1} & z+1 \\ \cline{2-2} z+1 & 1+z^{-1}. \\ \cline{1-1} -\;1+z^{-1} & \\ 1+z^{-1} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Значит, $a(z) = b(z)\,q(z)$, где $q(z) = 1 + z^{-1}$.

В общем случае полином Лорана делится на любой полином Лорана нулевой степени. Действительно,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k\, z^{-k} = C\, z^{-p} \Big(\frac{1}{C} \sum_{k=m}^{n} a_k\, z^{-k+p} \Big) =$$

$$= C\, z^{-p} \Big(\frac{1}{C} \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}\, z^{-k} \Big).$$

4°. В кольце $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$ точное деление возможно не всегда, но всегда возможно деление с остатком. Последнее означает, что для любых полиномов $a(z)$, $b(z)$ из $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$ с $|a| \geqslant |b| \geqslant 1$ существуют полиномы $q(z)$, $r(z)$ из $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$ с $|q| \leqslant |a| - |b|$ и $|r| < |b|$, такие, что

$$a(z) = b(z)\, q(z) + r(z).$$

Деление с остатком можно выполнять «в столбик».

ПРИМЕР 2. Пусть $a(z) = z + 3 + z^{-1}$, $b(z) = z + 1$. Имеем

$$\begin{array}{r|l} -\;z+3+z^{-1} & z+1 \\ \cline{2-2} z+1 & 1+2z^{-1}. \\ \cline{1-1} -\;2+z^{-1} & \\ 2+2z^{-1} & \\ \cline{1-1} -z^{-1} & \end{array}$$

Значит, $z+3+z^{-1} = (z+1)(1+2z^{-1}) - z^{-1}$, то есть $q(z) = 1+2z^{-1}$, $r(z) = -z^{-1}$.

Отметим, что деление с остатком полиномов Лорана, вообще говоря, не единственно. В рассматриваемом примере

$$z + 3 + z^{-1} = (z + 1)(1 + z^{-1}) + 1,$$

то есть $q(z) = 1 + z^{-1}$, $r(z) \equiv 1$. И ещё один вариант:

$$z + 3 + z^{-1} = (z + 1)(2 + z^{-1}) - z,$$

то есть $q(z) = 2 + z^{-1}$, $r(z) = -z$.

Во всех трёх случаях степень неполного частного $q(z)$ равна единице ($|q| = |a| - |b|$), а степень остатка $r(z)$ равна нулю.

Приведём пример, в котором $|q| < |a| - |b|$.

ПРИМЕР 3. Пусть $a(z) = z + 1 + z^{-1}$, $b(z) = z + 1$. При $q(z) \equiv 1$, $r(z) = z^{-1}$ имеем $a(z) = b(z)\,q(z) + r(z)$ и

$$\big|q\big| = 0 < 1 = \big|a\big| - \big|b\big|.$$

Однако и здесь возможен варинт деления с остатком, когда $|q| = |a| - |b|$. Действительно,

$$z + 1 + z^{-1} = (z + 1)(1 + z^{-1}) - 1.$$

5°. Рассмотрим вопрос о нахождении наибольшего общего делителя (НОД) двух полиномов Лорана.

Напомним, что наибольшим общим делителем двух ненулевых полиномов $a(z)$, $b(z)$ из $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$ называется такой полином $c(z) = \text{НОД}(a(z), b(z))$ из $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$, что он делит $a(z)$ и $b(z)$ и делится на любой их общий множитель.

Для нахождения наибольшего общего делителя обычно используется метод последовательного деления с остатком (алгоритм Евклида). Опишем его.

Пусть даны два ненулевых полинома $a(z), b(z)$ из $\mathbb{R}[z, z^{-1}]$. Можно считать, что $|a| \geqslant |b|$. Обозначим $a_0(z) = a(z)$, $a_1(z) = b(z)$ и выполним последовательное деление с остатком по правилу:

$$\begin{aligned}
&a_0(z) = a_1(z)\,q_1(z) + a_2(z), \quad |a_2| < |a_1|;\\
&a_1(z) = a_2(z)\,q_2(z) + a_3(z), \quad |a_3| < |a_2|;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-2}(z) = a_{n-1}(z)\,q_{n-1}(z) + a_n(z), \quad |a_n| < |a_{n-1}|;\\
&a_{n-1}(z) = a_n(z)\,q_n(z).
\end{aligned} \tag{5}$$

Последнее деление будет наверняка точным, если $|a_n| = 0$. Но точное деление может произойти и ранее.

Просмотрев цепочку равенств (5) снизу вверх, видим, что $a_n(z)$ делит все полиномы $a_{n-1}(z), a_{n-2}(z), \dots, a_1(z), a_0(z)$. Следовательно, $a_n(z)$ является общим делителем $a(z)$ и $b(z)$.

Просмотрев цепочку равенств сверху вниз, заключаем, что остатки $a_2(z)$, $\ldots, a_n(z)$ делятся на любой общий множитель полиномов $a(z)$ и $b(z)$. В частности, $a_n(z)$ делится на любой общий множитель полиномов $a(z)$ и $b(z)$. По определению

$$a_n(z) = \text{НОД}(a(z), b(z)).$$

Равенствам (5) можно придать другую форму:

$$\begin{bmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(z) \\ a_1(z) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_2(z) \\ a_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{bmatrix};$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1}(z) \\ a_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-1}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-2}(z) \\ a_{n-1}(z) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1}(z) \\ a_n(z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \prod_{k=n}^{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(z) \\ b(z) \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k(z) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

приходим к представлению

$$\begin{bmatrix} a(z) \\ b(z) \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

6°. Приведём пример на нахождение наибольшего общего делителя.

ПРИМЕР 4. Пусть $a(z) = z + 3 + z^{-1}$, $b(z) = z + 1$. Имеем (см. пример 2)

$$z + 3 + z^{-1} = (z + 1)(1 + 2z^{-1}) - z^{-1},$$
$$z + 1 = -z^{-1}(-z^2 - z).$$

Значит, НОД$(z+3+z^{-1}, z+1) = -z^{-1}$.

Формула (6) принимает вид

$$\begin{bmatrix} z+3+z^{-1} \\ z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z^2-z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что наибольший общий делитель двух полиномов Лорана, вообще говоря, не единствен. В рассматриваемом примере, так же, как и в примере 2, возможно другое развитие событий:

$$z+3+z^{-1} = (z+1)(1+z^{-1})+1,$$
$$z+1 = 1\cdot(z+1).$$

Значит, НОД$(z+3+z^{-1}, z+1) = 1$ и

$$\begin{bmatrix} z+3+z^{-1} \\ z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ещё один вариант:

$$z+3+z^{-1} = (z+1)(2+z^{-1})-z,$$
$$z+1 = -z(-1-z^{-1}).$$

Значит, НОД$(z+3+z^{-1}, z+1) = -z$ и

$$\begin{bmatrix} z+3+z^{-1} \\ z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7°. В примере 4 все три наибольших общих делителя имеют одинаковую степень. Это не случайно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Все наибольшие общие делители полиномов Лорана $a(z)$ и $b(z)$ имеют одинаковую степень.*

Доказательство. Возьмём два наибольших общих делителя $c(z)$ и $d(z)$. По определению найдутся полиномы Лорана $p(z)$ и $q(z)$, такие, что

$$c(z) = d(z)\,p(z), \qquad d(z) = c(z)\,q(z).$$

Согласно (4), $|c| = |d| + |p|$, $|d| = |c| + |q|$, откуда следует, что $|p| = |q| = 0$. Значит, $|c| = |d|$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Daubechies I., Sweldens W. *Factoring wavelets transforms into lifting steps* // J. Fourier Anal. Appl. 1998. Vol. 4. No. 3. P. 247–269.

ФАКТОРИЗАЦИЯ ПОЛИФАЗНЫХ МАТРИЦ

В. Н. Малозёмов Н. А. Соловьёва

31 октября 2009 г.

В докладе использованы материалы из обзорной статьи [1].

1°. Возьмём полином Лорана

$$h(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k\, z^{-k}.$$

Имеем

$$\frac{h(z)+h(-z)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n} a_k\big[1+(-1)^k\big]z^{-k}.$$

Положим $m_0 = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1$, $n_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,

$$h_0(z) = \sum_{k=m_0}^{n_0} a_{2k}\, z^{-k}.$$

Тогда

$$\frac{h(z)+h(-z)}{2} = h_0(z^2). \tag{1}$$

Далее

$$\frac{h(z)-h(-z)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n} a_k\big[1-(-1)^k\big]z^{-k}.$$

Положим $m_1 = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $n_1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$,

$$h_1(z) = \sum_{k=m_1}^{n_1} a_{2k+1}\, z^{-k}.$$

Тогда

$$\frac{h(z)-h(-z)}{2} = z^{-1}\, h_1(z^2). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует *полифазное представление* полинома Лорана

$$h(z) = h_0(z^2) + z^{-1}\, h_1(z^2).$$

Возьмём ещё один полином Лорана $g(z)$ и запишем для него полифазное представление

$$g(z) = g_0(z^2) + z^{-1}\, g_1(z^2).$$

Сопоставим паре полиномов Лорана (h, g) *полифазную матрицу*

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_0(z) & g_0(z) \\ h_1(z) & g_1(z) \end{bmatrix}.$$

Если определитель полифазной матрицы тождественно равен единице, то соответствующие полиномы Лорана h, g называются *дополнительными*.

В дальнейшем нас будут интересовать только дополнительные пары полиномов Лорана.

2°. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть (h, g) и (h, g^0) — дополнительные пары полиномов Лорана и $P(z)$, $P^0(z)$ — соответствующие полифазные матрицы. Тогда*

$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $s(z) = g_0(z)\, g_1^0(z) - g_1(z)\, g_0^0(z)$.

Доказательство. Правую часть (3) обозначим через $R(z)$. Имеем

$$R = \begin{bmatrix} h_0 & g_0^0 \\ h_1 & g_0^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_0\, g_1^0 - g_1\, g_0^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_0(g_0\, g_1^0 - g_1\, g_0^0) + g_0^0 \\ h_1 & h_1(g_0\, g_1^0 - g_1\, g_0^0) + g_1^0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} h_0 & g_0^0(1 - h_0\, g_1) + g_0\, h_0\, g_1^0 \\ h_1 & g_1^0(1 + h_1\, g_0) - g_1\, h_1\, g_0^0 \end{bmatrix}.$$

По условию $\det P(z) \equiv 1$, $\det P^0(z) \equiv 1$. Это значит, что

$$\begin{aligned} h_0\, g_1 - h_1\, g_0 &\equiv 1, \\ h_0\, g_1^0 - h_1\, g_0^0 &\equiv 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно,

$$R = \begin{bmatrix} h_0 & -g_0^0\, h_1\, g_0 + g_0(1 + h_1\, g_0^0) \\ h_1 & g_1^0\, h_0\, g_1 + g_1(1 - h_0\, g_1^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & g_0 \\ h_1 & g_1 \end{bmatrix} = P.$$

Предложение доказано. □

3°. Обратимся к задаче факторизации полифазной матрицы $P(z)$ дополнительной пары (h, g) полиномов Лорана. Как известно [2], справедлива формула

$$\begin{bmatrix} h_0(z) \\ h_1(z) \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где n — число шагов в алгоритме Евклида нахождения наибольшего общего делителя полиномов $h_0(z)$ и $h_1(z)$, $d(z) = \text{НОД}(h_0(z), h_1(z))$ и $q_1(z), \ldots, q_n(z)$ — последовательные неполные частные в алгоритме Евклида ($q_n(z)$ — полное частное). В данном случае согласно (4) единица делится на $d(z)$. Это возможно только тогда, когда степень $d(z)$ равна нулю, то есть когда $d(z) = Cz^{-p}$, где $C \neq 0$.

Введём полиномы $g_0^0(z)$, $g_1^0(z)$ с помощью формулы

$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Полифазная матрица пары полиномов Лорана (h, g^0), где

$$g^0(z) = g_0^0(z^2) + z^{-1} g_1^0(z^2),$$

имеет вид

$$P^0(z) = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\det P^0(z) \equiv 1$, поэтому пара (h, g^0) является дополнительной. В силу предложения 1

$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $s(z) = g_0(z)\, g_1^0(z) - g_1(z)\, g_0^0(z)$. Значит,

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n\, d^2(z)\, s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix},$$

приходим к окончательному результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо разложение*

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n\, d^2(z)\, s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

4°. Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $h(z) = z^2+z+3+z^{-1}+z^{-2}$, $g(z) = -z^2-z-2$. Полифазная матрица пары (h, g) имеет вид

$$P(z) = \begin{bmatrix} z+3+z^{-1} & -z-2 \\ z+1 & -z \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что пара (h, g) — дополнительная.

Найдём наибольший общий делитель полиномов $z+3+z^{-1}$ и $z+1$. Для этого воспользуемся алгоритмом Евклида (см. [2]):

$$z+3+z^{-1} = (z+1)(1+2z^{-1}) - z^{-1},$$
$$z+1 = -z^{-1}(-z^2-z).$$

Имеем $n = 2$, $q_1(z) = 1+2z^{-1}$, $q_2(z) = -z^2-z$, $d(z) = -z^{-1}$. Вычислим полиномы $g_0^0(z)$ и $g_1^0(z)$. Согласно (5)

$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z^2-z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z-2 \\ -z \end{bmatrix}.$$

Ясно, что $s(z) \equiv 0$. На основании (6) получаем

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1+2z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z^2-z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z^{-1} & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix}.$$

В [2] отмечалось, что наибольший общий делитель двух полиномов Лорана определяется, вообще говоря, не единственным образом, поэтому и разложение (6) может быть не единственным. В данном примере возможен другой вариант развития событий:

$$z+3+z^{-1} = (z+1)(1+z^{-1}) + 1,$$
$$z+1 = 1 \cdot (z+1);$$
$$n = 2, \quad q_1(z) = 1+z^{-1}, \quad q_2(z) = z+1, \quad d(z) \equiv 1;$$
$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+z^{-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$s(z) = -z-2+z(1+z^{-1}) = -1;$$
$$P(z) = \begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ещё один вариант:

$$z+3+z^{-1}=(z+1)(2+z^{-1})-z,$$
$$z+1=-z(-1-z^{-1});$$
$$n=2,\quad q_1(z)=2+z^{-1},\quad q_2(z)=-1-z^{-1},\quad d(z)=-z;$$
$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z^{-1}-z^{-2} \\ -z^{-1} \end{bmatrix},$$
$$s(z)=(z+2)z^{-1}-z(2z^{-1}+z^{-2})=-1+z^{-1};$$
$$P(z)=\begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z^2+z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & -z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Последнее разложение получилось очень громоздким. Однако его можно упростить, если в алгоритме Евклида формально сделать ещё один шаг:

$$z+3+z^{-1}=(z+1)(2+z^{-1})-z,$$
$$z+1=-z(-1)+1,$$
$$-z=1\cdot(-z);$$
$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+z^{-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$s(z)=-(z+2)+z(1+z^{-1})=-1;$$
$$P(z)=\begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

ПРИМЕР 2. Пусть $h(z)=\cos\alpha+\sin\alpha\, z^{-1}$, $g(z)=-\sin\alpha+\cos\alpha\, z^{-1}$, где $\sin\alpha\neq 0$. Запишем полифазную матрицу

$$P=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что пара (h,g) — дополнительная.

Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\cos\alpha=\sin\alpha(\operatorname{ctg}\alpha).$$

Здесь $n=1$, $q_1=\operatorname{ctg}\alpha$, $d=\sin\alpha$. Далее имеем

$$\begin{bmatrix} g_0^0 \\ g_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ctg}\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sin\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sin\alpha} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$s = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Приходим к разложению

$$P = \begin{bmatrix} \operatorname{ctg}\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sin\alpha} \end{bmatrix}.$$

Другой вариант факторизации основан на более формальном подходе к алгоритму Евклида:

$$\cos\alpha = \sin\alpha\,\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} + 1,$$

$$\sin\alpha = 1 \cdot (\sin\alpha);$$

$$\begin{bmatrix} g_0^0 \\ g_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$s = -\sin\alpha - \cos\alpha\,\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha};$$

$$P = \begin{bmatrix} (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что произведение двух матриц второго порядка не изменится, если поменять местами столбцы в первом сомножителе и строки — во втором. Это связано с тем, что между сомножителями можно вставить матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая данный факт, получаем

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Формула (9) указана в [1].

5°. Неединственность деления с остатком полиномов Лорана приводит к различным вариантам факторизации полифазных матриц. Нахождение наиболее простых факторизаций становится искусством.

Часто вычисления по алгоритму Евклида организуют так, чтобы последний ненулевой остаток был константой. В примере 1 такой приём позволил получить эффектные разложения (7) и (8). Разложение (7) можно немного усовершенствовать, если привести его к виду

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 + z^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z + 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Daubechies I., Sweldens W. *Factoring wavelets transforms into lifting steps* // J. Fourier Anal. Appl. 1998. Vol. 4. No. 3. P. 247–269.

2. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Полиномы Лорана* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 24 октября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#1024`).

ПОЛИНОМЫ БЕРНУЛЛИ

В. Н. Малозёмов

14 ноября 2009 г.

В книге В. И. Крылова [1, глава 1] теория полиномов Бернулли строится на основе производящей функции. В докладе мы достигаем той же цели с помощью гармонического анализа. При этом выводятся все формулы, связанные с полиномами Бернулли, которые указаны в большой Математической энциклопедии [2, с. 423].

1°. Будем использовать рекуррентное определение полиномов Бернулли:

$$B_0(x) \equiv 1$$

и при $n = 1, 2, \ldots$

$$B_n'(x) = n\, B_{n-1}(x), \tag{1}$$

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

В частности,

$$B_1(x) = x - \tfrac{1}{2}\,,$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6}\,.$$

Проинтегрируем обе части тождества (1) по отрезку $[0, x]$. Получим

$$B_n(x) = B_n(0) + n \int_0^x B_{n-1}(t)\, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$B_n(1) = B_n(0), \qquad n = 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

Это равенство выполняется и при $n = 0$. При $n = 1$ имеем

$$B_1(1) = \tfrac{1}{2}\,, \qquad B_1(0) = -\tfrac{1}{2}\,. \tag{4}$$

2°. Отметим свойства полиномов Бернулли, которые непосредственно следуют из определения.

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ АРГУМЕНТОВ. *Справедлива формула*

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k(y)\, x^{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к n, $n \geqslant 2$.

Согласно (1) при фиксированном y имеем

$$\frac{d}{dx} B_n(x+y) = n\, B_{n-1}(x+y).$$

Проинтегрируем обе части этого тождества по отрезку $[0, x]$. Получим

$$B_n(x+y) = B_n(y) + n \int_0^x B_{n-1}(t+y)\, dt.$$

В силу индукционного предположения

$$\int_0^x B_{n-1}(t+y)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\, B_k(y)\, \frac{x^{n-k}}{n-k}\,,$$

поэтому

$$B_n(x+y) = B_n(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k}\, C_{n-1}^k\, B_k(y)\, x^{n-k}.$$

Учитывая, что $\frac{n}{n-k}\, C_{n-1}^k = C_n^k$, приходим к (5). □

Подставим в (5) $y = 0$. Получим разложение полинома Бернулли по степеням x:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k(0)\, x^{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

В частности,

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k(0).$$

На основании (3) приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, B_k(0) = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Оно позволяет последовательно находить значения $B_1(0)$, $B_2(0)$, ...

Далее, согласно (5)

$$B_n(x+1) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big[B_k(1) - B_k(0)\big] x^{n-k}.$$

Принимая во внимание (3) и (4), получаем

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n\, x^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Вместе с тем, согласно той же формуле (5)

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k(x),$$

что вместе с (6) приводит к соотношению

$$n\, x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, B_k(x), \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Это соотношение, наряду с (1), (2), позволяет последовательно вычислять полиномы Бернулли $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... Кроме того, оно представляет собой разложение степени x по полиномам Бернулли.

3°. Найдём разложение функций Бернулли $B_n(x)$ при $n \geqslant 2$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 1]$.

ТЕОРЕМА. *При $n \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$B_n(x) = -\,2\, n! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\big(2\pi s x - \frac{n\pi}{2}\big)}{(2\pi s)^n}, \qquad x \in [0, 1]. \tag{7}$$

Доказательство теоремы основано на двух леммах.

ЛЕММА 1. *При $k = 0, 1, \ldots$ и натуральных s справедливы формулы*

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x) \sin 2\pi s x\, dx = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{(2\pi s)^{2k+1}}, \tag{8}$$

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x) \cos 2\pi s x\, dx = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Разберёмся сначала с полиномом $B_1(x)$ (случай $k=0$). Интегрируя по частям и учитывая (1) и (4), при $s=1,2,\ldots$ получаем

$$\int_0^1 B_1(x)\sin 2\pi sx\,dx = -\frac{1}{2\pi s}\,B_1(x)\cos 2\pi sx\,\Big|_0^1 = -\frac{1}{2\pi s}\,;$$

$$\begin{array}{r|l} B_1(x)=u & du=dx \\ \sin 2\pi sx\,dx = dv & v=-\dfrac{1}{2\pi s}\cos 2\pi sx \end{array}$$

$$\int_0^1 B_1(x)\cos 2\pi sx\,dx = -\frac{1}{2\pi s}\int_0^1 \sin 2\pi sx\,dx = 0.$$

$$\begin{array}{r|l} B_1(x)=u & du=dx \\ \cos 2\pi sx\,dx = dv & v=\dfrac{1}{2\pi s}\sin 2\pi sx \end{array}$$

База индукции построена. Сделаем индукционный переход от $k-1$ к k, $k\geqslant 1$. Согласно (3) имеем

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\sin 2\pi sx\,dx = \frac{2k+1}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\,dx; \tag{10}$$

$$\begin{array}{r|l} B_{2k+1}(x)=u & du=(2k+1)B_{2k}(x)\,dx \\ \sin 2\pi sx\,dx = dv & v=-\dfrac{1}{2\pi s}\cos 2\pi sx \end{array}$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\,dx = -\frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\sin 2\pi sx\,dx. \tag{11}$$

$$\begin{array}{r|l} B_{2k}(x)=u & du=2k\,B_{2k-1}(x)\,dx \\ \cos 2\pi sx\,dx = dv & v=\dfrac{1}{2\pi s}\sin 2\pi sx \end{array}$$

На основании (10), (11) и индукционного предположения получаем

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\sin 2\pi sx\,dx = -\frac{2k(2k+1)}{(2\pi s)^2}\,\frac{(-1)^k\,(2k-1)!}{(2\pi s)^{2k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{(2\pi s)^{2k+1}}\,.$$

Аналогично

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\cos 2\pi sx\,dx = -\frac{2k+1}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\,dx,$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\,dx = \frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\cos 2\pi sx\,dx.$$

Согласно индукционному предположению последний интеграл равен нулю. Значит,

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\cos 2\pi sx\,dx = 0.$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *При натуральных k и s справедливы формулы*

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\,dx = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{(2\pi s)^{2k}}\,,$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\,dx = 0.$$

Доказательство. Согласно (8) и (9) имеем

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\,dx = -\frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\sin 2\pi sx\,dx =$$

$$= -\frac{2k}{2\pi s}\,\frac{(-1)^k\,(2k-1)!}{(2\pi s)^{2k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{(2\pi s)^{2k}}\,,$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\,dx = \frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\cos 2\pi sx\,dx = 0.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы при $n = 2k$, $k \geqslant 1$. Запишем ряд Фурье полинома $B_{2k}(x)$ на отрезке $[0,1]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty}(a_s\,\cos 2\pi sx + b_s\,\sin 2\pi sx),$$

где

$$a_s = 2\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\,dx, \qquad b_s = 2\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\,dx.$$

В силу (2) и леммы 2 ряд Фурье принимает вид

$$\frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}\,\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi sx}{s^{2k}}\,.$$

Этот ряд при $k \geqslant 1$ сходится равномерно. Воспользуемся следующим утверждением (см., например, [3, с. 68]):

если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[0,1]$ *функции* $f(x)$ *сходится равномерно, то сумма этого ряда совпадает на* $[0,1]$ *с* $f(x)$.

Получим

$$B_{2k}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi sx}{s^{2k}}\,, \qquad x \in [0,1]. \tag{12}$$

Это соответствует (7) при $n = 2k$, $k \geqslant 1$.

Доказательство теоремы при $n = 2k+1$, $k \geqslant 1$. Согласно (2) и лемме 1 ряд Фурье полинома $B_{2k+1}(x)$ на отрезке $[0,1]$ имеет вид

$$\frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{2^{2k}\,\pi^{2k+1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi sx}{s^{2k+1}}\,.$$

При $k \geqslant 1$ он сходится равномерно. Значит,

$$B_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{2^{2k}\,\pi^{2k+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi sx}{s^{2k+1}}\,, \qquad x \in [0,1]. \tag{13}$$

Это соответствует (7) при $n = 2k+1$, $k \geqslant 1$.

Теорема доказана. □

Положим в (12) $k = 1$ и $x = 0$. Учитывая, что $B_2(0) = \frac{1}{6}$, приходим к знаменитой формуле

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2}\,.$$

Из (13) при $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$ следует, что

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = B_{2k+1}(1) = 0, \qquad k \geqslant 1.$$

4°. Продолжим изучение свойств полиномов Бернулли.

ТЕОРЕМА ДОПОЛНЕНИЯ. *Справедливо тождество*

$$B_n(1-x) = (-1)^n\, B_n(x), \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{14}$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$. Возьмём $x \in [0,1]$. Тогда и $(1-x) \in [0,1]$. Согласно (7)

$$B_n(1-x) = -\,2\,n! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi sx + \frac{n\pi}{2}\right)}{(2\pi s)^n}\,.$$

Учитывая, что

$$\cos\bigl(2\pi sx + \tfrac{n\pi}{2}\bigr) = \cos\Bigl[\bigl(2\pi sx - \tfrac{n\pi}{2}\bigr) + n\,\pi\Bigr] = (-1)^n\,\cos\bigl(2\pi sx - \tfrac{n\pi}{2}\bigr),$$

приходим к (14).

Равенство (14) установлено при $x \in [0,1]$. Но в обеих его частях стоят полиномы степени n, поэтому данное равенство справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ АРГУМЕНТА. *Справедливо тождество*

$$B_n(mx) = m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} B_n\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr), \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{15}$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$. Возьмём $x \in \bigl[0, \frac{1}{m}\bigr]$. Тогда $\bigl(x + \frac{k}{m}\bigr) \in [0,1]$ при всех $k \in 0 : m-1$. Согласно (7)

$$\sum_{k=0}^{m-1} B_n\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) = -\,2\,n!\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi s)^k}\sum_{k=0}^{m-1}\cos\Bigl[2\pi s\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) - \tfrac{n\pi}{2}\Bigr]. \tag{16}$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{m-1}\exp\,i\Bigl[2\pi s\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) - \tfrac{n\pi}{2}\Bigr] = \Bigl(\exp\,i\bigl(2\pi sx - \tfrac{n\pi}{2}\bigr)\Bigr)\sum_{k=0}^{m-1}\omega_m^{sk} =$$
$$= m\,\delta_m(s)\Bigl(\exp i\bigl(2\pi sx - \tfrac{n\pi}{2}\bigr)\Bigr),$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{m-1}\cos\Bigl[2\pi s\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) - \tfrac{n\pi}{2}\Bigr] = m\,\delta_m(s)\cos\bigl(2\pi sx - \tfrac{n\pi}{2}\bigr).$$

Подставив это в (16), получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} B_n\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) = -\,2\,n!\sum_{l=1}^{\infty}\frac{m}{(2\pi lm)^n}\cos\bigl(2\pi l(mx) - \tfrac{n\pi}{2}\bigr) =$$
$$= \frac{1}{m^{n-1}}\,B_n(mx),$$

что равносильно (15).

Равенство (15) установлено при $x \in \bigl[0, \frac{1}{m}\bigr]$. Но в обеих его частях стоят полиномы степени n, поэтому данное равенство справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема доказана. □

5°. Как отмечено в [2], полиномы Бернулли при натуральных x впервые рассматривал Я. Бернулли (1713) в связи с вычислением суммы

$$\sum_{k=1}^{m} k^n.$$

При произвольном x полиномы Бернулли изучал Л. Эйлер.

На рис. изображены полиномы Бернулли $B_n(x)$ при $n = 1, 2, 3, 4$.

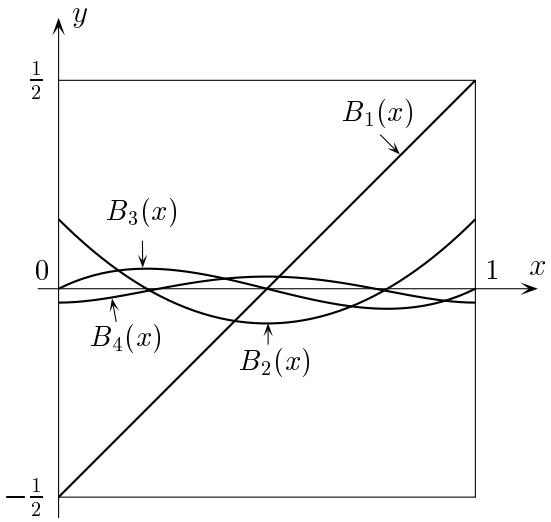


Рис. Графики полиномов Бернулли на отрезке $[0, 1]$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И. *Приближённое вычисление интегралов.* Изд. 2-е. М.: Наука, 1967. 500 с.

2. *Математическая энциклопедия.* Т. 1. М.: Изд. “Советская энциклопедия”, 1977. 1151 с.

3. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* М.: Наука, 1961. 936 с.

СВОЙСТВО МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Н. В. Чашников

21 ноября 2009 г.

Пусть m и r — натуральные числа, отличные от единицы. Обозначим через $\widetilde{W}_2^r$ линейное пространство, состоящее из m-периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна, а r-я производная суммируема с квадратом на основном периоде $[0,m]$. Через $\widetilde{\mathbf{W}}_2^r$ обозначим пространство d-мерных вектор-функций, координатные функции которых принадлежат пространству $\widetilde{W}_2^r$.

Для заданных наборов векторов $\mathbf{x}(0),\mathbf{x}(1),\ldots,\mathbf{x}(m-1)$ и $\mathbf{y}(0),\mathbf{y}(1),\ldots$ $\ldots,\mathbf{y}(m-1)$ из $\mathbb{R}^d$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}(\mathbf{f}) := \int_0^m \left\|\mathbf{f}^{(r)}(t)\right\|^2 dt \to \min,\\
&\mathbf{f}(l) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0:m-1,\\
&\mathbf{f}'(l) = \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0:m-1,\\
&\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^r.
\end{aligned} \tag{1}$$

В данном докладе будет показано, что единственным решением этой задачи является предельный сплайн дискретного аналога эрмитовой сплайн-интерполяции (см. [1]).

1°. Приведём необходимые сведения из [1].

Фунция $\beta_1(t)$ задаётся на отрезке $[0,1]$ формулой

$$\beta_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{при } t=0,\\ \frac{1}{2}-t, & \text{при } t\in(0,1], \end{cases}$$

и продолжается на всю вещественную ось с периодом 1. Функции $\beta_\nu(t)$ для $\nu = 2,3,\ldots$ определяются на отрезке $[0,1]$ рекуррентным соотношением

$$\beta_\nu(t) = \int_0^t \beta_{\nu-1}(\tau)\,d\tau + \int_0^1 \tau\,\beta_{\nu-1}(\tau)\,d\tau, \qquad t\in[0,1],$$

и также продолжаются на всю вещественную ось с периодом 1. Ясно, что равенство

$$\beta'_{\nu+1}(t) = \beta_\nu(t) \tag{2}$$

при $\nu \geqslant 2$ выполняется для всех t, а при $\nu = 1$ — для всех нецелых t. Кроме того, функции β_ν удовлетворяют условию Липшица при $\nu \geqslant 2$.

2°. В [1] были рассмотрены сплайны $\mathbf{S}_r(t)$ вида

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_{2r}\big(\tfrac{t-p}{m}\big), \tag{3}$$

где $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1(p), \mathbf{c}_2(p) \in \mathbb{R}^d$ — некоторые коэффициенты, для которых выполнено соотношение $\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p) = 0$. Было доказано, что найдётся сплайн $\mathbf{S}_r(t)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r(l) &= \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \mathbf{S}'_r(l) &= \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0 : m-1. \end{aligned} \tag{4}$$

Ясно, что $\mathbf{S}_r$ имеет период m. Покажем, что $\mathbf{S}_r \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^{2r-2}$. Применяя соотношение (2), получим

$$\mathbf{S}_r^{(2r-3)}(t) = \frac{1}{m^{2r-3}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m^{2r-3}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_3\big(\tfrac{t-p}{m}\big).$$

Так как β_2 и β_3 удовлетворяют условию Липшица, то вектор-функция $\mathbf{S}_r^{(2r-3)}(t)$ абсолютно непрерывна. Далее,

$$\mathbf{S}_r^{(2r-2)}(t) = \frac{1}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big),$$

В силу того, что функция β_1 кусочно-линейна, а β_2 — непрерывна, получим, что $\mathbf{S}_r^{(2r-2)} \in L_2\big([0,m]\big)$. Таким образом, вектор-функция $\mathbf{S}_r$ действительно принадлежит пространству $\widetilde{\mathbf{W}}_2^{2r-2}$. Так как $r \geqslant 2$, то $\widetilde{\mathbf{W}}_2^{2r-2} \subset \widetilde{\mathbf{W}}_2^{r}$, поэтому $\mathbf{S}_r \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^{r}$.

3°. Докажем два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть $f, g \in \widetilde{W}_2^1$. Тогда справедливо правило интегрирования по частям*

$$\int_0^m f'(t)\, g(t)\, dt = -\int_0^m f(t)\, g'(t)\, dt. \tag{5}$$

Доказательство. По определению функции f и g имеют производные в почти всех точках и $f', g' \in L_2\big([0,m]\big)$. Кроме того, функции f и g абсолютно непрерывны, поэтому также принадлежат пространству L_2. Таким образом, произведения $f'g$ и $f\,g'$ суммируемы на $[0,m]$, поэтому интегралы в обеих частях равенства (5) определены. Следовательно,

$$\int_0^m f'(t)\,g(t)\,dt + \int_0^m f(t)\,g'(t)\,dt = \int_0^m \big(f(t)\,g(t)\big)'\,dt.$$

Функция fg абсолютно непрерывна как произведение абсолютно непрерывных функций (см. [2, с. 264]). А так как абсолютно непрерывная функция является неопределённым интегралом своей производной (см. [2, с. 274]), то в силу m-периодичности выполнено равенство

$$\int_0^m \big(f(t)\,g(t)\big)'\,dt = f(t)\,g(t)\Big|_0^m = 0.$$

□

ЛЕММА 2. *Пусть $p \in 0 : m-1$ и задана функция $h \in \widetilde{W}_2^1$ такая, что $h(0) = h(p) = 0$. Тогда*

$$\int_0^m \beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\,h'(t)\,dt = \tfrac{1}{m}\int_0^m h(t)\,dt.$$

Доказательство. Воспользуемся определением функции β_1 и формулой интегрирования по частям (лемма 1):

$$\int_0^m \beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big)h'(t)\,dt = \int_0^p \Big(\tfrac{1}{2} - \big(\tfrac{t-p}{m}+1\big)\Big)h'(t)\,dt + \int_p^m \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{t-p}{m}\big)h'(t)\,dt =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\big(h(p)-h(0)\big) + \tfrac{1}{2}\big(h(m)-h(p)\big) - \int_0^m \tfrac{t-p}{m}\,h'(t)\,dt = \tfrac{1}{m}\int_0^m h(t)\,dt.$$

□

ТЕОРЕМА. *Единственным решением экстремальной задачи* (1) *является сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ вида* (3), *удовлетворяющий условиям* (4).

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}(t)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (1). Положим $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{S}_r$. Ясно, что $\mathbf{h} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^r$ и

$$\mathbf{h}(l) = \mathbf{h}'(l) = 0, \qquad l \in 0 : m-1.$$

Пусть $\mathbf{h}(t) = \big(h^1(t), \ldots, h^d(t)\big)$, $\mathbf{S}_r(t) = \big(\sigma^1(t), \ldots, \sigma^d(t)\big)$. Имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{h}+\mathbf{S}_r) = \int_0^m \Big(\big\|\mathbf{h}^{(r)}(t)\big\|^2 + 2\,\big\langle \mathbf{h}^{(r)}(t), \mathbf{S}_r^{(r)}(t)\big\rangle + \big\|\mathbf{S}_r^{(r)}(t)\big\|^2\Big)dt =$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r) + 2\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\,\sigma_\alpha^{(r)}(t)\,dt.$$

Зафиксируем $\alpha \in 1:d$. Так как $\sigma_\alpha \in \widetilde{W}_2^{2r-2}$, то при $r \geqslant 3$ имеем $\sigma_\alpha^{(r)} \in \widetilde{W}_2^{r-2}$. Следовательно, по лемме 1 получим

$$G(h_\alpha, \sigma_\alpha) := \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\,\sigma_\alpha^{(r)}(t)\,dt = -\int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t)\,\sigma_\alpha^{(r+1)}(t)\,dt.$$

Проведя интегрирование по частям ещё $r-3$ раза, придём к равенству

$$G(h_\alpha, \sigma_\alpha) = (-1)^{r-2}\int_0^m h_\alpha''(t)\,\sigma_\alpha^{(2r-2)}(t)\,dt,$$

которое справедливо и для $r = 2$.

Функция $\sigma_\alpha(t)$ как координатная функция сплайна $\mathbf{S}_r(t)$ имеет вид

$$\sigma_\alpha(t) = c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\,\beta_{2r-1}\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\,\beta_{2r}\big(\tfrac{t-p}{m}\big),$$

где c_0, $c_1(p)$, $c_2(p)$ — вещественные коэффициенты, для которых выполняется условие $\sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) = 0$. Воспользовавшись соотношением (2), получим

$$\sigma_\alpha^{(2r-2)}(t) = \frac{1}{m^{2r-2}}\sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\,\beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m^{2r-2}}\sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\,\beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big).$$

Таким образом,

$$G(h_\alpha, \sigma_\alpha) = \frac{(-1)^r}{m^{2r-2}}\sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\int_0^m h_\alpha''(t)\,\beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\,dt +$$

$$+ \frac{(-1)^r}{m^{2r-2}}\sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\int_0^m h_\alpha''(t)\,\beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\,dt.$$

Рассмотрим слагаемые этих сумм по отдельности. Согласно лемме 2,

$$\int_0^m h_\alpha''(t)\,\beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\,dt = \tfrac{1}{m}\int_0^m h_\alpha'(t)\,dt = \tfrac{1}{m}\big(h_\alpha(m) - h_\alpha(0)\big) = 0,$$

то есть первая сумма равна нулю. Для слагаемых второй суммы применим формулу интегрирования по частям (лемма 1) и снова воспользуемся леммой 2:

$$\int_0^m h_\alpha''(t)\,\beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\,dt = -\frac{1}{m}\int_0^m h_\alpha'(t)\,\beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\,dt = -\frac{1}{m^2}\int_0^m h_\alpha(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$G(h_\alpha, \sigma_\alpha) = \frac{(-1)^{r+1}}{m^{2r}} \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) \int_0^m h_\alpha(t)\, dt = 0.$$

Мы воспользовались тем, что $\sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) = 0$.

Итак, $\mathbf{F}(f) = \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$. Значит, $\mathbf{F}(f) \geqslant \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, поэтому сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ является решением задачи (1).

Проверим единственность решения. Если $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, то $\mathbf{F}(\mathbf{h}) = 0$. Значит, $\mathbf{h}^{(r)}(t) = 0$ для почти всех $t \in [0, m]$. Тогда вектор-функция $\mathbf{h}^{(r-1)}$ постоянна на $[0, m]$ (см. [2, с. 266]), а в силу m-периодичности — и на всей вещественной оси. Следовательно, $\mathbf{h}(t)$ — многочлен с векторными коэффициентами. Но единственный периодический многочлен — постоянная функция, что вместе с условием $\mathbf{h}(0) = 0$ приводит к тождеству $\mathbf{h}(t) \equiv 0$. Таким образом, имеем $\mathbf{f} = \mathbf{S}_r$, что доказывает единственность решения (1). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретного аналога эрмитовой интерполяции* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 19 сентября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0919`)

2. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* 3-е изд. СПб.: Лань, 1999. 560 с.

ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕРНУЛЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА

А. Н. Сабаев

28 ноября 2009 г.

1°. Пусть $\delta_N(j)$ — единичный N-периодический импульс и

$$\big[\Delta^r \delta_N\big](j) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s\, \delta_N(j+s), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

— его конечная разность r-го порядка, $r \in \{1, 2, \ldots\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула*

$$\big[\Delta^r \delta_N\big](j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \big(\omega_N^k - 1\big)^r \omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$.

Доказательство. Напомним [1, с. 28], что

$$\delta_N(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj}.$$

Согласно (1) имеем

$$\big[\Delta^r \delta_N\big](j) = \tfrac{1}{N} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(j+s)} =$$

$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s \big(\omega_N^k\big)^s = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} \big(\omega_N^k - 1\big)^r.$$

Остаётся заметить, что слагаемое с $k = 0$ равно нулю. □

2°. Дискретная N-периодическая функция Бернулли порядка $r \in \{0, 1, \ldots\}$ определяется следующим образом [2]:

$$b_r(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\omega_N^k - 1\right)^{-r} \omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

В частности,

$$b_0(j) = \delta_N(j) - \tfrac{1}{N}\,.$$

Сравнение формул (2) и (3) позволяется распространить понятие функций Бернулли на случай отрицательных порядков

$$b_{-r} = \Delta^r \delta_N\,, \qquad r \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{4}$$

Теперь функции Бернулли определены при всех $r \in \mathbb{Z}$. При всех целых r можно пользоваться формулой (3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо соотношение*

$$b_r = -\tfrac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-1} C_N^{s+1}\, b_{r-s}\,, \qquad r \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Доказательство. Отметим, что

$$\sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \left(\omega_N^k - 1\right)^s = 0, \qquad k \in 1 : N-1. \tag{6}$$

Действительно,

$$\sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \left(\omega_N^k - 1\right)^s = \tfrac{1}{\omega_N^k - 1} \sum_{s=1}^{N} C_N^s \left(\omega_N^k - 1\right)^s =$$

$$= \tfrac{1}{\omega_N^k - 1} \Big[-C_N^0 + \sum_{s=0}^{N} C_N^s \left(\omega_N^k - 1\right)^s \Big] = \tfrac{1}{\omega_N^k - 1} \big[-1 + \omega_N^{kN} \big] = 0.$$

Умножим (6) на $(\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{kj}$ и просуммируем по $k \in 1 : N-1$. Получим

$$0 = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \left(\omega_N^k - 1\right)^{s-r} \omega_N^{kj}.$$

Разделим это равенство на N и поменяем порядок суммирования:

$$0 = \sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \Big\{ \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\omega_N^k - 1\right)^{-(r-s)} \omega_N^{kj} \Big\} = \sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1}\, b_{r-s}(j).$$

Остаётся перенести слагаемое с $s = 0$ в левую часть равенства и поделить на $-N$. □

В силу (4) формулу (5) при натуральных r можно переписать так:

$$b_r = -\frac{1}{N}\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{r} C_N^{s+1}\, b_{r-s} + \sum\limits_{s=r+1}^{N-1} C_N^{s+1}\Delta^{s-r}\delta_N\,, & r < N-1; \\ \sum\limits_{s=1}^{N-1} C_N^{s+1}\, b_{r-s}, & r \geqslant N-1. \end{cases}$$

3°. Следующее утверждение является аналогом теоремы сложения аргументов для полиномов Бернулли [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При $r \in \mathbb{Z}$ справедлива формула*

$$b_r(j+l) = \sum_{s=0}^{l} C_l^s\, b_{r-s}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{s=0}^{l} C_l^s\, b_{r-s}(j) = \sum_{s=0}^{l} C_l^s \left\{ \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\omega_N^k - 1\right)^{-r+s} \omega_N^{kj} \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\omega_N^k - 1\right)^{-r} \omega_N^{kj} \sum_{s=0}^{l} C_l^s \left(\omega_N^k - 1\right)^s =$$

$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\omega_N^k - 1\right)^{-r} \omega_N^{k(j+l)} = b_r(j+l),$$

что соответствует (7). □

В частности, при натуральных r

$$b_r(j+r) = \sum_{s=0}^{r} C_r^s\, b_{r-s}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 1. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

2. Бер М. Г., Малозёмов В. Н. *Наилучшие формулы для приближённого вычисления дискретного преобразования Фурье* // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 11. С. 1709–1719.

3. Малозёмов В. Н. *Полиномы Бернулли* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 ноября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml\#1114`).

СПЛАЙН-СГЛАЖИВАНИЕ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДАННЫХ

А. Н. Сабаев

28 ноября 2009 г.

1°. Пусть m, n, r — натуральные числа, причём m и n отличны от единицы. Положим $N = mn$ и рассмотрим задачу сглаживания дискретных периодических данных в следующей постановке:

$$F(x) := \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \left|\Delta^r x(j)\right|^2 + \sum_{l=0}^{m-1} \left|x(ln) - z(l)\right|^2 \to \min_{x \in \mathbb{C}_N}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha > 0$ — фиксированный параметр. Известно ([1], см. также [2, с. 26–30]), что единственным решением этой задачи является дискретный периодический сплайн порядка r

$$S(j) = d + \sum_{l=0}^{m-1} d(l)\, b_{2r}(j + r - ln), \tag{2}$$

$$\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0, \tag{3}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$(-1)^r \alpha\, d(l) + S(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1. \tag{4}$$

Решение системы линейных уравнений (4), (3) порядка $m+1$ можно записать явно:

$$\begin{gathered} d = \tfrac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} z(l), \\ d(l) = \tfrac{(-1)^r}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z(k)\, \omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}, \qquad l \in 0 : m-1, \end{gathered} \tag{5}$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$ и

$$\Lambda_r(k) = \tfrac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\left(2\sin\tfrac{\pi(qm+k)}{N}\right)^{-2r}.$$

Отметим, что условие (3) входит в определение сплайна.

2°. Возьмём индексное множество J, содержащееся в $0 : m-1$, и обобщим задачу (1) следующим образом:

$$F(x) := \alpha\sum_{j=0}^{N-1}\left|\Delta^r x(j)\right|^2 + \sum_{l\in J}\left|x(ln) - z(l)\right|^2 \to \min_{x\in\mathbb{C}_N}. \tag{6}$$

В частности, при $J = \{0, 1, \ldots, m-2\}$ получаем задачу сглаживающей экстраполяции на один отсчёт. Если $x_* \in \mathbb{C}_N$ — решение такой задачи, то можно приближённо положить $z(m-1) = x_*((m-1)n)$.

Обозначим $J' = (0 : m-1) \setminus J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Единственным решением задачи* (6) *является дискретный периодический сплайн* $S(j)$ *порядка* r, *имеющий вид* (2), (3), *коэффициенты которого удовлетворяют условиям*

$$(-1)^r\alpha\, d(l) + S(ln) = z(l), \quad l \in J; \tag{7}$$

$$d(l) = 0, \quad l \in J'. \tag{8}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в случае регулярных данных. Сначала проверим, что у системы линейных уравнений (7), (8), (3) относительно коэффициентов сплайна $d, d(0), d(1), \ldots, d(m-1)$ решение существует и единственно. Для этого достаточно установить, что однородная система

$$\begin{gathered}(-1)^r\alpha\, d(l) + S(ln) = 0, \quad l \in J;\\ d(l) = 0, \quad l \in J';\\ \sum_{l\in J} d(l) = 0\end{gathered} \tag{9}$$

имеет только нулевое решение.

Возьмём любое решение $d_0, d_0(0), d_0(1), \ldots, d_0(m-1)$ этой системы. Соответствующий сплайн обозначим $S_0(j)$. Воспользуемся известным свойством дискретного периодического сплайна [2, с. 20]

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left|\Delta^r S_0(j)\right|^2 = (-1)^r\sum_{l=0}^{m-1} d_0(l)\,\overline{S}_0(ln).$$

Получим

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \left|\Delta^r S_0(j)\right|^2 = (-1)^r \sum_{l\in J} d_0(l)\,\overline{S}_0(ln) =$$
$$= -\alpha \sum_{l\in J} \left|d_0(l)\right|^2 \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $d_0(l) = 0$ при всех $l \in J$, так что $S_0(j) \equiv d_0$. Коэффициент d_0 также равен нулю, поскольку $S_0(ln) = 0$ при $l \in J$.

Установлено, что однородная система (9) имеет только нулевое решение. Это гарантирует существование и единственность решения системы (7), (8), (3). Соответствующий сплайн обозначим $S_*(j)$. Покажем, что он является единственным решением задачи (6).

Введём обозначения

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left|\Delta^r x(j)\right|^2, \qquad g(x) = \sum_{l\in J} \left|x(ln) - z(l)\right|^2.$$

Возьмём произвольный сигнал $H(j)$ из $\mathbb{C}_N$ и запишем

$$F(S_* + H) = \alpha\, f(S_* + H) + g(S_* + H) = \alpha\big[f(S_*) + f(H) +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\,\Delta^r \overline{H}(j)\big] + g(S_*) + \sum_{l\in J} \left|H(ln)\right|^2 +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{l\in J} \big(S_*(ln) - z(l)\big)\,\overline{H}(ln).$$

Воспользуемся тем, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\,\Delta^r \overline{H}(j) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d_*(l)\,\overline{H}(ln).$$

Получим

$$F(S_* + H) = F(S_*) + \alpha\, f(H) + \sum_{l\in J} \left|H(ln)\right|^2 +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\Big\{ \sum_{l\in J} \big[(-1)^r \alpha\, d_*(l) + S_*(ln) - z(l)\big]\,\overline{H}(ln) + (-1)^r \alpha \sum_{l\in J'} d_*(l)\,\overline{H}(ln)\Big\}.$$

В силу (7) и (8)

$$F(S_* + H) = F(S_*) + \alpha\, f(H) + \sum_{l\in J} \left|H(ln)\right|^2. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$F(S_* + H) \geqslant F(S_*) \qquad \forall\, H \in \mathbb{C}_N\,.$$

Оптимальность S_* установлена. Проверим единственность решения.

Допустим, что $F(S_* + H) = F(S_*)$ при некотором $H \in \mathbb{C}_N$. Тогда согласно (10)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r H(j)\bigr|^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{l\in J} \bigl|H(ln)\bigr|^2 = 0.$$

Первое равенство гарантирует, что $H(j) \equiv \mathrm{const}$ (см. [2, с. 7]), второе приводит к тождеству $H(j) \equiv 0$.

Предложение доказано. □

Таким образом, задача (6) сглаживания нерегулярных данных $\{z(l)\}_{l\in J}$ сведена к решению системы линейных уравнений

$$\begin{gathered} (-1)^r \alpha\, d(l) + S(ln) = z(l), \quad l \in J; \\ d(l) = 0, \quad l \in J'; \\ \sum_{l\in J} d(l) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

причём известно, что эта система имеет решение и оно единственно.

3°. Покажем, что решение системы (11) можно выразить через $z'(l) = S_*(ln)$, $l \in J'$. Для этого введём два m-периодических сигнала

$$z_0(l) = \begin{cases} z(l) & \text{при } l \in J; \\ 0 & \text{при } l \in J'; \end{cases} \qquad z_0'(l) = \begin{cases} 0 & \text{при } l \in J; \\ z'(l) & \text{при } l \in J'. \end{cases}$$

Коэффициенты $d_*, d_*(0), d_*(1), \ldots, d_*(m-1)$ сплайна $S_*(j)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} (-1)^r \alpha\, d_*(l) + S_*(ln) = z_0(l) + z_0'(l), \qquad l \in 0 : m-1; \\ \sum_{l=0}^{m-1} d_*(l) = 0. \end{gathered}$$

Как отмечалось в п. 1°, отсюда следует, что

$$d_* = \tfrac{1}{m}\Bigl(\sum_{l\in J} z(l) + \sum_{l\in J'} z'(l)\Bigr), \tag{12}$$

$$d_*(l) = \tfrac{(-1)^r}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k) + Z_0'(k)}{\alpha + \Lambda_r(k)}\, \omega_m^{kl}, \qquad l \in 0 : m-1, \tag{13}$$

где $Z_0 = \mathcal{F}_m(z_0)$, $Z_0' = \mathcal{F}_m(z_0')$. Требуемые формулы получены.

Выведем систему линейных уравнений для $z'(l)$, $l \in J'$. Условие $d_*(l) = 0$ при $l \in J'$ в силу (13) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0'(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)} = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,, \qquad l \in J'. \tag{14}$$

Имеем

$$Z_0'(k) = \sum_{s=0}^{m-1} z_0'(s)\,\omega_m^{-ks} = \sum_{s\in J'} z'(s)\,\omega_m^{-ks}\,,$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0'(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)} = \sum_{s\in J'} z'(s) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\omega_m^{k(l-s)}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,.$$

Обозначим

$$\eta(l) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,, \qquad w(l) = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,.$$

Тогда (14) можно переписать так:

$$\sum_{s\in J'} z'(s)\,\eta(l-s) = w(l)\,, \qquad l \in J'. \tag{15}$$

Это и есть требуемая система линейных уравнений относительно $z'(s)$, $s \in J'$. После её решения коэффициенты сглаживающего сплайна $S_*(j)$ вычисляются по формулам (12), (13).

Отметим, что при $|J'| < |J|$ порядок системы (15) меньше, чем порядок системы (11).

4°. Обратимся к задаче сглаживающей экстраполяции на один отсчёт, когда $J = 0 : m-2$, $J' = \{m-1\}$. В этом случае система (15) примет вид

$$z'(m-1)\,\eta(0) = w(m-1),$$

где

$$\eta(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,, \qquad w(m-1) = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k)\,\omega_m^{-k}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,,$$

$Z_0 = \mathcal{F}_m(z_0)$ и

$$z_0(l) = \begin{cases} z(l) & \text{при } l \in 0 : m-2; \\ 0 & \text{при } l = m-1. \end{cases}$$

Величина

$$z'(m-1) = \frac{w(m-1)}{\eta(0)}$$

есть предсказываемое значение исходных данных $\{z_l\}_{l=0}^{m-2}$ на индексе $l = m-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 88 с.

ПРЕДЕЛ ДИСКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА

Н. В. Чашников

5 декабря 2009 г.

В [1] было показано, как строить дискретную поверхность Кунса, натянутую на сеть из остовных кривых. Остовные кривые при этом задавались вектор-функциями целочисленного аргумента. Теперь рассмотрим случай, когда сеть кривых задаётся вектор-функциями непрерывного аргумента, а остовные кривые для поверхности Кунса определяются при помощи дискретизации. Целью данного доклада является нахождение предела дискретных поверхностей Кунса при шаге дискретизации, стремящемся к нулю, и установление свойства минимальной нормы для предельной поверхности.

1°. Пусть m_1, m_2 — натуральные числа, отличные от единицы, и задан набор непрерывных m_2-периодических d-мерных вектор-функций $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{m_1-1}$ и набор непрерывных m_1-периодических d-мерных вектор-функций $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{g}_{m_2-1}$. Предположим, что выполняются равенства

$$\mathbf{f}_i(j) = \mathbf{g}_j(i), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{1}$$

Для натуральных n_1 и n_2, отличных от единицы, проведём дискретизацию вектор-функций $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$:

$$\mathbf{f}_{i,n_2}(v) := \mathbf{f}_i\left(\tfrac{v}{n_2}\right), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z};$$
$$\mathbf{g}_{j,n_1}(u) := \mathbf{g}_j\left(\tfrac{u}{n_1}\right), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}.$$

Из (1) следует, что

$$\mathbf{f}_{i,n_2}(jn_2) = \mathbf{g}_{j,n_1}(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{2}$$

Положим $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$. Ясно, что вектор-функции $\mathbf{f}_{i,n_2}$ периодические с периодом N_2, а вектор-функции $\mathbf{g}_{j,n_1}$ периодические с периодом N_2. Напомним метод построения дискретной поверхности Кунса по этим функциям, приведённый в [1].

Пусть r_1, r_2 — натуральные числа. Определим H^u_{0,n_1} как дискретный N_1-периодический сплайн порядка r_1, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$H^u_{0,n_1}(kn_1) = \delta_{m_1}(k), \qquad k \in 0 : m_1 - 1,$$

а H^v_{0,n_2} — как дискретный N_2-периодический сплайн порядка r_2, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$H^v_{0,n_2}(kn_2) = \delta_{m_2}(k), \qquad k \in 0 : m_2 - 1.$$

Смешивающие функции определим формулами

$$\begin{aligned} H^u_{i,n_1}(u) &= H^u_{0,n_1}(u - in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}, \\ H^v_{j,n_2}(v) &= H^v_{0,n_2}(v - jn_2), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Все функции H^u_{i,n_1} являются дискретными периодическими сплайнами порядка r_1, а все функции H^v_{j,n_2} — дискретными периодическими сплайнами порядка r_2.

Дискретная поверхность Кунса определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v) = &\sum_{i=0}^{m_1-1} H^u_{i,n_1}(u)\,\mathbf{f}_{i,n_2}(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H^v_{j,n_2}(v)\,\mathbf{g}_{j,n_1}(u) - \\ &- \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H^u_{i,n_1}(u)\,H^v_{j,n_2}(v)\,\mathbf{g}_{j,n_1}(in_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Так как для остовных функций выполнено условие согласования (2), то вектор-функция $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}_{n_1,n_2}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть фиксированы числа m_1, m_2, r_1, r_2 и остовные вектор-функции $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$. Для каждой пары натуральных n_1 и n_2, отличных от единицы, значения вектор-функции $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v)$ образуют множество из N_1N_2 точек в пространстве $\mathbb{R}^d$. Покажем, как найти предел этого множества при неограниченном возрастании n_1 и n_2.

2°. Воспользуемся предельным соотношением для дискретных периодических сплайнов, полученным в [2]. Пусть m — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический B-сплайн первого порядка как

m-периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_{m,1}(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{при } t \in [0,1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t-m+1, & \text{при } t \in (m-1, m]. \end{cases} \tag{5}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_{m,\nu}(t) = \int_0^m P_{m,\nu-1}(s)\, P_{m,1}(t-s)\, ds, \qquad \nu = 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

В [2] показано, что для дискретных интерполяционных сплайнов порядка r существует предельный сплайн, представимый в виде линейной комбинации сдвигов B-сплайнов $P_{m,r}$. Значит, найдётся сплайн

$$S_1(t) = \sum_{l=0}^{m_1-1} c_{1,l}\, P_{m_1,r_1}(t-l),$$

такой, что

$$\left| H^u_{0,n_1}(u) - S_1\left(\tfrac{u}{n_1}\right) \right| \xrightarrow[n_1\to\infty]{} 0 \qquad \text{равномерно по } u. \tag{7}$$

Аналогично, найдётся сплайн

$$S_2(t) = \sum_{l=0}^{m_2-1} c_{2,l}\, P_{m_2,r_2}(t-l),$$

такой, что

$$\left| H^v_{0,n_2}(v) - S_2\left(\tfrac{v}{n_2}\right) \right| \xrightarrow[n_2\to\infty]{} 0 \qquad \text{равномерно по } v.$$

В [2] доказано, что $P_{m,r} \in C^{2r-2}$. Поэтому $S_1 \in C^{2r_1-2}$, $S_2 \in C^{2r_2-2}$.

ЛЕММА. *Справедливы предельные соотношения*

$$H^u_{0,n_1}\big(\lfloor x n_1 \rfloor\big) \xrightarrow[n_1\to\infty]{} S_1(x) \qquad \textit{равномерно по } x \in \mathbb{R},$$
$$H^v_{0,n_2}\big(\lfloor y n_2 \rfloor\big) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} S_2(y) \qquad \textit{равномерно по } y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение. Так как функция S_1 непрерывна, то она равномерно непрерывна на любом отрезке. Из периодичности следует, что она равномерно непрерывна и на всей вещественной оси.

Для $x \in \mathbb{R}$ положим $u = \lfloor xn_1 \rfloor$. Имеем

$$\left\| H^u_{0,n_1}\big(\lfloor xn_1 \rfloor\big) - S_1(x) \right\| \leqslant \left\| H^u_{0,n_1}(u) - S_1\big(\tfrac{u}{n_1}\big) \right\| + \left\| S_1\big(\tfrac{u}{n_1}\big) - S_1(x) \right\|.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю равномерно по u в силу (7). Второе слагаемое также стремится к нулю равномерно по x в силу того, что S_1 равномерно непрерывна и выполняется неравенство

$$\left| \frac{u}{n_1} - x \right| = \left| \frac{\lfloor xn_1 \rfloor - xn_1}{n_1} \right| \leqslant \frac{1}{n_1}\,.$$

Второе предельное соотношение доказывается аналогичным образом. □

Определим вектор-функцию $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^d$ формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(x,y) := \sum_{i=0}^{m_1-1} S_1(x-i)\,\mathbf{f}_i(y) + \sum_{j=0}^{m_2-1} S_2(y-j)\,\mathbf{g}_j(x) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} S_1(x-i)\,S_2(y-j)\,\mathbf{g}_j(i). \end{aligned} \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо предельное соотношение*

$$\mathbf{c}_{n_1,n_2}\big(\lfloor xn_1 \rfloor, \lfloor yn_2 \rfloor\big) \xrightarrow[n_1,n_2\to\infty]{} \mathbf{c}(x,y) \qquad \textit{равномерно по } x,y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Согласно формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}\big(\lfloor xn_1 \rfloor, \lfloor yn_2 \rfloor\big) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H^u_{i,n_1}\big(\lfloor xn_1 \rfloor\big)\,\mathbf{f}_{i,n_2}\big(\lfloor yn_2 \rfloor\big) + \\ + \sum_{j=0}^{m_2-1} H^v_{j,n_2}\big(\lfloor yn_2 \rfloor\big)\,\mathbf{g}_{j,n_1}\big(\lfloor xn_1 \rfloor\big) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H^u_{i,n_1}\big(\lfloor xn_1 \rfloor\big) H^v_{j,n_2}\big(\lfloor yn_2 \rfloor\big)\,\mathbf{g}_{j,n_1}(in_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим слагаемые выражения (9) по отдельности. Используя лемму, получаем

$$H^u_{i,n_1}\big(\lfloor xn_1 \rfloor\big) = H^u_{0,n_1}\big(\lfloor (x-i)n_1 \rfloor\big) \xrightarrow[n_1\to\infty]{} S_1(x-i),$$

$$H^v_{j,n_2}\big(\lfloor yn_2\rfloor\big) = H^v_{0,n_2}\big(\lfloor (y-j)n_2\rfloor\big) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} S_2(y-j).$$

Вектор-функции $\mathbf{f}_i$ непрерывны и периодичны, поэтому они равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\lfloor yn_2\rfloor}{n_2} - y\right| < \frac{1}{n_2}\,.$$

Следовательно,

$$\left\|\mathbf{f}_i\big(\tfrac{\lfloor yn_2\rfloor}{n_2}\big) - \mathbf{f}_i(y)\right\| \xrightarrow[n_2\to\infty]{} 0 \qquad \text{равномерно по } y.$$

Значит, имеет место предельное соотношение

$$\mathbf{f}_{i,n_2}\big(\lfloor yn_2\rfloor\big) = \mathbf{f}_i\big(\tfrac{\lfloor yn_2\rfloor}{n_2}\big) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} \mathbf{f}_i(y) \qquad \text{равномерно по } y.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\mathbf{g}_{j,n_1}\big(\lfloor xn_1\rfloor\big) \xrightarrow[n_1\to\infty]{} \mathbf{g}_j(x) \qquad \text{равномерно по } x.$$

Заметим, что $\mathbf{g}_{j,n_1}(in_1) = \mathbf{g}_j(i)$. Таким образом, все слагаемые выражения (9) сходятся к соответствующим слагаемым правой части (8).

Теорема доказана. □

ПРИМЕР. Пусть $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $r_1 = r_2 = 2$. В качестве остовных кривых возьмём кривые, которые использовались в [4] для построения поверхности в виде завязанной в узел трубки. На рис. 1 синим цветом изображены кривые $\mathbf{f}_0$ и $\mathbf{f}_1$, зелёным цветом — кривые $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, а кружками выделены точки пересечений. На рис. 2 приведена дискретная поверхность Кунса для значений $n_1 = 4$ и $n_2 = 25$, а на рис. 3 — для значений $n_1 = 6$, $n_2 = 50$, при этом синим цветом выделены остовные кривые $\mathbf{f}_{i,n_2}$, а зелёным — кривые $\mathbf{g}_{j,n_1}$. Предельная поверхность представлена на рис. 4.

3°. Покажем, что предельная поверность (8) является частным случаем обобщённой поверхности Кунса. Напомним определение обобщённой поверхности Кунса, приведённое в [3].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L^u_1, \dots, L^u_m \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H^u_1, \dots, H^u_m \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L^u_i(H^u_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:m. \tag{10}$$

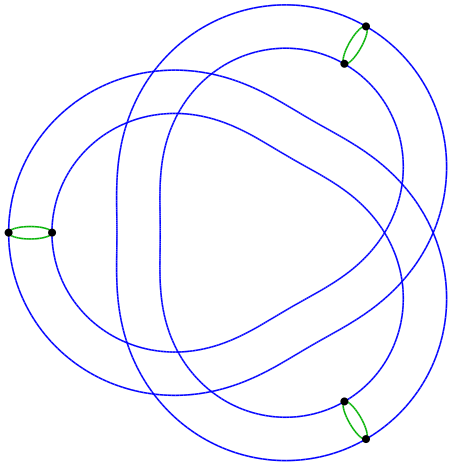


Рис. 1. Остовные кривые

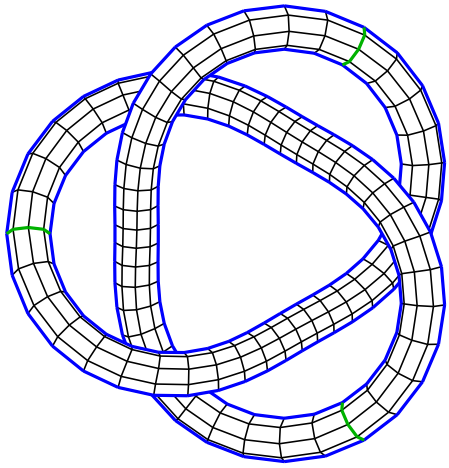


Рис. 2. Дискретная поверхность при $n_1 = 4$ и $n_2 = 25$

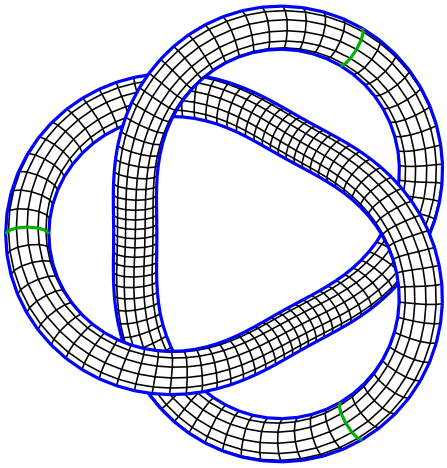


Рис. 3. Дискретная поверхность при $n_1 = 6$ и $n_2 = 50$

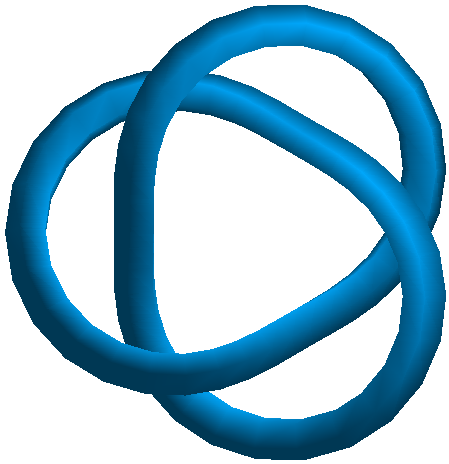


Рис. 4. Предельная поверхность

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \ldots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \ldots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n. \tag{11}$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Определим множества вектор-функций, координатные функции которых

принадлежат T_u и T_v :

$$\mathbf{T}_u = \Big\{\mathbf{g}\colon D_u \to \mathbb{R}^d \,\Big|\, \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^d(u)\big),\ g^k \in T_u\Big\},$$
$$\mathbf{T}_v = \Big\{\mathbf{f}\colon D_v \to \mathbb{R}^d \,\Big|\, \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \dots, f^d(v)\big),\ f^k \in T_v\Big\}.$$

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \dots, L_i^u(g^d)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^d(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ i \in 1:m;$$
$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \dots, L_j^v(f^d)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \dots, f^d(u)\big) \in \mathbf{T}_v,\ j \in 1:n.$$

Пусть заданы наборы остовных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{12}$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{a} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{a}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{13}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{a}(u,v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса.* В [3] доказано, что вектор-функция $\mathbf{a}(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i^u(\mathbf{a}(\cdot,v)) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in D_v, \\ \mathbf{L}_j^v(\mathbf{a}(u,\cdot)) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in D_u. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $D_u = D_v = \mathbb{R}$, T_u — множество непрерывных m_1-периодических функций, T_v — множество непрерывных m_2-периодических функций. Положим

$$\begin{aligned} L_i^u(g) &= g(i), \qquad i \in 0:m_1-1, \\ L_j^v(f) &= f(j), \qquad j \in 0:m_2-1. \end{aligned}$$

В качестве смешивающих функций возьмём сдвиги сплайнов S_1 и S_2:

$$H_i^u(u) = S_1(u-i), \qquad i \in 0:m_1-1, \quad u \in \mathbb{R};$$

$$H_j^v(v) = S_2(v-j), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Условия (10) и (11) в этом случае сводятся к равенствам

$$\begin{aligned} S_1(i-j) &= \delta_{ij}, \qquad i,j \in 0 : m_1 - 1, \\ S_2(i-j) &= \delta_{ij}, \qquad i,j \in 0 : m_2 - 1, \end{aligned}$$

которые, очевидно, выполняются. Условия согласования (12) совпадают с равенствами (1), а формула обобщённой поверхности Кунса (13) принимает вид (8). Таким образом, предельная поверхность действительно является частным случаем обобщённой поверхности Кунса. Следовательно, справедливы равенства (14), которые в данном частном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(i,v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{c}(u,j) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Значит, предельная поверхность Кунса проходит через все кривые $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$.

4°. Покажем, что теорема об экстремальном свойстве обощённой поверхности Кунса, доказанная в [5], может быть применена для предельной поверхности.

Пусть порядки r_1 и r_2 отличны от единицы и остовные вектор-функции достаточно гладкие:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &\in C^{r_2}, \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \\ \mathbf{g}_j &\in C^{r_1}, \qquad j \in 0 : m_2 - 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \int_0^{m_1}\int_0^{m_2} \left\| \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\,\partial y^{r_2}}\,\mathbf{a}(x,y) \right\|^2 dy\,dx \to \inf, \\ \mathbf{a}(i,y) = \mathbf{f}_i(y), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \qquad y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{a}(x,j) = \mathbf{g}_j(x), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \qquad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\,\partial y^{r_2}}\,\mathbf{a} = \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial y^{r_2}\,\partial x^{r_1}}\,\mathbf{a} \in C(\mathbb{R}^2), \\ \mathbf{a}(x+m_1,y) \equiv \mathbf{a}(x,y+m_2) \equiv \mathbf{a}(x,y). \end{gathered} \tag{15}$$

ТЕОРЕМА 2. *Предельная поверхность Кунса является единственным решением задачи* (15).

Доказательство. Воспользуемся доказанной в [5] теоремой об экстремальном свойстве поверхности Кунса. Положим

$$I_u(g) = \int_0^{m_1} g(x)\,dx, \qquad I_v(f) = \int_0^{m_2} f(y)\,dy.$$

Пусть E_u — множество m_1-периодических функций класса C^{r_1}, E_v — множество m_2-периодических функций класса C^{r_2}. Определим операторы A_u и A_v формулами

$$A_u(g) = \frac{\partial^{r_1} g}{\partial x^{r_1}}, \qquad A_v(f) = \frac{\partial^{r_2} f}{\partial y^{r_2}}.$$

Основное условие в теореме связано с экстремальными задачами для функций одной переменной, заданных на множествах D_u и D_v. В данном случае, экстремальная задача для функции, заданной на множестве D_u, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \int_0^{m_1} \left[g^{(r_1)}(x)\right]^2 dx \to \inf, \\ g(i) = x_i, \quad i \in 0 : m_1 - 1, \\ g \in C^{r_1}(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{16}$$

Согласно свойству минимальной нормы для предельных сплайнов (см. [2]), единственным решением задачи (16) является предельный сплайн, который может быть представлен в виде

$$g_*(u) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, x_i.$$

Это в точности соответствует требуемому условию теоремы. Аналогичным образом проверяется условие, связанное с экстремальной задачей для функции, заданной на множестве D_v.

Пусть T_{uv} — пространство непрерывных функций, имеющих период m_1 по первому аргументу и период m_2 — по второму. Положим

$$E_{uv} = \left\{ e \in T_{uv} \mid \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\,\partial y^{r_2}}\,\mathbf{a} = \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial y^{r_2}\,\partial x^{r_1}}\,\mathbf{a} \in C(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Так же, как в [5], обозначим через $\mathbf{E}_{uv}$ пространство вектор-функций, координатные функции которых принадлежат пространству E_{uv}. Ясно, что предельная поверхность Кунса, построенная по формуле (8), принадлежит пространству $\mathbf{E}_{uv}$. Так как в данном случае $A_{u,*} = \frac{\partial^{r_1}}{\partial x^{r_1}}$, $A_{*,v} = \frac{\partial^{r_2}}{\partial y^{r_2}}$, то по построению пространства E_{uv} выполняется равенство

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, e = A_{*,v}\, A_{u,*}\, e, \qquad e \in E_{uv}.$$

Все оставшиеся условия, требуемые в теореме об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, являются элементарными свойствами интегралов и производных функций двух переменных. Применяя теорему, заключаем, что поверхность Кунса, построенная по формуле (8), является единственным решением задачи (15). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Экстремальное свойство дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).

2. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).

3. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`).

4. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0904`).

5. Чашников Н. В. *Экстремальные свойства поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).

СИСТЕМЫ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ КАК ОРБИТЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

М. Н. Истомина А. Б. Певный

12 декабря 2009 г.

Данный доклад непосредственно примыкает к докладу [1].

1°. Напомним [2, 3], что набор единичных векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ из $\mathbb{R}^n$ называется *системой Мерседес-Бенц*, если

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\tfrac{1}{n} \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{1}$$

Из определения следует, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i = \mathbb{O}. \tag{2}$$

Действительно,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i \Big\|^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i, \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \big\|\varphi_i\big\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle =$$
$$= n + 1 + n\big(n+1\big)\big(-\tfrac{1}{n}\big) = 0.$$

Система Мерседес-Бенц является жёстким фреймом, поэтому для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо разложение

$$x = \tfrac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i \,. \tag{3}$$

Каждая система Мерседес-Бенц получается из канонического фрейма Мерседес-Бенц $\{b_1^n, \dots, b_{n+1}^n\}$ с помощью ортогонального преобразования. Для канонического фрейма в [1] установлено циклическое свойство. Мы покажем, что аналогичным свойством обладают все системы Мерседес-Бенц.

ТЕОРЕМА. *Для любой системы Мерседес-Бенц $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ в $\mathbb{R}^n$ найдётся ортогональная матрица P порядка n, такая, что*

1) $P\varphi_i = \varphi_{i+1}$, $i \in 1:n$; $P\varphi_{n+1} = \varphi_1$;

2) $P^{n+1} = I$, *где* I *— единичная матрица* n*-го порядка;*

3) единица не является собственным числом матрицы P.

Доказательство. Свойства 1) и 2) выводятся так же, как в [1].

1) В силу (1) системы единичных векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ и $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, где $\psi_i = \varphi_{i+1}$, удовлетворяют условию

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \psi_i, \psi_j \rangle \quad \text{при всех} \quad i, j \in 1:n.$$

В этом случае, как показано в [3, Приложение], существует ортогональная матрица P, такая, что

$$\psi_i = P\varphi_i, \qquad i \in 1:n.$$

Это значит, что

$$\varphi_{i+1} = P\varphi_i, \qquad i \in 1:n. \tag{4}$$

Далее, согласно (2), $\varphi_{n+1} = -(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)$. Учитывая (4), приходим к равенству

$$P\varphi_{n+1} = -\big(\varphi_2 + \dots + \varphi_{n+1}\big) = \varphi_1 .$$

2) Имеем $\varphi_k = P^{k-1}\varphi_1$ при $k \in 1:n+1$. При тех же k

$$P^{n+1}\varphi_k = P^k\big(P^{n+1-k}\varphi_k\big) = P^k\big(P^n\varphi_1\big) = P^k\varphi_{n+1} = \\ = P^{k-1}\varphi_1 = \varphi_k.$$

На основании (3) получаем

$$P^{n+1}x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что $P^{n+1} = I$.

3) Допустим, вопреки утверждению, что существует ненулевой вектор x_0, такой, что $Px_0 = x_0$. Введём матрицу

$$Q = I + P + P^2 + \dots + P^n.$$

Имеем

$$Qx_0 = (n+1)\,x_0 \neq \mathbb{O}. \tag{5}$$

Вместе с тем, согласно 2), $QP = Q$. Значит, и $QP^{k-1} = Q$ при $k \in 1:n+1$. В силу 1) и (2) при тех же k

$$Q\varphi_k = QP^{k-1}\varphi_1 = Q\varphi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n+1} = \mathbb{O}.$$

На основании (3) получаем

$$Q\,x = \mathbb{O} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что Q — нулевая матрица. В частности, $Qx_0 = \mathbb{O}$, что противоречит (5).

Теорема доказана. □

2°. Множество матриц $G = \{I, P, P^2, \ldots, P^n\}$ образует группу по умножению. Действительно, $P^k P^s = P^l$, где $l = \langle k+s\rangle_{n+1}$. Умножение ассоциативно, то есть $(P^k P^s)P^r = P^k(P^s P^r)$. Это связано с тем, что

$$\langle\langle k+s\rangle_{n+1} + r\rangle_{n+1} = \langle k+s+r\rangle_{n+1} = \langle k + \langle s+r\rangle_{n+1}\rangle_{n+1}.$$

Единицей в группе G является единичная матрица I. Обратные элементы определяются так:

$$I^{-1} = I; \qquad (P^k)^{-1} = P^{n+1-k}, \quad k \in 1:n.$$

Свойство 2) характеризует группу G как циклическую.

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ множество векторов $\{Tx\}_{T\in G}$ называется *орбитой* группы G. При $x = \varphi_1$ орбита состоит из векторов

$$\big\{\varphi_1, P\varphi_1, \ldots, P^n\varphi_1\big\} = \big\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}\big\},$$

то есть при $x = \varphi_1$ орбитой группы G является система Мерседес-Бенц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 сентября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml\#0912`).

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 января 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml\#0116`).

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. Вып. 39. 2009. С. 3–25.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИФТИНГОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Н. А. Соловьёва

19 декабря 2009 г.

В [1, 2] было введено лифтинговое преобразование дискретного периодического сигнала. Формулы обращения позволили получить лифтинговое разложение произвольного сигнала по сдвигам базисных сигналов. В данном докладе устанавливаются дополнительные свойства базисных сигналов. Все доказательства будут основываться только на определениях, без ссылок на природу появления этих сигналов.

1°. Пусть $N = 2^s$, $N_\nu = N/2^\nu$ при $\nu \in 0 : s$ $(N_0 = N)$, r — натуральное число. Введём следующие сигналы:

$$h_\nu(k) = \frac{2\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}},$$

$$g_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k}\left(1 - \beta_\nu(k)\, h_\nu(k)\right),$$

$$k \in 0 : N_{\nu-1} - 1, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

Здесь $\beta_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, такая, что

$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k),$$
$$\beta_\nu(0) = \tfrac{1}{2}. \tag{1}$$

Сигналы h_ν и g_ν имеют период $N_{\nu-1}$.

Заметим, что

$$h_s(k) = \frac{2\left(\cos\frac{\pi k}{2}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{\pi k}{2}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{\pi k}{2}\right)^{2r}} = \begin{cases} 2 & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{при } k = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Положим при $\nu \in 1:s$

$$H_\nu = h_1 \cdots h_{\nu-1}\, h_\nu\,, \qquad G_\nu = h_1 \cdots h_{\nu-1}\, g_\nu\,.$$

Период сигналов H_ν, G_ν совпадает с периодом h_1 и равен N. Зададим базисные сигналы

$$\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu), \qquad \psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu).$$

2°. В докладе [1] сигнал φ_s был вычислен в явном виде: $\varphi_s(j) \equiv 1$. Это эквивалентно тому, что

$$H_s(k) \equiv N\,\delta_N(k). \tag{3}$$

Относительно сигнала ψ_s верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При всех* $j \in 0:N-1$

$$\psi_s(j) = -\varphi_{s-1}(j) + \tfrac{1}{2}\,.$$

Доказательство. По определению

$$G_s(k) = H_{s-1}(k)\, g_s(k). \tag{4}$$

Вычислим значения G_s. Вначале рассмотрим $G_s(0)$. Из (1) и (2) получаем

$$g_s(0) = \omega_2^0 \left(1 - \beta_s(0)\, h_s(0)\right) = 0.$$

Из (4) сразу вытекает, что $G_s(0) = 0$.

Вычислим значения $G_s(2q)$, $q \in 1:\frac{N}{2}-1$. По определению функций H_ν имеем

$$H_s(2q) = H_{s-1}(2q)\, h_s(2q).$$

Заметим, что $h_s(2q) = 2$ при $q \in 1:\frac{N}{2-1}$. Кроме того, известно равенство (3). Значит,

$$H_{s-1}(2q) = \frac{N\,\delta_N(2q)}{2}\,,$$

откуда

$$H_{s-1}(2q) = 0, \qquad q \in 1:\tfrac{N}{2}-1. \tag{5}$$

Согласно (4), $G_s(2q) = 0$ при $q \in 1:\frac{N}{2}-1$. Следовательно,

$$G_s(2q) = 0, \qquad q \in 0:\tfrac{N}{2}-1. \tag{6}$$

Вычислим значение сигнала G_s на нечётных индексах. С учётом (2) запишем

$$\begin{aligned} G_s(2q+1) &= H_{s-1}(2q+1)\,\omega_2^{-(2q+1)} \left(1 - \beta_s(2q+1)\, h_s(2q+1)\right) = \\ &= -H_{s-1}(2q+1), \qquad q \in 0:\tfrac{N}{2}-1. \end{aligned} \tag{7}$$

На основании (6) и (7) получаем, что при $j \in 0 : N-1$

$$\psi_s(j) = \big[\mathcal{F}_N^{-1}(G_s)\big](j) = -\tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q+1)\, \omega_N^{(2q+1)j}. \tag{8}$$

Так как по определению

$$\varphi_{s-1}(j) = \big[\mathcal{F}_N^{-1}(H_{s-1})\big](j) = \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q+1)\, \omega_N^{(2q+1)j} +$$

$$+ \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q)\, \omega_N^{(2q)j},$$

то соотношение (8) можно переписать в виде

$$\psi_s(j) = -\varphi_{s-1}(j) + \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q)\, \omega_N^{2qj}. \tag{9}$$

Теперь вычислим $H_{s-1}(2q)$ при $q \in 0 : \frac{N}{2} - 1$. Имеем $H_{s-1}(0) = h_1(0) \cdots \cdots h_{s-1}(0) = 2^{s-1}$. Кроме того, по формуле (5) $H_{s-1}(2q) = 0$ при $q \in 1 : \frac{N}{2} - 1$. Равенство (9) принимает вид

$$\psi_s(j) = -\varphi_{s-1}(j) + \frac{2^{s-1}}{N} = -\varphi_{s-1}(j) + \tfrac{1}{2}\,,$$

а это совпадает с утверждением предложения. □

3°. Для дальнейшего анализа нам потребуются следующие равенства, доказанные в [2]: при всех $j \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_\nu(2j) = \varphi_{\nu-1}(j) + \varphi_{\nu-1}\big(j + \tfrac{N}{2}\big), \tag{10}$$

$$\varphi_\nu(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\, \varphi_{\nu-1}(l), \tag{11}$$

$$\nu = 2, \ldots, s.$$

Кроме того, при всех $\nu \in 1 : s$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \psi_\nu(j) = 0. \tag{12}$$

Установим аналог последнего соотношения для сигналов φ_ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При всех $\nu \in 1 : s$ верно равенство*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_\nu(j) = 2^\nu.$$

Доказательство. Так как $\varphi_s(j) \equiv 1$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_s(j) = 2^s.$$

Согласно предложению 1 с учётом (12) имеем

$$0 = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_s(j) = -\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(j) + 2^{s-1}.$$

Получаем равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(j) = 2^{s-1}.$$

Таким образом, для $\nu = s-1$ и $\nu = s$ утверждение доказано.

Воспользуемся тождеством (11) при $\nu = s$:

$$\sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\, \varphi_{s-1}(l) = \varphi_s(j).$$

Просуммировав последнее равенство по всем $j \in 0 : N-1$, получим

$$L := \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\, \varphi_{s-1}(l) = 2^s.$$

Левую часть этого равенства перепишем в виде

$$L = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(l) \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(l) \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j) = 2^{s-1} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j).$$

Так как $L = 2^s$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j) = 2.$$

Воспользуемся индукцией по ν. База индукции есть. Проведём индукционный переход от $\nu-1$ к ν, $\nu=2,\dots,s-2$. Просуммируем равенства (11) при всех $j\in 0:N-1$ и поменяем порядок суммирования в правой части. Получим

$$\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_\nu(j)=\sum_{l=0}^{N-1}\varphi_{\nu-1}(l)\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_1(j-2l)=$$
$$=\sum_{l=0}^{N-1}\varphi_{\nu-1}(l)\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_1(j)=2^{\nu-1}\cdot 2=2^\nu.$$

Предложение доказано. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При $\nu\in 1:s$ верны равенства*

$$\sum_{q=0}^{N/2-1}\varphi_\nu(2q)=2^{\nu-1},\qquad \sum_{q=0}^{N/2-1}\varphi_\nu(2q+1)=2^{\nu-1}.$$

Доказательство. Заметим, что с учётом предыдущего предложения достаточно доказать только одно из равенств. Докажем первое.

Формула (10) влечёт

$$\varphi_\nu(2q)=\varphi_{\nu-1}(q)+\varphi_{\nu-1}\bigl(q+\tfrac{N}{2}\bigr),\qquad q\in 0:\tfrac{N}{2}-1.$$

Суммируя последние равенства по q, получаем

$$\sum_{q=0}^{N/2-1}\varphi_\nu(2q)=\sum_{q=0}^{N/2-1}\varphi_{\nu-1}(q)+\sum_{q=0}^{N/2-1}\varphi_{\nu-1}\bigl(q+\tfrac{N}{2}\bigr).$$

С учётом предложения 2 отсюда сразу следует, что

$$\sum_{q=0}^{N/2-1}\varphi_\nu(2q)=\sum_{q=0}^{N-1}\varphi_{\nu-1}(q)=2^{\nu-1}.$$

Предложение доказано. □

4°. Предположим, что сигналы $\beta_2,\dots,\beta_s$ получаются из β_1 с помощью прореживания:

$$\beta_{\nu+1}(k)=\beta_\nu(2k),\qquad k\in 0:N_\nu-1,\quad \nu=2,\dots,s.$$

Опираясь на формулу (12) и соотношение (см. [2])

$$\psi_\nu(2j)=\psi_{\nu-1}(j)+\psi_{\nu-1}\bigl(j+\tfrac{N}{2}\bigr),$$

можно доказать следующие равенства: при всех $\nu \in 1:s$

$$\sum_{q=0}^{N/2-1} \psi_\nu(2q) = 0, \qquad \sum_{q=0}^{N/2-1} \psi_\nu(2q+1) = 0.$$

Обоснование полностью аналогично доказательству предложения 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Селянинова Н. А. *Прямая лифтинговая схема* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 26 апреля 2005 г. (`http://dha.spb.ru/reps05.shtml\#0426`).

2. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Параметрические лифтинговые схемы вейвлетных разложений* // Проблемы матем. анализа. Вып. 42. 2009. С. 15–41.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

В. Н. Малозёмов

30 января 2010 г.

1°. Пусть m, n, r — натуральные числа, причём m и n отличны от единицы, $N = mn$ и $z(0), z(1), \ldots, z(m-1)$ — фиксированные комплексные числа. Обозначим через $Q_r(j)$ дискретный N-периодический B-сплайн порядка r [1; 2, с. 9–15].

Рассмотрим дискретный N-периодический сплайн вида

$$S_{r,n}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\, Q_r(j - pn), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S_{r,n}(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

В [3] изучалось поведение сплайна $S_{r,n}(j)$ при $n \to \infty$. Нас интересует поведение $S_{r,n}(j)$ при $r \to \infty$.

2°. Найдём дискретное преобразование Фурье от $S_{r,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для спектра $X_r = \mathcal{F}_N(S_{r,n})$ справедлива формула*

$$X_r = V_r\, Z, \tag{2}$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$ и при $q \in 0 : n-1$

$$V_r(qm + l) = \begin{cases} n\,\delta_n(q), & \text{если } l = 0; \\ n\left(\displaystyle\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\sin(\pi(qm+l)/N)}{\sin(\pi(sm+l)/N)}\right)^{2r}\right)^{-1}, & \text{если } l \in 1 : m-1. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно (1) имеем

$$X_r(k) = \sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{p=0}^{m-1} c(p)\,Q_r(j-pn)\Big)\omega_N^{-k(j-pn)-kpn} =$$
$$= \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\,\omega_m^{-kp}\sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j)\,\omega_N^{-kj} = \big[\mathcal{F}_m(c)\big](k)\,\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k).$$

Воспользуемся известной формулой [2, с. 22]

$$\big[\mathcal{F}_m(c)\big](k) = \frac{Z(k)}{T_r(k)}\,, \qquad k \in 0:m-1,$$

где

$$T_r(k) = \begin{cases} n^{2r-1} & \text{при } k=0; \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{s=0}^{n-1}\Big(\frac{\sin(\pi k/m)}{\sin\big(\pi(sm+k)/N\big)}\Big)^{2r} & \text{при } k \in 1:m-1. \end{cases} \tag{3}$$

Получим

$$X_r(k) = V_r(k)Z(k), \qquad k \in 0:N-1,$$

где

$$V_r(k) = \frac{\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k)}{T_r(k)}\,.$$

Далее, как известно [2, с. 11],

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k) = \begin{cases} n^{2r} & \text{при } k=0; \\ \Big(\dfrac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)}\Big)^{2r} & \text{при } k \in 1:N-1. \end{cases}$$

Отсюда и из (3) в силу m-периодичности функции $T_r(k)$ следует, что

$$V_r(0) = n, \qquad V_r(m) = V_r(2m) = \dots = V_r\big((n-1)m\big) = 0,$$

то есть $V_r(qm) = n\,\delta_n(q)$, $q \in 0:n-1$. При $k = qm+l$, $l \in 1:m-1$, формула для $V_r(k)$, указанная в формулировке предложения, проверяется непосредственно. □

3°. Обозначим

$$\alpha_k = \sin^2\frac{\pi k}{N}\,, \qquad \Lambda_l = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\alpha_{sm+l}^{-r}\,.$$

Тогда при $l \in 1 : m-1$

$$V_r(qm+l) = \left(\alpha^r_{qm+l}\,\Lambda_l\right)^{-1}, \qquad q \in 0 : n-1. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm+l) = n, \qquad l \in 1 : m-1. \tag{5}$$

Это равенство верно и при $l = 0$.

Покажем, что

$$V_r(N-k) = V_r(k), \qquad k \in 1 : N-1. \tag{6}$$

Пусть $k = qm + l$, $q \in 0 : n-1$, $l \in 0 : m-1$. При $l = 0$ имеем $k = qm$, $q \in 1 : n-1$, так что

$$V_r(N-k) = V_r\big((n-q)m\big) = n\,\delta_n(n-q) = 0 = n\,\delta_n(q) = V_r(qm) = V_r(k).$$

Возьмём $l \in 1 : m-1$. В этом случае $N-k = (n-q-1)m + (m-l)$. В силу (4) получим

$$V_r(N-k) = \left(\alpha^r_{N-k}\,\Lambda_{m-l}\right)^{-1}.$$

Ясно, что $\alpha_{N-k} = \alpha_k$. Остаётся проверить, что $\Lambda_{m-l} = \Lambda_l$. Это сделать просто:

$$\Lambda_l = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{-r}_{sm+l} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{-r}_{N-(sm+l)} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{-r}_{(n-s-1)m+(m-l)} =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{s'=0}^{n-1} \alpha^{-r}_{s'm+(m-l)} = \Lambda_{m-l}.$$

Отметим ещё одно свойство спектра V_r. При чётном m

$$V_r\left(\tfrac{m}{2}\right) = n\left(\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha_{m/2}}{\alpha_{sm+m/2}}\right)^r\right)^{-1} = n\left(2 + \sum_{s=1}^{n-2}\left(\frac{\alpha_{m/2}}{\alpha_{sm+m/2}}\right)^r\right)^{-1}. \tag{7}$$

В частности, при чётном m и $n = 2$

$$V_r\left(\tfrac{m}{2}\right) = \tfrac{n}{2} = 1.$$

4°. Введём N-периодический спектр V_* следующим образом:

$$V_*(k) = \begin{cases} n & \text{при } k = 0, 1, \ldots, \lfloor (m-1)/2 \rfloor, \\ 0 & \text{при } k = \lfloor m/2 \rfloor + 1, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor. \end{cases}$$

При чётном m дополнительно положим $V_*(m/2) = n/2$. С помощью равенства $V_*(N-k) = V_*(k)$ распространим V_* на весь основной период $0 : N-1$. На рис. 1 представлены графики $V_*(k)$ при $m = 3$, $n = 3$ и $m = 4$, $n = 3$.

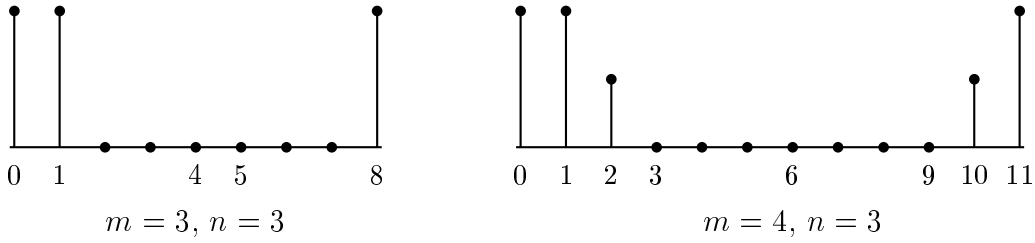


Рис. 1. Графики спектра $V_*(k)$ на основном периоде

Очевидно, что $V_*(qm) = n\,\delta_n(q)$, $q \in 0 : n-1$, поскольку

$$\lfloor m/2 \rfloor + 1 \leqslant m \qquad \text{и} \qquad (n-1)m \leqslant N - \lfloor m/2 \rfloor - 1.$$

Значит, при всех натуральных r

$$V_r(qm) = V_*(qm), \qquad q \in 0 : n-1. \tag{8}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} V_r(k) = V_*(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $k = qm + l$, $q \in 0 : n-1$, $l \in 0 : m-1$. При $l = 0$ предложение является тривиальным следствием равенства (8). В дальнейшем считаем, что $l \in 1 : m-1$.

Нам потребуются некоторые свойства чисел $\alpha_k = \sin^2(k\pi/N)$, $k \in 0 : N-1$.

1) Наибольшее значение α_k равно $\alpha_{\lfloor N/2 \rfloor}$. При нечётном N оно достигается на двух индексах $k = (N-1)/2$ и $k = (N+1)/2$; при чётном N — на одном $k = N/2$.

2) $\alpha_{sm+l} > \alpha_l$ при $s \in 1 : n-1$ и $l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor$. Это следует из неравенств $2l < m$,

$$l < sm + l \leqslant (n-1)m + l < nm - l$$

и равенства $\alpha_l = \alpha_{N-l}$ (см. рис. 2).

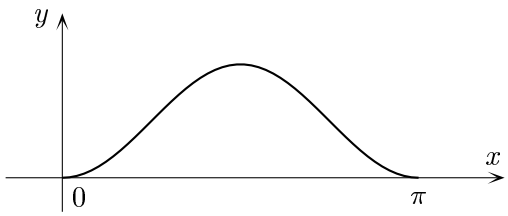


Рис. 2. График функции $y = \sin^2 x$ на периоде

3) Если m чётно, то $\alpha_{sm+m/2} > \alpha_{m/2}$ при $s \in 1 : n-2$. Действительно,

$$m/2 < sm + m/2 \leqslant (n-2)m + m/2 < nm - m/2.$$

Вернёмся к доказательству предложения. Сначала рассмотрим случай $q = 0$, $l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor$. Имеем

$$V_r(l) = n\left(1 + \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_l}{\alpha_{sm+l}}\right)^r\right)^{-1}.$$

В силу свойства 2) чисел α_k получаем

$$\lim_{r\to\infty} V_r(l) = n = V_*(l), \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor. \tag{10}$$

Теперь воспользуемся равенством (5), согласно которому

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm + l) = n, \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor.$$

Все величины $V_r(qm + l)$ неотрицательны и $V_r(l) \to n$ при $r \to \infty$, поэтому при $q \in 1 : n-1$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm + l) = 0 = V_*(qm + l), \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor.$$

Мы приняли во внимание, что $\lfloor (m-1)/2 \rfloor + \lfloor m/2 \rfloor = m - 1$ и

$$(n-1)m + \lfloor (m-1)/2 \rfloor = N - \lfloor m/2 \rfloor - 1.$$

Таким образом, при всех $q \in 0 : n-1$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm + l) = V_*(qm + l), \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor.$$

При чётном m дополнительно рассмотрим случай $l = m/2$, когда $V_*(l) = n/2$. На основании (7) и свойства 3) чисел α_k имеем

$$\lim_{r\to\infty} V_r(m/2) = \tfrac{n}{2} = V_*(m/2).$$

Ясно также, что в силу (6) и аналогичного свойства спектра V_*

$$\lim_{r\to\infty} V_r\big((n-1)m+m/2\big) = \lim_{r\to\infty} V_r(m/2) = \tfrac{n}{2} =$$
$$= V_*(m/2) = V_*\big((n-1)m+m/2\big).$$

Согласно (5)

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm+m/2) = n.$$

Учитывая, что $V_r(m/2) \to n/2$ и $V_r\big((n-1)m+m/2\big) \to n/2$ при $r \to \infty$, заключаем, что при $q \in 1:n-2$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+m/2) = 0 = V_*(qm+m/2).$$

Значит, при всех $q \in 0:n-1$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+m/2) = V_*(qm+m/2). \tag{11}$$

При $m=2$ множество $1:m-1$ состоит из единственного индекса $l = 1 = m/2$. В этом случае соотношение (11) завершает доказательство предложения. В дальнейшем считаем, что $m \geqslant 3$. Это гарантирует непустоту множества $\lfloor m/2 \rfloor + 1 : m-1$.

Согласно (5)

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm+l) = n, \qquad l \in \lfloor m/2 \rfloor + 1 : m-1, \tag{12}$$

при этом в силу (6) и (10)

$$\lim_{r\to\infty} V_r\big((n-1)m+l\big) = \lim_{r\to\infty} V_r(m-l) =$$
$$= n = V_*(m-l) = V_*\big((n-1)m+l\big).$$

Мы приняли во внимание, что при указанных l

$$1 \leqslant m-l \leqslant \big\lfloor (m-1)/2 \big\rfloor.$$

Теперь из (12) следует, что при $q \in 0:n-2$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+l) = 0 = V_*(qm+l), \qquad l \in \lfloor m/2 \rfloor + 1 : m-1.$$

Значит, при всех $q \in 0:n-1$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+l) = V_*(qm+l), \qquad l \in \lfloor m/2 \rfloor + 1 : m-1.$$

Предложение доказано. □

5°. Обозначим $\mu = \lfloor (m-1)/2 \rfloor$ и введём дискретные тригонометрические полиномы

$$h_{m,n}(j) = \frac{1}{m} \sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} \qquad \text{при нечётном } m \ (m = 2\mu + 1),$$

$$h_{m,n}(j) = \frac{1}{m} \Big(\cos \tfrac{\pi j}{n} + \sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} \Big) \qquad \text{при чётном } m \ (m = 2\mu + 2).$$

Отметим, что при всех m

$$h_{m,n}(ln) = \delta_m(l), \qquad l \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Действительно, при $m = 2\mu + 1$

$$h_{m,n}(ln) = \frac{1}{m} \Big(\sum_{k=-\mu}^{-1} \omega_m^{(k+m)l} + \sum_{k=0}^{\mu} \omega_m^{kl} \Big) =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{kl} = \delta_m(l).$$

При $m = 2\mu + 2$

$$h_{m,n}(ln) = \frac{1}{m} \Big((-1)^l + \sum_{k=-\mu}^{-1} \omega_m^{(k+m)l} + \sum_{k=0}^{\mu} \omega_m^{kl} \Big) =$$

$$= \frac{1}{m} \Big((-1)^l + \sum_{k=\mu+2}^{m-1} \omega_m^{kl} + \sum_{k=0}^{\mu} \omega_m^{kl} \Big).$$

Учитывая, что $\omega_m^{(\mu+1)l} = \omega_m^{(m/2)\,l} = \omega_2^l = (-1)^l$, приходим к (13).

В силу (13) тригонометрический полином

$$t_{m,n}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, h_{m,n}(j - pn)$$

удовлетворяет интерполяционному условию

$$t_{m,n}(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r \to \infty} S_{r,n}(j) = t_{m,n}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Принципиальным является следующее равенство:

$$\mathcal{F}_N(h_{m,n}) = V_* \,. \tag{14}$$

Проверим его. При нечётном m имеем

$$\big[\mathcal{F}_N(h_{m,n})\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1} h_{m,n}(j)\,\omega_N^{-kj} = \frac{1}{m}\sum_{s=-\mu}^{\mu}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{(s-k)j} = n\sum_{s=-\mu}^{\mu}\delta_N(s-k) =$$
$$= n\Big(\sum_{s=0}^{\mu}\delta_N(s-k) + \sum_{s=N-\mu}^{N-1}\delta_N(s-k)\Big) = V_*(k).$$

Аналогично при чётном m

$$\big[\mathcal{F}_N(h_{m,n})\big](k) = \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\omega_N^{(m/2)j} + \omega_N^{-(m/2)j}\Big)\,\omega_N^{-kj} + n\sum_{s=-\mu}^{\mu}\delta_N(s-k) =$$
$$= \frac{n}{2}\Big[\delta_N\big(k-\tfrac{m}{2}\big) + \delta_N\big(k-(N-\tfrac{m}{2})\big)\Big] + n\sum_{s=-\mu}^{\mu}\delta_N(s-k) = V_*(k).$$

Далее, согласно (14)

$$\big[\mathcal{F}_N(t_{m,n})\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{p=0}^{m-1} z(p)\,h_{m,n}(j-pn)\Big)\,\omega_N^{-k(j-pn)-kpn} =$$
$$= \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\,\omega_m^{-kp}\sum_{j=0}^{N-1} h_{m,n}(j)\,\omega_N^{-kj} =$$
$$= \big[\mathcal{F}_m(z)\big](k)\,\big[\mathcal{F}_N(h_{m,n})\big](k) = Z(k)\,V_*(k). \tag{15}$$

Учитывая формулу обращения для ДПФ, (2) и (15), получаем

$$\big|S_{r,n}(j) - t_{m,n}(j)\big| = \frac{1}{N}\Big|\sum_{k=0}^{N-1}\big(V_r(k) - V_*(k)\big)Z(k)\,\omega_N^{kj}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\big|V_r(k) - V_*(k)\big|\,\big|Z(k)\big|.$$

Остаётся сослаться на (9). Предложение доказано. □

6°. Итак, установлено, что пределом дискретного интерполяционного сплайна $S_{r,n}(j)$ при $r \to \infty$ является дискретный интерполяционный тригонометрический полином $t_{m,n}(j)$. Найдём предел $t_{m,n}(j)$ при $n \to \infty$.

Прежде всего покажем, что при $m = 2\mu + 1$

$$h_{m,n}(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \\ \dfrac{\sin(\pi j/n)}{m\,\sin(\pi j/N)}, & \text{если } j \in 1 : N-1, \end{cases} \tag{16}$$

и при $m = 2\mu + 2$

$$h_{m,n}(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \\ \frac{1}{m}\sin(\pi j/n)\operatorname{ctg}(\pi j/N), & \text{если } j \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{17}$$

При $j = 0$ формулы (16) и (17) очевидны. Пусть $j \in 1 : N-1$ и $m = 2\mu+1$. Имеем

$$\sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} = \frac{\omega_N^{-\mu j} - \omega_N^{(\mu+1)j}}{1-\omega_N^j} = \omega_N^{-\mu j}\,\frac{1-\omega_n^j}{1-\omega_N^j}\,.$$

Далее

$$\begin{aligned} 1-\omega_n^j &= \big(1-\cos(2\pi j/n)\big) - i\,\sin(2\pi j/n) = \\ &= -2i\,\sin(\pi j/n)\big[\cos(\pi j/n) + i\,\sin(\pi j/n)\big] = \\ &= -2i\,\sin(\pi j/n)\,\omega_{2n}^j. \end{aligned}$$

Аналогично

$$1-\omega_N^j = -2i\,\sin(\pi j/N)\,\omega_{2N}^j\,.$$

Значит,

$$\frac{1-\omega_n^j}{1-\omega_N^j} = \frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)}\,\omega_{2N}^{(m-1)j}. \tag{18}$$

Для завершения доказательства формулы (16) осталось учесть, что

$$\omega_N^{-\mu j}\,\omega_{2N}^{(m-1)j} = \omega_{2N}^{(-m+1)j}\,\omega_{2N}^{(m-1)j} = 1.$$

Теперь рассмотрим случай $j \in 1 : N-1$ и $m = 2\mu + 2$. Имеем

$$\sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} = \omega_N^{-(\mu+1)j}\,\frac{\omega_N^j - \omega_n^j}{1-\omega_N^j} = -\omega_{2n}^{-j} + \omega_{2n}^{-j}\,\frac{1-\omega_n^j}{1-\omega_N^j}\,.$$

В силу (18)

$$\sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} = -\omega_{2n}^{-j} + \omega_{2N}^{-j}\,\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)} =$$

$$= -\cos\tfrac{\pi j}{n} + i\,\sin\tfrac{\pi j}{n} + \bigl(\cos\tfrac{\pi j}{N} - i\,\sin\tfrac{\pi j}{N}\bigr)\,\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)} =$$

$$= -\cos\tfrac{\pi j}{n} + \cos\tfrac{\pi j}{N}\,\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)}\,.$$

Мнимая часть оказалась равной нулю. Последнюю формулу перепишем в виде

$$\cos\tfrac{\pi j}{n} + \sum_{k=-\mu}^{\mu}\omega_N^{kj} = \sin\tfrac{\pi j}{n}\,\operatorname{ctg}\tfrac{\pi j}{N}\,.$$

Поделив на m, придём к (17).

7°. Введём непрерывные m-периодические на $\mathbb{R}$ ядра Дирихле:

$$d_m(x) = \frac{\sin(\pi x)}{m\,\sin(\pi x/m)} \qquad \text{при нечётном } m,$$

$$d_m(x) = \tfrac{1}{m}\,\sin(\pi x)\operatorname{ctg}(\pi x/m) \qquad \text{при чётном } m.$$

Очевидно, что

$$d_m(j/n) = h_{m,n}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

и согласно (13)

$$d_m(l) = \delta_m(l), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Последнее равенство гарантирует, что непрерывная m-периодическая функция

$$u_m(x) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\,d_m(x-p)$$

удовлетворяет интерполяционному условию

$$u_m(l) = z(l), \qquad l \in 0:m-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Равномерно по $x \in [0,m]$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} t_{m,n}\bigl(\lfloor nx\rfloor\bigr) = u_m(x). \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$t_{m,n}\bigl(\lfloor nx\rfloor\bigr) - u_m(x) = \Bigl[t_{m,n}\bigl(\lfloor nx\rfloor\bigr) - u_m\Bigl(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\Bigr)\Bigr] + \Bigl[u_m\Bigl(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\Bigr) - u_m(x)\Bigr].$$

Согласно (19)

$$u_m\Bigl(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\Bigr) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\,d_m\Bigl(\tfrac{\lfloor nx\rfloor - pn}{n}\Bigr) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, h_{m,n}\big(\lfloor nx \rfloor - pn\big) = t_{m,n}\big(\lfloor nx \rfloor\big),$$

поэтому

$$\begin{aligned} t_{m,n}\big(\lfloor nx \rfloor\big) - u_m(x) &= u_m\big(\tfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}\big) - u_m(x) = \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\Big[d_m\big(\tfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} - p\big) - d_m(x-p)\Big]. \end{aligned} \tag{21}$$

Отметим, что $\lfloor nx \rfloor / n \in [0, m]$ при $x \in [0, m]$ и

$$-\frac{1}{n} = \frac{nx-1}{n} - x \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} - x \leqslant \frac{nx}{n} - x = 0.$$

Теперь (20) следует из (21) и равномерной непрерывности ядра Дирихле $d_m(x)$ на отрезке $[-m+1, m]$. □

8°. Технически сложное предложение 2 было, по существу, установлено в [4]. Мы привели усовершенствованное его доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические B-сплайны* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 4 (№ 22). С. 14–19.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

3. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).

4. Бер М. Г., Малозёмов В. Н. *Об интерполяции дискретных периодических данных* // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. № 4. С. 60–68.

ЦИКЛИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ

А. М. Дурягин В. Н. Малозёмов А. Б. Певный

13 февраля 2010 г.

1°. Напомним, что нормированный жёсткий фрейм $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ в $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ называется *циклическим*, если

$$\langle \varphi_{k+1}, \varphi_{s+1} \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle, \qquad k, s \in 0 : m-1, \tag{1}$$

где $\varphi_m = \varphi_0$. Таким образом, циклический фрейм это, во-первых, нормированный жёсткий фрейм и, во-вторых, для него выполняется соотношение (1).

Из результатов доклада [1], в котором рассмотрены более общие циклические фреймы, следует такое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для того чтобы система $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ векторов из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ была циклическим фреймом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась унитарная матрица U порядка n, такая, что*

$$\varphi_k = U^k \varphi_0\,, \qquad k \in 0 : m-1; \tag{2}$$

при этом матрица U должна обладать двумя дополнительными свойствами:

(i) *её собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть попарно различные корни степени m из единицы;*

(ii) *соответствующие ортонормированные собственные векторы $p_1, \ldots, p_n$ связаны с вектором φ_0 условием*

$$\big|\langle \varphi_0, p_j \rangle\big| = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad j \in 1 : n. \tag{3}$$

В данном докладе мы приведём примеры вещественных циклических фреймов.

2°. Рассмотрим вещественный гармонический фрейм [2]. При $n = 2\nu + 1$ положим

$$\varphi_k(1) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,; \quad \varphi_k(2j) = \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\cos\tfrac{2\pi kj}{m}\,, \quad \varphi_k(2j+1) = \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\sin\tfrac{2\pi kj}{m}\,, \tag{4}$$

$$j = 1, \ldots, \nu; \quad k \in 0 : m-1.$$

В частности,

$$\varphi_0 = \Big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\,, \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,, 0, \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,, 0, \ldots, \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,, 0\Big)^T. \tag{5}$$

Формула (4) определяет и φ_m, причём $\varphi_m = \varphi_0$.

Легко проверить, что гармонический фрейм (4) является циклическим. Действительно,

$$\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(i)\,\varphi_s(i) = \tfrac{1}{n} + \tfrac{2}{n}\sum_{j=1}^{\nu} \cos\tfrac{2\pi(k-s)j}{m}\,.$$

Видим, что скалярное произведение зависит только от разности $k - s$. Это гарантирует выполнение соотношения (1).

В данном случае для матрицы U из формулы (2) можно указать явное представление. Введём матрицу вращения

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Для неё справедливо равенство

$$B(\alpha)\,B(\beta) = B(\alpha+\beta). \tag{6}$$

Обозначим $B_j = B\big(\frac{2\pi j}{m}\big)$. Согласно (6)

$$B_j\,B_s = B_{j+s}\,. \tag{7}$$

Определим U как блочно-диагональную матрицу порядка $n = 2\nu + 1$:

$$U = \operatorname{diag}\big(1, B_1, B_2, \ldots, B_\nu\big). \tag{8}$$

Например, при $n = 5$ ($\nu = 2$)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & B_2 \end{bmatrix}.$$

Проверим, что для гармонического фрейма справедлива формула (2) с матрицей U вида (8). Согласно (7) имеем

$$U^k = \operatorname{diag}\big(1, B_1^k, B_2^k, \ldots, B_\nu^k\big) = \operatorname{diag}\big(1, B_k, B_{2k}, \ldots, B_{\nu k}\big).$$

Теперь равенство $U^k\varphi_0 = \varphi_k$, $k \in 0 : m-1$, следует из (5) и (4).

3°. Найдём собственные числа и соответствующие ортонормированные собственные векторы матрицы U вида (8).

Сначала разберёмся с матрицей $B(\alpha)$ при $\alpha \in (0, \pi)$. Её характеристический многочлен имеет вид $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$. Корнями этого многочлена являются числа $\lambda_1 = e^{i\alpha}$ и $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$. Найдём нормированный собственный вектор p_1, соответствующий собственному числу λ_1. Распишем подробно уравнение $B(\alpha)x = \lambda_1 x$, где $x = (x_1, x_2)^T$:

$$x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha = x_1\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big),$$
$$x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha = x_2\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big).$$

Учитывая, что $\alpha \in (0, \pi)$, получаем $x_2 = -ix_1$. Значит, $p_1 = \big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\big)^T$. Аналогично устанавливается, что собственному числу λ_2 соответствует нормированный собственный вектор $p_2 = \big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\big)^T$. Отметим, что векторы p_1 и p_2 не зависят от α.

Относительно матрицы B_j, $j \in 1 : \nu$, можно утверждать следующее: её собственными числами являются

$$\lambda_1 = \omega_m^j\,, \qquad \lambda_2 = \omega_m^{-j} = \omega_m^{m-j}\,;$$

соответствующие ортонормированные собственные векторы имеют вид

$$p_1 = \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{i}{\sqrt{2}}\big)^T, \qquad p_2 = \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{i}{\sqrt{2}}\big)^T.$$

Обратимся к блочно-диагональной матрице U вида (8). Нетрудно проверить, опираясь только на определения, что её собственными числами являются

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2j} = \omega_m^j\,, \quad \lambda_{2j+1} = \omega_m^{m-j}\,, \quad j = 1, \ldots, \nu; \tag{9}$$

соотвествующие ортонормированные собственные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 = e_1; \quad & p_{2j} = \big(0, \ldots, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{i}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\big)^T, \\ & p_{2j+1} = \big(0, \ldots, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{i}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\big)^T, \quad j = 1, \ldots, \nu, \end{aligned} \tag{10}$$

где индексы ненулевых компонент равны $2j$ и $2j+1$.

Собственные числа (9) суть корни степени m из единицы. Они попарно различны. Это следует из условий $n = 2\nu + 1$ и $n \leqslant m$, согласно которым при $j \in 1 : \nu$ выполняются неравенства

$$j \leqslant \nu = \tfrac{n-1}{2} \leqslant \tfrac{m-1}{2} < \tfrac{m}{2} \quad \text{и} \quad m - j > \tfrac{m}{2}\,.$$

Таким образом, подтверждена справедливость условия (i) предложения 1. Справедливость условия (ii) проверяется непосредственно.

4°. Следующее утверждение даёт способ построения других циклических фреймов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $n = 2\nu + 1$, матрица U имеет вид* (8) *и φ_0 — вектор из $\mathbb{R}^n$, у которого*

$$\big[\varphi_0(1)\big]^2 = \tfrac{1}{n}\,; \qquad \big[\varphi_0(2j)\big]^2 + \big[\varphi_0(2j+1)\big]^2 = \tfrac{2}{n}\,, \quad j = 1, \ldots, \nu. \tag{11}$$

Тогда векторы $\varphi_k = U^k \varphi_0$, $k \in 0 : m-1$, образуют циклический фрейм.

Доказательство. Воспользуемся предложением 1. В данном случае достаточно проверить только выполнение условия (ii). Это сделать просто. Действительно, согласно (10) и (11)

$$\begin{aligned}
&\big|\langle \varphi_0, p_1 \rangle\big| = \big|\varphi_0(1)\big| = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\\
&\big|\langle \varphi_0, p_{2j} \rangle\big|^2 = \big|\varphi_0(2j)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\varphi_0(2j+1)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big|^2 =\\
&\qquad\qquad = \tfrac{1}{2}\big([\varphi_0(2j)]^2 + [\varphi_0(2j+1)]^2\big) = \tfrac{1}{n}\,,\\
&\big|\langle \varphi_0, p_{2j+1} \rangle\big|^2 = \big|\varphi_0(2j)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\varphi_0(2j+1)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big|^2 = \tfrac{1}{n}\,,
\end{aligned}$$

что равносильно требуемому. □

5°. Укажем некоторое обобщение конструкции матрицы U.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $n = 2\nu + 1$ и*

$$U = \operatorname{diag}\big(1, B_{r(1)}, B_{r(2)}, \ldots, B_{r(\nu)}\big), \tag{12}$$

где попарно различные натуральные числа $r(j)$ удовлетворяют неравенству

$$r(j) < \tfrac{m}{2}\,, \qquad j \in 1 : \nu. \tag{13}$$

Если для начального вектора $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие (11), *то векторы $\varphi_k = U^k \varphi_0$, $k \in 0 : m-1$, образуют циклический фрейм.*

Доказательство. Собственными числами матрицы U вида (12) являются

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2j} = \omega_m^{r(j)}\,, \quad \lambda_{2j+1} = \omega_m^{m-r(j)}\,, \quad j = 1, \ldots, \nu. \tag{14}$$

Им соответствуют ортонормированные собственные векторы (10).

Собственные числа (14) попарно различны, поскольку наряду с (13) справедливо эквивалентное неравенство $m - r(j) > \frac{m}{2}$, $j \in 1 : \nu$. Значит, выполняется условие (i) предложения 1. Выполнение условия (ii) проверяется так же, как в предложении 2. □

6°. Рассмотрим случай чётного n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть* $n = 2\nu$ *и*

$$U = \operatorname{diag}\bigl(B_{r(1)}, \ldots, B_{r(\nu)}\bigr),$$

где, как и раньше, натуральные числа $r(j)$ *попарно различны и удовлетворяют неравенству* (13). *Если для компонент начального вектора* $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ *выполняется условие*

$$\bigl[\varphi_0(2j-1)\bigr]^2 + \bigl[\varphi_0(2j)\bigr]^2 = \tfrac{2}{n}\,, \quad j = 1, \ldots, \nu,$$

то векторы $\varphi_k = U^k \varphi_0$, $k \in 0 : m-1$, *образуют циклический фрейм.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml\#0121`).

2. Дурягин А. М., Соловьёва Н. А. *Вещественные гармонические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9 октября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml\#1009`).

ПРЕДЕЛ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Н. В. Чашников

13 марта 2010 г.

Пусть m — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический B-сплайн первого порядка как m-периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_1(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{при } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } x \in [1, m-1], \\ x - m + 1, & \text{при } x \in (m-1, m]. \end{cases}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_r(x) = \int_0^m P_{r-1}(x-t)\, P_1(t)\, dt, \qquad r = 2, 3, \ldots .$$

Пусть $z(0), z(1), \ldots, z(m-1)$ — фиксированные комплексные числа, а r — произвольное натуральное число. В [1] показано, что найдётся единственный сплайн вида

$$S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c(q)\, P_r(x-q), \tag{1}$$

являющийся решением интерполяционной задачи

$$S_r(l) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1. \tag{2}$$

Покажем, как найти предел сплайнов S_r при неограниченном возрастании r. Идея доказательства взята из [2], где установлен более общий результат.

1°. Разложим B-сплайн P_r в ряд Фурье.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$P_r(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m}\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\frac{m}{\pi s}\,\sin\frac{\pi s}{m}\Big)^{2r}\cos\frac{2\pi sx}{m}\,. \tag{3}$$

Доказательство. Проверим по индукции, что функции $P_r(x)$ — чётные. База индукции при $r = 1$ следует из определения функции $P_1(x)$. Сделаем индукционный переход. Для $r > 1$, принимая во внимание чётность $P_1(x)$, индукционное предположение о чётности $P_{r-1}(x)$ и m-периодичность этих функций, получаем

$$P_r(-x) = \int_0^m P_{r-1}(-x-t)\,P_1(t)\,dt = \int_0^m P_{r-1}(x+t)\,P_1(t)\,dt =$$

$$= \int_0^m P_{r-1}\big(x-(m-t)\big)\,P_1(m-t)\,dt = \int_0^m P_{r-1}(x-t)\,P_1(t)\,dt = P_r(x).$$

Чётность функций $P_r(x)$ доказана.

Ряд Фурье для $P_r(x)$ имеет вид

$$\frac{b_{r,0}}{m} + \frac{2}{m}\sum_{s=1}^{\infty} b_{r,s}\,\cos\frac{2\pi sx}{m}\,,$$

где

$$b_{r,s} = \int_0^m P_r(x)\,\cos\frac{2\pi sx}{m}\,dx.$$

Покажем, используя метод математической индукции, что

$$b_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = 0, \\ \big(\frac{m}{\pi s}\,\sin\frac{\pi s}{m}\big)^{2r} & \text{при } s > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Проверим базу индукции. Для $s = 0$ имеем

$$b_{1,0} = \int_0^m P_1(x)\,dx = 1.$$

Пусть $s > 0$. Тогда, используя чётность P_1 и интегрируя по частям, получаем

$$b_{1,s} = \int_0^m P_1(x)\,\cos\frac{2\pi sx}{m}\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,\cos\frac{2\pi sx}{m}\,dx =$$

$$= \frac{m}{\pi s}\int_0^1 (1-x)\, d\, \sin\frac{2\pi s x}{m} = \frac{m}{\pi s}\int_0^1 \sin\frac{2\pi s x}{m}\, dx =$$

$$= -\frac{m^2}{2\pi^2 s^2}\cos\frac{2\pi s x}{m}\Big|_0^1 = \frac{m^2}{2\pi^2 s^2}\left(1-\cos\frac{2\pi s}{m}\right) = \left(\frac{m}{\pi s}\sin\frac{\pi s}{m}\right)^2.$$

Сделаем индукционный переход. При $s \geqslant 0$ имеем

$$b_{r,s} = \int_0^m P_r(x)\cos\frac{2\pi s x}{m}\, dx = \int_0^m \left(\int_0^m P_{r-1}(x-t)\, P_1(t)\, dt\right)\cos\frac{2\pi s x}{m}\, dx =$$

$$= \int_0^m P_1(t)\left(\int_0^m P_{r-1}(x)\cos\frac{2\pi s(x+t)}{m}\, dx\right) dt =$$

$$= \int_0^m P_1(t)\left(\cos\frac{2\pi s t}{m}\int_0^m P_{r-1}(x)\cos\frac{2\pi s x}{m}\, dx -\right.$$

$$\left. - \sin\frac{2\pi s t}{m}\int_0^m P_{r-1}(x)\sin\frac{2\pi s x}{m}\, dx\right) dt.$$

Вычитаемый интеграл равен нулю в силу чётности функции $P_{r-1}(x)$. Поэтому

$$b_{r,s} = b_{r-1,s}\int_0^m P_1(t)\cos\frac{2\pi s t}{m}\, dx = b_{r-1,s}\, b_{1,s}\,.$$

Отсюда, воспользовавшись индукционным предположением, получим при $s = 0$

$$b_{r,0} = 1,$$

а при $s > 0$

$$b_{r,s} = \left(\frac{m}{\pi s}\sin\frac{\pi s}{m}\right)^{2r}.$$

Формула (4) доказана. Значит, правая часть (3) действительно является рядом Фурье для функции $P_r(x)$. Этот ряд при $r \geqslant 1$ сходится равномерно. Для завершения доказательства леммы осталось воспользоваться следующим утверждением (см., например, [3, с. 68]):

если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[0, m]$ функции $f(x)$ сходится равномерно, то сумма этого ряда совпадает на $[0, m]$ с $f(x)$. □

2°. Положим $\mu = \lfloor m/2 \rfloor$. В [4] были введены тригонометрические полиномы порядка μ:

$$d_m(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{\mu}\cos\frac{2\pi k x}{m} \qquad \text{при нечётном } m \ (m = 2\mu + 1),$$

$$d_m(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{\mu-1}\cos\frac{2\pi kx}{m} + \frac{\cos(\pi x)}{m} \qquad \text{при чётном } m \ (m = 2\mu).$$

Было показано, что

$$d_m(l) = \delta_m(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Определим Π_m как пространство чётных тригонометрических полиномов вида

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\mu} a_k \cos\frac{2\pi kx}{m}\,.$$

Полином $d_m(x)$, очевидно, принадлежит пространству Π_m.

ЛЕММА 2. *Для любого тригонометрического полинома $T(x)$ из пространства Π_m справедливо тождество*

$$T(x) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(x-q), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим правую часть (5) через $\eta(x)$. Ясно, что $\eta(x)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше μ. В силу чётности и m-периодичности $d_m(x)$ и $T(x)$ имеем

$$\eta(-x) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(-x-q) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(x+q) =$$
$$= \sum_{q=0}^{m-1} T(-q)\, d_m(x-q) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(x-q) = \eta(x).$$

Значит, $\eta(x)$ чётная фунция, поэтому $\eta(x)$ принадлежит пространству Π_m.

Для любого $l \in 0 : m-1$ имеем

$$\eta(l) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(l-q) = T(l).$$

Таким образом, числа l являются корнями чётного тригонометрического полинома $T(x) - \eta(x)$ порядка μ. Как известно, для любого натурального k функцию $\cos(kx)$ можно записать в виде алгебраического полинома степени k от $\cos x$. Поэтому найдётся полином $f(t)$ степени не выше μ, такой, что

$$T(x) - \eta(x) \equiv f\big(\cos\tfrac{2\pi x}{m}\big).$$

Следовательно, значения

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{m},\ \cos\frac{4\pi}{m},\ldots,\ \cos\frac{2\pi\mu}{m}$$

являются корнями полинома $f(t)$. Все эти значения различны и их количество равно $\mu+1$. Значит, полином $f(t)$ тождественно равен нулю, то есть $T(x)\equiv\equiv\eta(x)$.

Лемма доказана. □

3°. Пусть $h_r(x)$ — фундаментальный сплайн вида

$$h_r(x)=\sum_{q=0}^{m-1}c(q)\,P_r(x-q),$$

являющийся решением интерполяционной задачи

$$h_r(l)=\delta_m(l),\qquad l\in 0:m-1. \tag{6}$$

Напомним явную формулу для коэффициентов $c(q)$ (см. [1, теорема 1]). Положим

$$Z=\mathcal{F}_m(\delta_m)=1,$$

$$H(k)=\sum_{q=0}^{m-1}P_r(q)\,\omega_m^{-kq},\qquad k\in 0:m-1,$$

$$C(k)=\frac{Z(k)}{H(k)}=\frac{1}{H(k)},\qquad k\in 0:m-1.$$

Сигнал $c(q)$ может быть получен как обратное преобразование Фурье от сигнала C. Значения $H(k)$ вещественны в силу чётности сплайна P_r. Таким образом, сигнал $C(k)$ также вещественный, что влечёт чётность сигнала $c(q)$. Фундаментальный сплайн $h_r(x)$ является чётной функцией. Это проверяется так же, как чётность правой части формулы (5).

Ряд Фурье $h_r(x)$ имеет вид

$$\frac{a_{r,0}}{2}+\sum_{s=1}^{\infty}a_{r,s}\,\cos\frac{2\pi sx}{m}, \tag{7}$$

где

$$a_{r,s}=\frac{2}{m}\int_0^m h_r(x)\,\cos\frac{2\pi sx}{m}\,dx.$$

Вычислим эти коэффициенты:

$$a_{r,s} = \frac{2}{m}\sum_{q=0}^{m-1} c(q)\int_0^m P_r(x-q)\cos\frac{2\pi sx}{m}\,dx =$$

$$= \frac{2}{m}\sum_{q=0}^{m-1} c(q)\int_0^m P_r(x)\cos\frac{2\pi s\,(x+q)}{m}\,dx =$$

$$= \frac{2}{m}\sum_{q=0}^{m-1} c(q)\Big(\cos\frac{2\pi sq}{m}\int_0^m P_r(x)\cos\frac{2\pi sx}{m}\,dx -$$

$$- \sin\frac{2\pi sq}{m}\int_0^m P_r(x)\sin\frac{2\pi sx}{m}\,dx\Big).$$

Вычитаемый интеграл равен нулю в силу чётности функции P_r. Применяя лемму 1, получаем при $s = 0$

$$a_{r,0} = \sum_{q=0}^{m-1} c(q),$$

а при $s > 0$

$$a_{r,s} = \sum_{q=0}^{m-1} c(q)\cos\frac{2\pi sq}{m}\left(\frac{m}{\pi s}\sin\frac{\pi s}{m}\right)^{2r}.$$

Значит, ряд (7) сходится равномерно, поэтому его сумма совпадает с $h_r(x)$. Кроме того, для коэффициентов ряда при $s > 0$ справедлива оценка

$$|a_{r,s}| \leqslant \frac{C_r}{s^{2r}}\,, \tag{8}$$

где

$$C_r = \left(\tfrac{m}{\pi}\right)^{2r}\sum_{q=0}^{m-1}\big|c(q)\big|.$$

Выделим начало и конец ряда (7):

$$U_r(x) = \frac{a_{r,0}}{2} + \sum_{s=1}^{\mu} a_{r,s}\cos\frac{2\pi sx}{m}\,,$$

$$W_r(x) = \sum_{s=\mu+1}^{\infty} a_{r,s}\cos\frac{2\pi sx}{m}\,.$$

ЛЕММА 3. *Для натуральных r, отличных от единицы, справедливо неравенство*

$$\left|W_r(x)\right| \leqslant C\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^r, \qquad x \in [0,m], \tag{9}$$

где C — некоторая константа.

Доказательство. Известно (см. [1, теорема 2]), что фундаментальный сплайн $h_r(x)$ является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \int_0^m \left|f^{(r)}(x)\right|^2 dx \to \min, \\ f(l) = \delta_m(l), \quad l \in 0 : m-1, \\ f \in \widetilde{W}_2^r, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\widetilde{W}_2^r$ — пространство m-периодических функций, имеющих производную порядка r, суммируемую с квадратом на основном периоде $[0,m]$. Очевидно, что интерполяционный тригонометрический полином $d_m(x)$ удовлетворяет условиям задачи (10) при любом r. Поэтому справедливо неравенство

$$\int_0^m \left|h_r^{(r)}(x)\right|^2 dx \leqslant \int_0^m \left|d_m^{(r)}(x)\right|^2 dx. \tag{11}$$

Найдём явные выражения для обеих частей неравенства.

Продифференцируем ряд (7) почленно r раз:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}\left(\frac{2\pi s}{m}\right)^r \cos\left(\frac{2\pi s x}{m} + \frac{\pi r}{2}\right).$$

Этот ряд в силу оценки (8) сходится равномерно. Поэтому его сумма равна $h_r^{(r)}(x)$. Далее, в силу равенства Парсеваля для рядов Фурье (см. [3, с. 75])

$$\int_0^m \left|h_r^{(r)}(x)\right|^2 dx = \frac{m}{2}\sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^2\left(\frac{2\pi s}{m}\right)^{2r} = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi}{m}\right)^{2r}\sum_{s=1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2\,.$$

Тригонометрический полином $d_m(x)$ имеет вид

$$d_m(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s \cos\frac{2\pi s x}{m}\,.$$

По равенству Парсеваля

$$\int_0^m \left|d_m^{(r)}(x)\right|^2 dx = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi}{m}\right)^{2r}\sum_{s=1}^{\mu} s^{2r}\,\alpha_s^2\,.$$

На основании (11) получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2 \leqslant \sum_{s=1}^{\mu} s^{2r}\, \alpha_s^2 \leqslant \mu^{2r} \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\,. \tag{12}$$

Оценим сумму ряда $W_r(x)$:

$$\big|W_r(x)\big| \leqslant \sum_{s=\mu+1}^{\infty} |a_{r,s}| = \sum_{s=\mu+1}^{\infty} \big(s^r |a_{r,s}|\big)\, s^{-r}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\big|W_r(x)\big|^2 \leqslant \sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2 \sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{-2r}.$$

Для первого сомножителя правой части согласно (12) справедливо неравенство

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2 \leqslant \mu^{2r} \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\,.$$

Для второго сомножителя имеем

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{-2r} = \frac{1}{(\mu+1)^{2r}} \sum_{s=\mu+1}^{\infty} \Big(\frac{\mu+1}{s}\Big)^{2r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\mu+1)^{2r}} \sum_{s=\mu+1}^{\infty} \Big(\frac{\mu+1}{s}\Big)^{2} \leqslant \frac{1}{(\mu+1)^{2r-2}}\, \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Значит,

$$\big|W_r(x)\big|^2 \leqslant \Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{2r} \frac{\pi^2\,(\mu+1)^2}{6} \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\,.$$

Для завершения доказательства осталось извлечь корень из обеих частей последнего неравенства и положить

$$C = \frac{\pi(\mu+1)}{\sqrt{6}} \Big(\sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\Big)^{1/2}.$$

□

ЛЕММА 4. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} h_r(x) = d_m(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. По определению $h_r(x) = U_r(x) + W_r(x)$, причём из леммы 3 следует, что

$$\lim_{r\to\infty} W_r(x) = 0. \tag{13}$$

Принимая во внимание равенство (6), для $l \in 0 : m-1$ получаем

$$\lim_{r\to\infty} U_r(l) = \delta_m(l).$$

По определению $U_r(x)$ принадлежит пространству тригонометрических полиномов Π_m, поэтому, согласно лемме 2,

$$U_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} U_r(q)\, d_m(x-q).$$

Далее,

$$\lim_{r\to\infty} U_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} \delta_m(q)\, d_m(x-q) = d_m(x).$$

Воспользовавшись предельным соотношением (13), получим

$$\lim_{r\to\infty} h_r(x) = \lim_{r\to\infty} U_r(x) = d_m(x).$$

Лемма доказана. □

4°. Пусть $z(0), z(1), \ldots, z(m-1)$ — произвольные комплексные числа, $S_r(x)$ — сплайн вида (1), удовлетворяющий интерполяционным условиям (2).

ТЕОРЕМА. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, d_m(x-q).$$

Доказательство. Сплайн $S_r(x)$ можно представить в виде линейной комбинации сдвигов фундаментальных сплайнов:

$$S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, h_r(x-q).$$

В силу леммы 4

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, h_r(x-q) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, d_m(x-q).$$

Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty} S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, d_m(x-q),$$

что и требовалось. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).

2. M. von Golitschek. *On the Convergence of Interpolating Periodic Spline Functions of High Degree* // Numer. Math. 1972. V. 19. № 2. P. 146–154.

3. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* М.: Наука, 1961. 936 с.

4. Малозёмов В. Н. *Предельные теоремы теории дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 января 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0130`).

ОЦЕНКИ ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА

Р. Е. Афонин В. Н. Малозёмов А. Б. Певный

20 марта 2010 г.

Аннотация

Приводится доказательство теоремы Дельсарта для оценки снизу количества элементов сферического дизайна. Дан вывод оценок Дельсарта для количества элементов сферического дизайна.

1°. Основная теорема. Используем стандартное скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Считаем, что $n \geqslant 3$.

В работах [1, 2] введено понятие сферического дизайна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть t — натуральное число. Система единичных векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ называется сферическим t-дизайном, если выполняется равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} P(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i)$$

для всех полиномов $P(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

По мнению авторов [3] наиболее интересная задача теории дизайнов такова: для данных n, t найти сферический t-дизайн с минимальным числом элементов. Важная оценка снизу для $m = |\Phi|$ получена Ф. Дельсартом [1, 2].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический t-дизайн. Тогда*

$$m \geqslant C_{n+s-1}^{n-1} + C_{n+s-2}^{n-1} \quad \text{при } t = 2s, \tag{1}$$

$$m \geqslant 2\, C_{n+s-1}^{n-1} \quad \text{при } t = 2s+1. \tag{2}$$

2°. Полиномы Гегенбауэра. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются полиномы Гегенбауэра $P_k^{(\alpha,\alpha)}(x)$ степени k, ортогональные с весом $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ на отрезке $[-1,1]$, при $\alpha = (n-3)/2$. Обычно используется следующая нормировка [4]:

$$P_k^{(\alpha,\alpha)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(k+1)}.$$

Известна формула для квадрата нормы полиномов Гегенбауэра

$$\left\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\right\|^2 := \int\limits_{-1}^{1} w(x)\left[P_k^{(\alpha,\alpha)}(x)\right]^2 dx = \\ = \frac{2^{2\alpha+1}\,\Gamma^2(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+1)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+2\alpha+1)}.$$

Ещё раз подчеркнём, что нас интересует специальное значение параметра α:

$$\alpha = \frac{n-3}{2}.$$

Изменим нормировку полиномов Гегенбауэра. Положим

$$Q_k(x) = c_k\, P_k^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

где константа c_k выбирается так, чтобы

$$Q_k(1) = \left\|Q_k\right\|^2. \tag{3}$$

Перепишем равенство (3) в виде $P_k^{(\alpha,\alpha)}(1) = c_k\left\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\right\|^2$. Отсюда следует, что $c_k = P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)\,/\left\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\right\|^2$ и

$$Q_k(1) = \frac{\left[P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)\right]^2}{\left\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\right\|^2}.$$

С учётом выписанных формул придём к равенству

$$\|Q_k\|^2 = \frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)k!\,2^{n-2}}, \quad k = 0,1,\ldots \tag{4}$$

Полином $Q_0(x)$ равен постоянной Q_0. При $k=0$ из (3) и (4) получаем

$$Q_0 = \|Q_0\|^2 = \frac{(n-2)!}{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{n-2}}. \tag{5}$$

3°. Зональные сферические функции. Возьмём вектор $v \in S^{n-1}$. Функция $f(x) = Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)$, рассматриваемая на сфере S^{n-1}, называется зональной сферической функцией.

ЛЕММА 1. *Пусть $k \geqslant 1$. Для любого $v \in S^{n-1}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)\, dS_x = 0.$$

Доказательство. Интеграл обозначим I_k. При k нечётном функция $f(x) = Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)$ является нечётной на $\mathbb{R}^n$, поэтому $I_k = 0$.

Пусть k чётное, $k \geqslant 2$. Тогда Q_k содержит только чётные степени:

$$Q_k(u) = \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\, u^i.$$

Отсюда

$$I_k = \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i) \int\limits_{S^{n-1}} \big[\langle v, x\rangle\big]^i\, dS_x = \sigma_n \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\, c(i). \tag{6}$$

Интеграл из (6) вычислен в докладе [5]. Он равен $\sigma_n\, c(i)$, где

$$c(0) = 1; \qquad c(i) = \frac{(i-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+i-2)}, \quad i \geqslant 2.$$

Запишем условие ортогональности:

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_k(u)(1-u^2)^\alpha\, du = \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\, d(i) = 0, \tag{7}$$

где

$$d(i) = \int\limits_{-1}^{1} u^i (1-u^2)^\alpha\, du = 2\int\limits_{0}^{1} u^i (1-u^2)^\alpha\, du.$$

Вычислим последний интеграл. После замены $x = u^2$, $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ получим

$$d(i) = \int\limits_{0}^{1} x^{(i-1)/2}(1-x)^\alpha\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}+\alpha+1\right)}.$$

Положим теперь $\alpha = (n-3)/2$. Тогда последовательность $\{d(i)\}$ чудесным образом станет пропорциональной последовательности $\{c(i)\}$. Действительно, при $\alpha = (n-3)/2$

$$d(i) = \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+n}{2}\right)}.$$

У нас i — чётное, $i = 2\nu$. Применив ν раз формулу $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, получим

$$\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) = \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = (2\nu-1)!!\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^\nu},$$

$$\Gamma\left(\frac{i+n}{2}\right) = \Gamma\left(\nu + \frac{n}{2}\right) = n\,(n+2)\cdots(n+i-2)\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^\nu},$$

$$d(i) = \frac{(i-1)!!}{n\,(n+2)\cdots(n+i-2)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

В результате

$$d(i) = c(i)\,K(n), \qquad i = 0, 2, \ldots, k, \tag{8}$$

где $K(n)$ зависит только от n. (При $i = 0$ проверяется непосредственно.)

Окончательно в силу (6), (7), (8) интеграл I_k равен нулю. Действительно,

$$I_k = \sigma_n \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\,c(i) = \frac{\sigma_n}{K(n)} \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\,d(i) = 0.$$

Лемма доказана. □

4°. Необходимое условие сферического дизайна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический* t*-дизайн. Тогда выполняются равенства*

$$\sum_{i,j=1}^{m} Q_k\big(\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\big) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, t. \tag{9}$$

Доказательство. Функция

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle\varphi_i, x\rangle\big), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

является алгебраическим полиномом степени не выше k. По определению сферического t-дизайна и лемме 1

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} P(\varphi_j) = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x)\,dS = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle\varphi_i, x\rangle\big)\,dS = 0,$$

что равносильно (9). □

Замечание. Условие (9) является и достаточным условием сферического t-дизайна — см. статью В. А. Юдина [6].

5°. Оценка количества элементов сферического дизайна по теореме Дельсарта. Ф. Дельсарт [1, 2] предложил замечательный метод оценивания количества элементов сферического t-дизайна.

Определим $\mathscr{P}_t^+$ как множество полиномов степени не выше t, удовлетворяющих условиям

$$F(u) \geqslant 0 \text{ на } [-1,1]; \qquad F(1) = 1.$$

Каждый полином $F \in \mathscr{P}_t^+$ можно разложить по полиномам Гегенбауэра

$$F(u) = \sum_{k=0}^{t} F_k\, Q_k(u).$$

Для коэффициентов Фурье F_k справедлива формула

$$F_k = \frac{(F, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \quad k \in 0:t,$$

где $(\ \ ,\ \ )$ — скалярное произведение в $L_2[-1,1]$ с весом

$$w_n(u) = (1-u^2)^{(n-3)/2}.$$

Поскольку $Q_0 = \|Q_0\|^2$, то

$$F_0 = \int_{-1}^{1} F(u)\, w_n(u)\, du > 0. \tag{10}$$

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический* t*-дизайн, то*

$$m \geqslant \sup_{F \in \mathscr{P}_t^+} \frac{1}{F_0\, Q_0}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{P}_t^+$. Положим $S = \sum\limits_{i,j=1}^{m} F\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big)$. Имеем

$$S \geqslant \sum_{i=1}^{m} F\big(\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle\big) = m\, F(1) = m. \tag{12}$$

Вместе с тем, в силу (9)

$$S = \sum_{k=0}^{t} F_k \sum_{i,j=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big) = m^2\, F_0\, Q_0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует неравенство $m \geqslant 1/(F_0\, Q_0)$.

Теорема доказана. □

6°.Оценка в случае чётного t**.** Получим для правой части неравенства (11) оценку снизу. Сначала рассмотрим случай $t = 2s$. Обозначим через $\mathscr{R}_{2s}$ подмножество $\mathscr{P}_t^+$, состоящее из полиномов $F(u)$ вида $F(u) = [A(u)]^2$, где

$$A(u) = \sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(u), \quad A(1) = 1. \tag{14}$$

ЛЕММА 2. *Экстремальная задача*

$$b_{2s}(F) := \frac{1}{F_0} \to \sup_{F \in \mathscr{R}_{2s}}$$

имеет единственное решение

$$F^*(u) = \left[\frac{1}{L_t} \sum_{k=0}^{s} Q_k(u)\right]^2,$$

где $L_t = \sum\limits_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2$. *При этом* $b_{2s}(F^*) = L_t$.

Доказательство. Для полинома $F(u) = [A(u)]^2$ в силу (14), нормировки Q_k и неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned} 1 = F(1) &= \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(1)\right]^2 = \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, \|Q_k\|^2\right]^2 = \\ &= \left[\sum_{k=0}^{s} \big(a_k\, \|Q_k\|\big)\, \|Q_k\|\right]^2 \leqslant \sum_{k=0}^{s} a_k^2\, \|Q_k\|^2 \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Неравенство обращается в равенство только тогда, когда $a_k\, \|Q_k\| = \lambda\, \|Q_k\|$ при некотором λ и всех $k \in 0 : s$, т.е. когда

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_s = \lambda. \tag{16}$$

Далее по формуле (10)

$$F_0 = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(u)\right]^2 w_n(u)\, du.$$

В силу ортогональности

$$F_0 = \sum_{k=0}^{s} a_k^2\, \|Q_k\|^2. \tag{17}$$

Из (17) и (15) следует, что

$$\frac{1}{F_0} \leqslant \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2 = L_t.$$

Равенство достигается только при выполнении условия (16), что вместе с равенством $A(1) = 1$ приводит к формуле $\lambda = 1/L_t$. Остаётся отметить, что в силу (17)

$$b_{2s}(F^*) = \frac{1}{F_0^*} = L_t.$$

Лемма доказана. □

На основании (11) и леммы 2 заключаем, что при $t = 2s$ для количества элементов сферического t-дизайна справедливо неравенство $m \geqslant b_D(n, 2s)$, где

$$b_D(n, 2s) = \frac{1}{Q_0} \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2. \tag{18}$$

7°.Оценка в случае нечётного t**.** Обратимся к случаю $t = 2s + 1$. Обозначим $\mathscr{R}_{2s+1}$ подмножество $\mathscr{P}_t^+$, состоящее из полиномов $F(u)$ вида $F(u) = (1 + u)[A(u)]^2$, где

$$A(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}\, Q_{s-2k}(u), \quad A(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Полиномы Q_{s-2k} имеют одинаковую чётность. Аналогично (15) получаем

$$\begin{aligned} 1 = F(1) = 2\left[\sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}\, Q_{s-2k}(1)\right]^2 \leqslant \\ \leqslant 2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}^2\, \|Q_{s-2k}\|^2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Равенство достигается только, когда все a_{s-2k} равны между собой. Их общее значение обозначим λ. Из условия $A(1) = 1/\sqrt{2}$ следует, что $\lambda = \sqrt{2}/L_t$, где

$$L_t = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2.$$

Далее по формуле (10)

$$\begin{aligned} F_0 &= \int_{-1}^{1} (1+u)\,[A(u)]^2\, w_n(u)\, du = \\ &= \int_{-1}^{1} [A(u)]^2\, w_n(u)\, du = \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}^2\, \|Q_{s-2k}\|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Согласно (19)

$$\frac{1}{F_0} \leqslant L_t.$$

Равенство достигается на полиноме

$$F^*(u) = (1+u)\,\frac{2}{L_t^2}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} Q_{s-2k}(u)\right]^2.$$

При этом согласно (20)

$$b_{2s+1}(F^*) := \frac{1}{F_0^*} = L_t.$$

Для количества элементов сферического t-дизайна по теореме 2 получаем неравенство $m \geqslant b_D(n, 2s+1)$, где

$$b_D(n, 2s+1) = \frac{2}{Q_0} \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2. \tag{21}$$

Нижние границы $b_D(n, 2s)$ и $b_D(n, 2s+1)$ называются оценками Дельсарта (Delsarte bounds).

8°.Вычисление границы Дельсарта $b_D(n,t)$**.** С учетом формулы (5) перепишем формулу (4) в виде

$$\begin{aligned} \|Q_k\|^2 &= \frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{2^{n-2}\,\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)\,k!} = \\ &= Q_0\,\frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{(n-2)!\,k!} = \\ &= Q_0\,\frac{\big(k+(k+n-2)\big)\,(k+n-3)!}{(n-2)!\,k!} = \\ &= Q_0\left(\frac{(k+n-3)!}{(n-2)!\,(k-1)!} + \frac{(k+n-2)!}{(n-2)!\,k!}\right) = \\ &= Q_0\left(C_{k+n-3}^{k-1} + C_{k+n-2}^{k}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

При $k = 0$ считаем, что $C_{n-3}^{-1} = 0$.

Вычислим теперь величину (18). Согласно (22)

$$b_D(n, 2s) = \frac{1}{Q_0} \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2 = \sum_{k=0}^{s} \bigl(C_{k+n-3}^{k-1} + C_{k+n-2}^{k}\bigr). \tag{23}$$

Последовательным применением равенства $C_m^s = C_{m-1}^s + C_{m-1}^{s-1}$ получаем

$$C_m^s = C_{m-1}^s + C_{m-2}^{s-1} + C_{m-3}^{s-2} + \ldots + C_{m-s-1}^0 = \sum_{k=0}^{s} C_{m-s-1+k}^k$$

(учли, что $C_{m-s}^0 = 1 = C_{m-s-1}^0$). В частности,

$$\sum_{k=0}^{s} C_{k+n-2}^k = C_{n+s-1}^s = C_{n+s-1}^{n-1}\,, \tag{24}$$

$$\sum_{k=0}^{s} C_{k+n-3}^{k-1} = \sum_{k=1}^{s} C_{k+n-3}^{k-1} = \sum_{k=0}^{s-1} C_{k+n-2}^k = C_{n+s-2}^{n-1}\,.$$

Отсюда и из (23) следует равенство

$$b_D(n, 2s) = C_{n+s-1}^{n-1} + C_{n+s-2}^{n-1}\,,$$

что доказывает оценку (1).

Вычислим теперь величину (21):

$$b_D(n, 2s+1) = \frac{2}{Q_0} \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2j}\|^2 = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \bigl(C_{s-2j+n-3}^{s-2j-1} + C_{s-2j+n-2}^{s-2j}\bigr). \tag{25}$$

Рассмотрим два случая. Пусть $s = 2l$. Тогда $\lfloor s/2 \rfloor = l$ и в силу (24)

$$b_D(n, 2s+1) = 2\bigl[C_{s+n-2}^s + C_{s+n-3}^{s-1} + C_{s+n-4}^{s-2} + \ldots + C_{n-2}^0\bigr] = 2\,C_{n+s-1}^{n-1}.$$

Если же $s = 2l + 1$, то из формулы (25) получим ровно тот же результат:

$$b_D(n, 2s+1) = 2\,C_{n+s-1}^{n-1}\,.$$

Это доказывает оценку (2).

ПРИМЕР. При $n = 3$, $s = 2$, $t = 2s + 1$ получим

$$b_D(3, 5) = 2\,C_4^2 = 12.$$

В то же время набор из 12 вершин икосаэдра, вписанного в сферу S^2, является сферическим дизайном 5-го порядка. Значит, это минимальный сферический дизайн порядка 5 в $\mathbb{R}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Delsarte. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Reports Suppl. 1973. N. 10. P. 1–97.

2. Ph. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel. *Spherical codes and designs* // Geometricae Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

3. E. Bannai, A. Munemasa, B. Venkov. *The nonexistence of certain tight spherical designes* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 10. Вып. 4. С. 1–23.

4. Г. Сегё. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

5. Р. Е. Афонин, В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml\#0515`)

6. В. А. Юдин. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 3. С. 39–45.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ БЕЗЬЕ

В. Н. Малозёмов Я. В. Петухова

28 апреля 2010 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из статьи [1].

1°. Теория кривых Безье основана на свойствах алгебраических полиномов в форме Бернштейна [2]. В теории периодических кривых Безье аналогичную роль играют тригонометрические полиномы в форме Валле-Пуссена. Напомним определение таких полиномов.

Пусть n — натуральное число. Выражение

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left(C_{2n}^n\right)^{-1}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{2n} \tag{1}$$

называется *ядром Валле-Пуссена* порядка n [3, с. 26–35].

По формуле Эйлера

$$2\cos\frac{t}{2} = e^{it/2} + e^{-it/2},$$

так что

$$\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{2n} = \sum_{\alpha=0}^{2n} C_{2n}^{\alpha}\, e^{(it/2)\,(2n-\alpha)}\, e^{-(it/2)\,\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{2n} C_{2n}^{\alpha}\, e^{it\,(n-\alpha)} = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n-k}\, e^{ikt}.$$

Для ядра $b_n(t)$ получаем представление

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt}, \qquad f_{k,n} = \left(C_{2n}^n\right)^{-1} C_{2n}^{n-k}. \tag{2}$$

Отметим, что $f_{0,n} = 1$. Вектор коэффициентов $\mathbf{f}_n = (f_{k,n})_{k=-n}^{n}$ называется *спектром* ядра $b_n(t)$. На рис. 1 представлен спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 16$.

Учитывая, что $f_{-k,n} = f_{k,n}$, формулу (2) можно переписать в виде

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} f_{k,n}\cos(kt)\right). \tag{3}$$

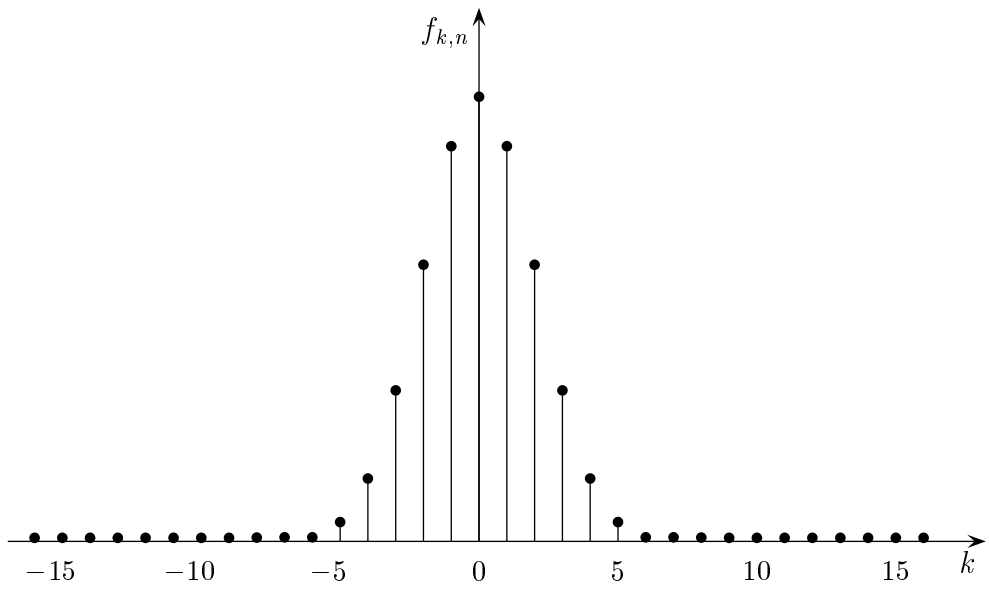


Рис. 1. Спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 16$

В свою очередь при $k \in 1:n$

$$f_{k,n} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} = \frac{(n-k+1)\cdots n}{(n+1)\cdots(n+k)} = \prod_{s=1}^{k} \frac{n-s+1}{n+s}\,.$$

На основании (1)–(3) заключаем, что ядро Валле-Пуссена $b_n(t)$ является неотрицательным чётным тригонометрическим полиномом порядка n с положительными коэффициентами.

2°. Введём узлы $t_j = 2\pi j/N$, где $N = 2n+1$.

ЛЕММА 1. *Справедливо тождество*

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t-t_j) \equiv 1. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Согласно (2) имеем

$$b_n(t-t_j) = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ik(t-t_j)} = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, \omega_N^{-kj}\, e^{ikt}. \tag{5}$$

Значит,

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t-t_j) = \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{-kj}\right\} = \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt}\,\delta_N(k) = f_{0,n} = 1,$$

что и требовалось установить. □

3°. Тригонометрический полином порядка n в форме Валле-Пуссена определяется следующим образом:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j\, b_n(t - t_j). \tag{6}$$

Здесь p_j — комплексные коэффициенты, которые называются также *полюсами*. Через $\mathbf{p} = (p_j)_{j=0}^{N-1}$ обозначим вектор коэффициентов.

Найдем спектр полинома $p(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеет место представление*

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt}, \tag{7}$$

где

$$c_k = f_{k,n} \left[\mathcal{F}_N(\mathbf{p})\right](k). \tag{8}$$

Доказательство. Согласно (6) и (5)

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} p_j \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, \omega_N^{-kj}\, e^{ikt} = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt} \sum_{j=0}^{N-1} p_j\, \omega_N^{-kj}.$$

Это соответствует формулам (7) и (8). □

Формула (8) позволяет перейти от представления (6) полинома $p(t)$ к представлению (7). Обратный переход связан с формулой обращения для дискретного преобразования Фурье:

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{c_k}{f_{k,n}}\, \omega_N^{kj}, \qquad j \in 0 : N-1. \tag{9}$$

Зафиксируем $s \in -n : n$ и рассмотрим конкретный спектр: $c_s = 1$ и $c_k = 0$ при $k \neq s$. Согласно (9) такой спектр порождает полюсы

$$p_j = \frac{1}{N} \frac{\omega_N^{sj}}{f_{s,n}}, \qquad j \in 0 : N-1.$$

На основании (7) и (6) приходим к соотношению

$$e^{ist} = \frac{1}{f_{s,n}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{sj}\, b_n(t - t_j), \qquad s \in -n : n.$$

Это соотношение, в частности, показывает, что любой тригонометрический полином порядка не выше n можно представить в форме Валле-Пуссена.

4°. Когда t изменяется от 0 до 2π, точка $p(t)$ вида (6) описывает замкнутую кривую на комплексной плоскости. Эта кривая называется *периодической кривой Безье порядка* n.

Перепишем формулу (6) так:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j)\, p_j.$$

При фиксированном t числа $b_n(t - t_j)$ неотрицательны и согласно (4) в сумме равны единице. Это значит, что точка $p(t)$ является выпуклой комбинацией полюсов. Отсюда следует замечательный факт: *вся периодическая кривая Безье лежит в выпуклой оболочке своих полюсов.*

На рис. 2 приведен пример периодической кривой Безье второго порядка.

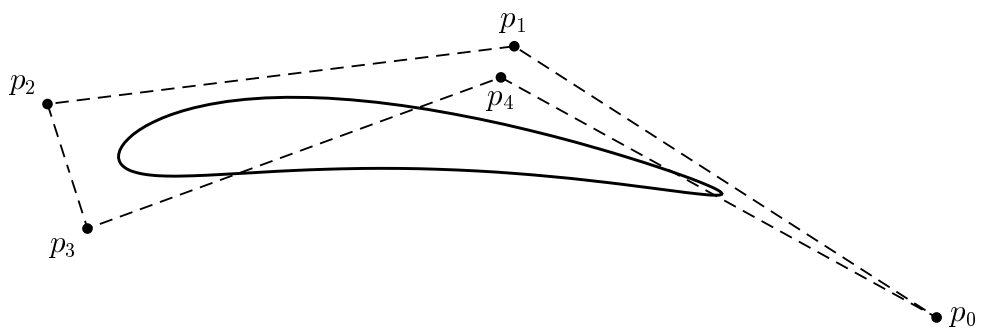


Рис. 2. Периодическая кривая Безье второго порядка

5°. Рассмотрим вопрос о повышении порядка периодической кривой Безье. Возьмем натуральное число $\hat{n} > n$ и обозначим $\widehat{N} = 2\hat{n} + 1$, $\hat{t}_j = 2\pi j/\widehat{N}$. Попытаемся представить полином $p(t)$ порядка n в виде полинома порядка $\hat{n}$. Запишем

$$p(t) = \sum_{j=0}^{\widehat{N}-1} \hat{p}_j\, b_{\hat{n}}(t - \hat{t}_j). \tag{10}$$

Согласно предложению 1

$$\sum_{j=0}^{\widehat{N}-1} \hat{p}_j\, b_{\hat{n}}(t - \hat{t}_j) = \frac{1}{\widehat{N}} \sum_{k=-\hat{n}}^{\hat{n}} \hat{c}_k\, e^{ikt}, \tag{11}$$

где $\hat{c}_k = f_{k,\hat{n}}\left[\mathcal{F}_{\widehat{N}}(\hat{\mathbf{p}})\right](k)$. Положим

$$\hat{c}_k = \begin{cases} (\widehat{N}/N)\, c_k & \text{при } k \in -n : n, \\ 0 & \text{при } |k| \in n+1 : \hat{n}. \end{cases}$$

Тогда правая часть (11) в силу (7) будет равна $p(t)$. С помощью формул (9) и (8) по спектру $(\hat{c}_k)_{k=-\hat{n}}^{\hat{n}}$ восстановим полюсы $(\hat{p}_j)_{j=0}^{\widehat{N}-1}$:

$$\begin{aligned}\hat{p}_j = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{c_k}{f_{k,\hat{n}}}\,\omega_{\widehat{N}}^{kj} = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}}\,\omega_{\widehat{N}}^{kj}\sum_{s=0}^{N-1}p_s\,\omega_N^{-ks} = \\ = \sum_{s=0}^{N-1}p_s\left(\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}}\,\frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj}}{\omega_N^{ks}}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Если ввести матрицу A порядка $\widehat{N}\times N$ с элементами

$$A_{j,s} = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}}\,\frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj}}{\omega_N^{ks}}, \qquad j\in 0:\widehat{N}-1, \quad s\in 0:N-1,$$

то формулу (12) можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{p}} = A\,\mathbf{p}. \tag{13}$$

Подведем итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Тригонометрический полином $p(t)$, определяемый формулой* (6), *при любом $\hat{n} > n$ допускает представление* (10), *в котором вектор коэффициентов $\hat{\mathbf{p}}$ пересчитывается по формуле* (13).

6°. Теперь покажем, что множество полюсов $(\hat{p}_j)_{j=0}^{\widehat{N}-1}$ при $\hat{n}\to\infty$ стремится к графику полинома $p(t)$. Зафиксируем $t\in[0,2\pi)$ и положим $j_{\hat{n}} = \lfloor\frac{\widehat{N}\,t}{2\pi}\rfloor$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\hat{n}\to\infty}\hat{p}_{j_{\hat{n}}} = p(t).$$

Доказательство. В силу (12) достаточно проверить, что при $s\in 0:N-1$

$$\lim_{\hat{n}\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}}\,\frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}}}{\omega_N^{ks}} = b_n(t-t_s).$$

Согласно (5) это равносильно проверке предельных соотношений

$$\lim_{\hat{n}\to\infty}\frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}}}{f_{k,\hat{n}}} = e^{ikt}, \qquad k\in -n:n.$$

Имеем

$$\omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}} = \exp\bigl(\tfrac{2\pi i}{\widehat{N}}\, k \,\bigl\lfloor \tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} \bigr\rfloor\bigr). \tag{14}$$

По определению целой части числа

$$\tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} \leqslant \bigl\lfloor \tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} \bigr\rfloor < \tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} + 1,$$

так что

$$t \leqslant \tfrac{2\pi}{\widehat{N}} \bigl\lfloor \tfrac{\widehat{N} t}{2\pi} \bigr\rfloor < t + \tfrac{2\pi}{\widehat{N}}\,.$$

Отсюда и из (14) следует, что при $k \in -n : n$

$$\lim_{\hat{n}\to\infty} \omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}} = e^{ikt}.$$

Остается отметить, сославшись на последнюю формулу из п. 1°, что $f_{k,\widehat{N}} \to\ 1$ при $\hat{n} \to \infty$ и тех же k. Предложение доказано. □

На рис. 3 иллюстрируется процедура повышения порядка периодической кривой Безье, изображенной на рис. 2.

7°. Для построения периодической кривой Безье нужно вычислить значения полинома $p(t)$ вида (6) на мелкой сетке $\tau_s = 2\pi s/M$, $s \in 0 : M-1$, где $M > N$. Согласно (7) имеем

$$p(\tau_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \omega_M^{ks} = \frac{1}{N} \Bigl(\sum_{k=0}^{n} c_k\, \omega_M^{ks} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k\, \omega_M^{(k+M)\, s} \Bigr) =$$

$$= \frac{1}{N} \Bigl(\sum_{k=0}^{n} c_k\, \omega_M^{ks} + \sum_{k=M-n}^{M-1} c_{k-M}\, \omega_M^{ks} \Bigr).$$

Положим

$$d_k = \begin{cases} (M/N)\, c_k & \text{при } k \in 0 : n, \\ \quad 0 & \text{при } k \in n+1 : M-n-1, \\ (M/N)\, c_{k-M} & \text{при } k \in M-n : M-1. \end{cases}$$

Тогда

$$p(\tau_s) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} d_k\, \omega_N^{ks}, \qquad s \in 0 : M-1.$$

Это значит, что $p(\tau_s)$ суть значения обратного преобразования Фурье от спектра $\mathbf{d} = (d_k)_{k=0}^{M-1}$.

Обозначим

$$h_k = \bigl[\mathcal{F}_N(\mathbf{p})\bigr](k), \qquad k \in 0 : N-1.$$

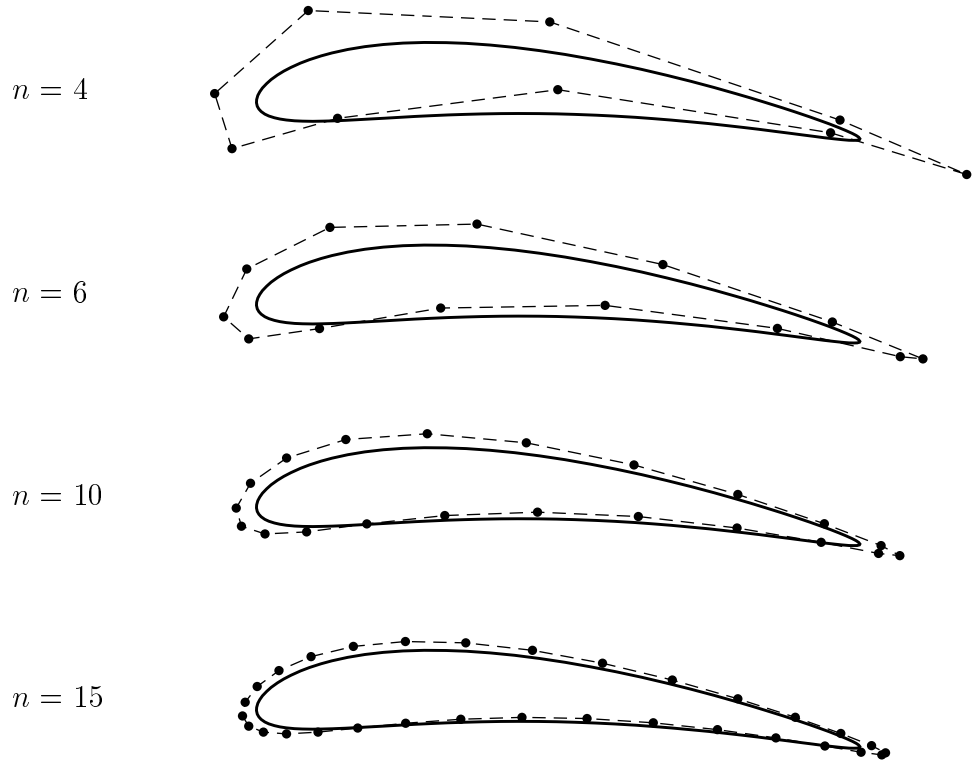


Рис. 3. Повышение порядка периодической кривой Безье

Отметим, что в силу (8), четности $f_{k,n}$ по k и N-периодичности h_k, при $k \in \in M - n : M - 1$ справедлива формула

$$c_{k-M} = f_{M-k,n}\, h_{k-M+N}.$$

Для спектра $\mathbf{d}$ получаем представление

$$d_k = \begin{cases} (M/N)\, f_{k,n}\, h_k & \text{при } k \in 0 : n, \\ \quad 0 & \text{при } k \in n+1 : M-n-1, \\ (M/N)\, f_{M-k,n} h_{k-M+N} & \text{при } k \in M-n : M-1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sánchez-Reyes J. *Periodic Bezier curves* // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26. P. 989-1005.

2. Григорьев М. И., Малоземов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962-1971.

3. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций.* М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО СФЕРЕ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р. Е. Афонин В. Н. Малозёмов А. Б. Певный

15 мая 2010 г.

В докладе представлены базовые сведения для занятий сферическими дизайнами.

1°. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ единичную сферу S^{n-1}:

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\}.$$

Перейдём к сферическим координатам

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\varphi_1\,, \\ x_2 &= \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2\,, \\ x_3 &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cos\varphi_3\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cdots\sin\varphi_{n-2}\,\cos\varphi_{n-1}\,, \\ x_n &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,\sin\varphi_{n-1}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Коротко формулы (1) можно записать так:

$$x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi),$$

где $\mathbf{\Phi}_n = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}, \Phi_n)^T$. Отметим, что

$$\mathbf{\Phi}_{n+1} = (\Phi_1\,, \ldots, \Phi_{n-1}\,, \Phi_n \cos\varphi_n\,, \Phi_n \sin\varphi_n)^T. \tag{2}$$

Считаем, что в формулах (1) точка $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ принадлежит параллелепипеду

$$D^{n-1} = \{\varphi \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; \varphi_k \in [0, \pi],\ k \in 1 : n-2;\ \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)\}.$$

Легко проверить, что для любого $\varphi \in D^{n-1}$ точка $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$, принадлежит S^{n-1}. Тем самым формулы (1) определяют отображение $\mathbf{\Phi}_n \colon D^{n-1} \to S^{n-1}$.

С каждой точкой $x \in S^{n-1}$ свяжем величины

$$r_k = \sqrt{\sum_{i=k}^{n} x_i^2}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

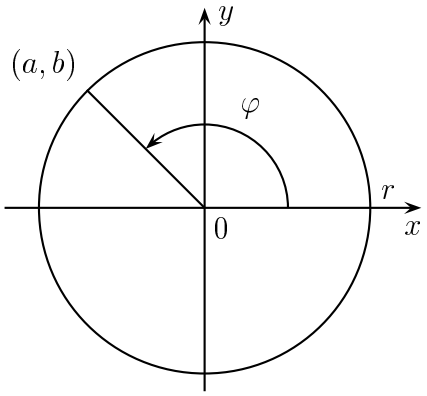
Ясно, что $r_1 = 1$ и $r_n = |x_n|$. Введём два множества

$$S_0^{n-1} = \big\{x \in S^{n-1} \;\big|\; r_k > 0 \text{ при } k \in 2 : n-1\big\},$$
$$D_0^{n-1} = \big\{\varphi \in \mathbb{R}^{n-1} \;\big|\; \varphi_k \in (0, \pi),\ k \in 1 : n-2;\ \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)\big\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Отображение $\mathbf{\Phi}_n$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между D_0^{n-1} и S_0^{n-1}.*

Доказательство. Если $\varphi \in D_0^{n-1}$ и $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$, то непосредственно проверяется, что $r_{n-1} > 0$, $r_{n-2} > 0$, $\ldots$, $r_2 > 0$, $r_1 = 1$, то есть что $x \in S_0^{n-1}$.

Теперь возьмём произвольную точку $x \in S_0^{n-1}$ и покажем, что существует единственный вектор $\varphi \in D_0^{n-1}$ со свойством $\mathbf{\Phi}_n(\varphi) = x$.



Воспользуемся следующим элементарным фактом. Пусть $\sqrt{a^2 + b^2} = r$, причём $r > 0$. Тогда найдётся единственный угол $\varphi \in [0, 2\pi)$, такой, что

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi. \tag{3}$$

Если и $b > 0$, то найдётся единственный угол $\varphi \in (0, \pi)$ со свойством (3). Это следует из определения синуса и косинуса (см. рисунок).

Имеем $\sqrt{x_1^2 + r_2^2} = 1$, причём $r_2 > 0$. Как было отмечено, найдётся единственный угол $\varphi_1 \in (0, \pi)$, такой, что

$$x_1 = \cos\varphi_1\,, \qquad r_2 = \sin\varphi_1\,.$$

Далее $\sqrt{x_2^2 + r_3^2} = r_2$, причём $r_2 > 0$ и $r_3 > 0$. Значит, найдётся единственный угол $\varphi_2 \in (0, \pi)$, удовлетворяющий условиям

$$x_2 = r_2\,\cos\varphi_2 = \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2\,,$$
$$r_3 = r_2\,\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,.$$

Продолжая аналогично, дойдём до равенства $\sqrt{x_{n-2}^2 + r_{n-1}^2} = r_{n-2}$, из которого следует существование единственного угла $\varphi_{n-2} \in (0, \pi)$, такого, что

$$x_{n-2} = r_{n-2}\,\cos\varphi_{n-2} = \sin\varphi_1\,\cdots\,\sin\varphi_{n-3}\,\cos\varphi_{n-2}\,,$$

$$r_{n-1} = r_{n-2}\,\sin\varphi_{n-2} = \sin\varphi_1\,\cdots\,\sin\varphi_{n-3}\,\sin\varphi_{n-2}\,.$$

На последнем шаге $\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} = r_{n-1}$, где $r_{n-1} > 0$. Следовательно, существует единственный угол $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$ со свойством

$$x_{n-1} = r_{n-1}\,\cos\varphi_{n-1} = \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cdots\,\sin\varphi_{n-2}\,\cos\varphi_{n-1}\,,$$
$$x_n = r_{n-1}\,\sin\varphi_{n-1} = \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cdots\,\sin\varphi_{n-2}\,\sin\varphi_{n-1}\,.$$

Теорема доказана. □

2°. Будем использовать скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$. Как отмечалось, вектор-функция $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$, задаваемая формулами (1), отображает D^{n-1} в S^{n-1}.

Согласно [1] (статья «Площадь») площадь σ_n сферы S^{n-1} определяется по формуле

$$\sigma_n = \int\limits_{D^{n-1}} \sqrt{\det(G(\varphi))}\,d\varphi,$$

где $G(\varphi)$ — матрица с элементами

$$G_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{\Phi}_n}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \mathbf{\Phi}_n}{\partial \varphi_j} \right\rangle, \qquad i, j \in 1 : n-1.$$

В общей ситуации формула для σ_n доказана в [2, с. 235].

Прокомментируем это определение. Введём n-мерные векторы

$$T_i^{(n)}(\varphi) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}_n(\varphi)}{\partial \varphi_i}\,, \qquad i \in 1 : n-1. \tag{4}$$

Матрица G с элементами $G_{ij} = \langle T_i^{(n)}, T_j^{(n)}\rangle$, $i, j \in 1 : n-1$, есть матрица Грама системы векторов (4). Поэтому G неотрицательно определена и $\det(G) \geqslant 0$.

Интеграл от функции $f(x)$ по сфере S^{n-1} определим формулой

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(x)\,dS \;=\; \int\limits_{D^{n-1}} f\big(\mathbf{\Phi}_n(\varphi)\big)\sqrt{\det(G(\varphi))}\,d\varphi. \tag{5}$$

Для теории сферических дизайнов вполне достаточно такого представления об интегралах по сфере.

Наша задача — вычислить функцию $I_n(\varphi) = \sqrt{\det(G(\varphi))}$. Решающую роль в этом играет ортогональность системы векторов (4).

ЛЕММА 1. *Система векторов* (4) *ортогональна для любого* $\varphi \in D^{n-1}$, *то есть*

$$\langle T_i^{(n)}(\varphi), T_j^{(n)}(\varphi)\rangle = 0 \quad \textit{при} \;\; i \neq j.$$

Доказательство. В дальнейшем аргумент φ будем опускать. Будем по индукции доказывать ортогональность системы $\{T_i^{(k)}\}_{i=1}^{k-1}$ для $k = 3, 4, \ldots, n$.

При $k = 3$

$$T_1^{(3)} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1\ \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_1\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix}, \qquad T_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1\ \cos\varphi_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Легко сосчитать, что

$$\left\langle T_1^{(3)}, T_2^{(3)} \right\rangle = 0. \tag{7}$$

Вектор $T_1^{(3)}$ касателен к меридиану на сфере S^2, а $T_2^{(3)}$ — касателен к параллели. Равенство (7) отражает тот факт, что параллели и меридианы на сфере ортогональны.

Осуществим переход от k к $k+1$. По индуктивному предположению при $i, j \in 1 : k-1$, $i \neq j$, будет

$$\left\langle T_i^{(k)}, T_j^{(k)} \right\rangle := \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \varphi_j} = 0.$$

Для тех же i, j согласно (2)

$$\left\langle T_i^{(k+1)}, T_j^{(k+1)} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi_j} \cdot \left(\cos^2\varphi_k + \sin^2\varphi_k\right) = 0.$$

Пусть теперь $i \in 1 : k-1$, $j = k$. Заметим, что компоненты $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ не зависят от φ_k, поэтому

$$T_k^{(k+1)} = \left(0, \ldots, 0,\ -\Phi_k\ \sin\varphi_k\ ,\ \Phi_k\ \cos\varphi_k\right)^T. \tag{8}$$

В то же время при $i \in 1 : k-1$

$$T_i^{(k+1)} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_i}, \ldots, \frac{\partial \Phi_{k-1}}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi_i}\ \cos\varphi_k\ , \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi_i}\ \sin\varphi_k\right)^T. \tag{9}$$

Составив скалярное произведение векторов (8) и (9), получим 0. Индуктивный переход завершён. Лемма доказана. □

Следствием леммы является диагональность матрицы G:

$$G = \operatorname{diag}\left(\left\|T_1^{(n)}\right\|^2, \left\|T_2^{(n)}\right\|^2, \ldots, \left\|T_{n-1}^{(n)}\right\|^2\right).$$

Отсюда

$$I_n(\varphi) := \sqrt{\det(G)} = \left\|T_1^{(n)}\right\| \cdot \left\|T_2^{(n)}\right\| \cdots \left\|T_{n-1}^{(n)}\right\|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $n \geqslant 3$ справедливо равенство*

$$I_n(\varphi) = \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\,, \qquad \varphi \in D^{n-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Будем последовательно вычислять $I_k(\varphi)$, $k = 3, \ldots, n$. При $k = 3$ векторы $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$ имеют вид (6), поэтому

$$\left\|T_1^{(3)}\right\| = 1, \qquad \left\|T_2^{(3)}\right\| = \sin\varphi_1\,, \qquad I_3(\varphi) = \sin\varphi_1\,.$$

Таким образом, элемент площади сферы S^2 равен $dS = \sin\varphi_1\, d\varphi_1\, d\varphi_2$. Это хорошо известный результат.

По индукции будем показывать, что при $k \in 3:n$

$$\left\|T_i^{(k)}\right\|^2 = \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{i-1}\,, \qquad i \in 1:k-1. \tag{11}$$

При $k = 3$ это выполнено. Предположим, что выполнено (11). Согласно (2)

$$\begin{aligned}\left\|T_i^{(k+1)}\right\|^2 &= \sum_{\nu=1}^{k-1}\Big(\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial\varphi_i}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\Phi_k}{\partial\varphi_i}\Big)^2(\cos^2\varphi_k + \sin^2\varphi_k) = \\ &= \left\|T_i^{(k)}\right\|^2 = \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{i-1}\,, \qquad i \in 1:k-1.\end{aligned}$$

Далее, $T_k^{(k+1)}$ имеет вид (8). Отсюда

$$\left\|T_k^{(k+1)}\right\|^2 = \Phi_k^2\left(\sin^2\varphi_k + \cos^2\varphi_k\right) = \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{k-1}\,.$$

Индуктивный переход завершён. Формула (11) доказана для любого $k \in 3:n$.

Полагая $k = n$, получаем

$$\left\|T_i^{(n)}\right\| = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{i-1}\,, \qquad i \in 1:n-1.$$

(При $i = 1$ это равенство надо понимать так: $\left\|T_1^{(n)}\right\| = 1$.) Вычислим произведение по всем $i \in 1:n-1$. Придём к равенству

$$I_n(\varphi) = \prod_{i=1}^{n-1}\left\|T_i^{(n)}\right\| = \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\,.$$

Теорема доказана. □

Теперь можно вычислять интегралы по сфере, пользуясь формулой

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(x)\, dS \;=\; \int\limits_{D^{n-1}} f\big(\mathbf{\Phi}_n(\varphi)\big)\, I_n(\varphi)\, d\varphi. \tag{12}$$

3°. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на S^{n-1}. Справедливо следующее интуитивно очевидное утверждение.

ЛЕММА 2. *Пусть P — ортогональная матрица размера $n \times n$. Тогда*

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(Px)\, dS \;=\; \int\limits_{S^{n-1}} f(x)\, dS.$$

Лемму можно доказать, пользуясь связью между интегралами по сфере и шару [3].

4°. Приведём пример вычисления интеграла по сфере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть k — неотрицательное чётное число, $k = 2s$. Тогда*

$$J(k) := \int\limits_{S^{n-1}} x_1^k\, dS = c(k)\, \sigma_n\,,$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}\,\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы S^{n-1} и

$$c(k) = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n}\,.$$

Доказательство. Согласно (10) и (12) имеем

$$J(k) = \int\limits_0^{\pi} \cos^k \varphi_1\, \sin^{n-2} \varphi_1\, d\varphi_1 \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-3} \varphi_2\, d\varphi_2 \cdots \int\limits_0^{\pi} \sin \varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}\,.$$

Как известно,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x\, \cos^q x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}\,,$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера, обладающая, в частности, следующими свойствами:

$$\Gamma(1) = 1; \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a) \quad \text{при} \;\; a > 0. \tag{13}$$

Учитывая это, в силу чётности k получаем

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^k \varphi_1\, \sin^{n-2} \varphi_1\, d\varphi_1 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^k \varphi_1\, \sin^{n-2} \varphi_1\, d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}\,.$$

Далее

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-\nu-1}\varphi_\nu\, d\varphi_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\nu+1}{2}\right)}, \qquad \nu = 2,\dots,n-2;$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} = 2\pi.$$

После умножения придём к формуле

$$J(k) = 2\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3} = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}. \tag{14}$$

По определению $J(0) = \sigma_n$, так что $c(0) = 1$ и

$$\sigma_n = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^n / \Gamma(n/2).$$

Пусть $k \geqslant 2$. Упростим формулу (14). В силу (13)

$$\Gamma\left(\tfrac{k+1}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{k-1}{2}+1\right) = \tfrac{k-1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k-1}{2}\right) = \tfrac{k-1}{2}\,\tfrac{k-3}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k-3}{2}\right) =$$
$$= \dots = \tfrac{(k-1)(k-3)\cdots 1}{2^s}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(k-1)!!}{2^s}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(\tfrac{k+n}{2}\right) = \tfrac{k+n-2}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k+n-2}{2}\right) = \tfrac{k+n-2}{2}\,\tfrac{k+n-4}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k+n-4}{2}\right) =$$
$$= \dots = \tfrac{(k+n-2)(k+n-4)\cdots n}{2^s}\,\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).$$

Значит,

$$J(k) = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^n \frac{(k-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)\,\Gamma(n/2)} = \sigma_n \prod_{j=0}^{s-1}\frac{2j+1}{2j+n}.$$

Предложение доказано. □

Отметим, что $J(k) = 0$ при неотрицательных нечётных k.

5°. Пусть $k_1,\dots,k_n$ — неотрицательные чётные числа и

$$\left|k\right| = k_1 + \dots + k_n.$$

Аналогично предыдущему, но технически чуть сложнее, вычисляется интеграл Дирихле

$$J(k_1,\dots,k_n) := \int\limits_{S^{n-1}} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\, dS =$$

$$= 2\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|k|+n}{2}\right)} =$$
$$= \frac{(k_1-1)!!\cdots(k_n-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+|k|-2)}\,\sigma_n\,.$$

(По определению $(-1)!!=1$.) Эта формула выведена также в [3] — оригинальным методом, без использования сферических координат.

Интеграл Дирихле определён при всех неотрицательных k_j, $j\in 1:n$. Если хотя бы одно из k_j нечётно, то $J(k_1,\ldots,k_n)=0$.

6°. Возьмём произвольный ненулевой вектор $v\in\mathbb{R}^n$ и чётное число k, $k\geqslant 2$. Вычислим интеграл Гильберта–Сонина

$$H(k)=\int\limits_{S^{n-1}}\left[\langle v,x\rangle\right]^k dS.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство*

$$H(k)=\sigma_n\,c(k)\|v\|^k. \tag{15}$$

Доказательство. По лемме 2

$$H(k)=\int\limits_{S^{n-1}}\left[\langle v,Px\rangle\right]^k dS, \tag{16}$$

где P — любая ортогональная матрица. Положим $v_0=v/\|v\|$ и построим ортогональную матрицу P, такую, что $P^Tv_0=e_1$. В этом случае

$$\langle v,Px\rangle=\langle P^Tv,x\rangle=\|v\|\langle P^Tv_0,x\rangle=\|v\|\langle e_1,x\rangle=\|v\|x_1\,.$$

Теперь (15) следует из (16) и предложения 1.

Поясним, как строится матрица P. Условие $P^Tv_0=e_1$ равносильно условию $Pe_1=v_0$. Значит, в качестве первого столбца матрицы P нужно взять единичный вектор v_0. Остальные $n-1$ столбцов выбираются произвольно, но так, чтобы система, состоящая из n столбцов матрицы P, образовывала ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$. □

Отметим, что $H(k)=0$ при неотрицательных нечётных k.

Предложение 2 может быть доказано непосредственно, без использования леммы 2, опираясь только на формулу для интеграла Дирихле (см. [4], п°. **676**, 11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия. Т. 4. М., 1984.

2. Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. *Курс метрической геометрии.* М.–Ижевск: ИКИ, 2004.

3. J. A. Baker. *Integration over spheres and the divergence theorem for balls* // Amer. Math. Monthly. 1997. V. 104. No. 1. P. 36–47.

4. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Том III. М., 1960.

ТРИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЗАЙНОВ

Р. Е. Афонин А. Б. Певный

22 мая 2010 г.

Доказывается эквивалентность трёх определений сферических t-дизайнов. Этот результат был установлен ранее в статье В. А. Юдина [1].

1°. Зафиксируем натуральные числа $n \geqslant 2$ и $t \geqslant 1$. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть

$$S^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| = 1\right\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

В работе [1] приведены три определения сферических t-дизайнов. Напомним эти определения и установим их эквивалентность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если выполнено равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} P(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{1}$$

для любого полинома $P(x)$ степени не выше t. Здесь $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ — площадь сферы S^{n-1}.

Второе определение связано с полиномами Гегенбауэра $Q_k(u)$ степени k. Их основное свойство — ортогональность на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$w_n(u) = \left(1 - u^2\right)^{(n-3)/2}.$$

Свойство ортогональности записывается в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_k(u)\, Q_l(u)\, w_n(u)\, du = 0 \quad \text{при} \;\; k \neq l.$$

Это свойство определяет полиномы Q_k с точностью до множителя. В данном докладе множитель не играет никакой роли и поэтому не будем его фиксировать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если для любого $k = 1, 2, \dots, t$ выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big) = 0 \qquad \forall\, x \in S^{n-1}. \tag{2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^k = \begin{cases} 0, & k \text{ — нечётное, } k \leqslant t, \\ c_k\|x\|^k, & k \text{ — чётное, } k \leqslant t, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$c(0) = 1; \qquad c(k) = \frac{(k-1)!!}{n\,(n+2)\cdots(n+k-2)} \quad \text{при } k \text{ чётном, } k \geqslant 2. \tag{4}$$

З а м е ч а н и е. При $k = 0$ пользуемся естественными соглашениями $[\langle \varphi_i, x\rangle]^0 = 1$ и $\|x\|^0 = 1$. Поэтому при $k = 0$ равенство (3) тривиально.

При чётном $k \geqslant 2$ равенство (3) иногда называется тождеством Варинга, по имени английского математика Э. Варинга (1734–1798), поставившего задачу о представлении $\|x\|^k$ в виде суммы k-х степеней линейных форм (см. [2]).

2°. Вспомогательные леммы. Первая лемма в [2] приписывается Д. Гильберту (без точной ссылки).

ЛЕММА 1. *Для любого фиксированного $\varphi \in \mathbb{R}^n$ и чётного $k \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S^{n-1}} \big[\langle \varphi, x\rangle\big]^k\, dS_x = c(k)\,\sigma_n\|\varphi\|^k. \tag{5}$$

Доказательство приводится в докладе [4].

ЛЕММА 2. *Для любого $\varphi \in S^{n-1}$ справедливы равенства*

$$\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle \varphi, x\rangle\big)\, dS_x = 0, \qquad k = 1, 2, \dots\,. \tag{6}$$

Доказательство приводится в докладе [3].

3°. Эквивалентность трёх определений сферического дизайна.

ТЕОРЕМА. *Определения* 1, 1, 2 эквивалентны.

Доказательство. Доказательство проведём по следующей схеме: (1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (1). Эти три этапа пройдем в основном следуя В. А. Юдину [1], но с некоторыми изменениями для достижения большей ясности.

I. Пусть выполнено равенство (1) для любого полинома $P(x)$ степени не выше t. Зафиксируем $y \in S^{n-1}$ и $k \in 1 : t$. Рассмотрим полином $P(x) = Q_k(\langle x, y\rangle)$ степени k. Запишем равенство (1)

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x)\,dS.$$

Подставим выражение для $P(x)$ и воспользуемся леммой 2. Получим

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, y\rangle\big) = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle x, y\rangle\big)\,dS_x = 0,$$

откуда следует (2).

II. Пусть выполнено (2), то есть

$$\sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big) = 0 \quad \forall\, x \in S^{n-1} \ \text{ и } \ \forall\, k \in 1 : t.$$

Возьмем теперь произвольное $k \in 0 : t$ и рассмотрим два случая.

Число k — нечётное, $k = 2s + 1$. Тогда u^k разлагается по нечётным полиномам Гегенбауэра:

$$u^k = \sum_{j=0}^{s} d_j\, Q_{2j+1}(u).$$

Отсюда

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s} d_j \sum_{i=1}^{m} Q_{2j+1}\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big) = 0.$$

Число k — чётное, $k = 2s$. Тогда

$$u^k = \sum_{j=0}^{s} d_j\, Q_{2j}(u).$$

Отсюда при любом $x \in S^{n-1}$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle\varphi_i, x\rangle\big]^k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s} d_j \sum_{i=1}^{m} Q_{2j}\big(\langle\varphi_i, x\rangle\big).$$

При $j \in 1:s$ последняя сумма равна нулю в силу (2). При $j = 0$ полином $Q_0(u)$ равен постоянной Q_0, поэтому

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle\varphi_i, x\rangle\big]^k = d_0\, Q_0 \qquad \forall\, x \in S^{n-1}. \tag{7}$$

Проинтегрируем обе части (7) по сфере S^{n-1}. В силу леммы 1 придём к равенству

$$c(k)\,\sigma_n = d_0\, Q_0\, \sigma_n\,,$$

откуда $d_0\, Q_0 = c(k)$. Для произвольного $x \neq \mathbb{O}$ подставим в (7) вектор $x/\|x\|$. Придём к равенству (3).

III. Пусть выполнены соотношения (3). Для проверки (1) нам будет удобно использовать одну конструкцию из статьи [5].

Для любого $k \in 0:t$ рассмотрим пространство $\mathscr{P}_{n,k}$ однородных полиномов от n переменных степени k. Полиномы $f, g \in \mathscr{P}_{n,k}$ запишем в виде

$$f(x) = \sum_{|i|=k} a_i\, x^i, \qquad g(x) = \sum_{|i|=k} b_i\, x^i,$$

где $i = (i_1, \ldots, i_n)$ — мультииндекс, $|i| = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$, $x^i = x_1^{i_1}\, x_2^{i_2}\, \cdots\, x_n^{i_n}$. Нулевой полином обозначаем $\mathbb{O}$. Введём скалярное произведение в $\mathscr{P}_{n,k}$:

$$\big[f, g\big] = \sum_{|i|=k} \frac{a_i\, b_i}{d_i}\,, \quad \text{где} \;\; d_i = \frac{k!}{i_1!\, i_2! \cdots i_n!}\,.$$

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ введём полином

$$\rho_\varphi^{(k)}(x) = \big[\langle\varphi, x\rangle\big]^k = \big[\varphi_1\, x_1 + \varphi_2\, x_2 + \cdots + \varphi_n\, x_n\big]^k.$$

По полиномиальной формуле

$$\rho_\varphi^{(k)}(x) = \sum_{|i|=k} d_i\, \varphi^i\, x^i. \tag{8}$$

Отсюда для любого $f \in \mathscr{P}_{n,k}$

$$\big[\rho_\varphi^{(k)}, f\big] = \sum_{|i|=k} \frac{d_i\, \varphi^i\, a_i}{d_i} = f(\varphi). \tag{9}$$

Перейдём к проверке равенства (1). Произвольный полином $P(x)$ степени не выше t можно представить в виде суммы однородных полиномов:

$$P(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_t(x),$$

где $f_k \in \mathscr{P}_{n,k}$, $k \in 0 : t$. Поэтому равенство (1) достаточно проверить для полиномов $\{f_k\}$.

Пусть k — нечётное, $k \leqslant t$. Тогда в силу (3)

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle\varphi_i, x\rangle\big]^k \equiv 0,$$

что равносильно равенству

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\rho_{\varphi_i}^{(k)} = \mathbb{O}. \tag{10}$$

Умножим (10) скалярно на f_k. Получим в силу (9)

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\rho_{\varphi_i}^{(k)}, f_k\big] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_k(\varphi_i) = \ 0 \ = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} f_k(x)\,dS,$$

где интеграл равен нулю в силу нечётности $f_k(x)$.

Для $f_0(x) \equiv const$ равенство (1) примет вид $1 = 1$.

Пусть k — чётное, $k \in 2 : t$. Введём полином

$$\omega_k(x) = \|x\|^k = \big(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\big)^{k/2},$$

принадлежащий пространству $\mathscr{P}_{n,k}$. Равенство (3) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\rho_{\varphi_i}^{(k)} = c(k)\,\omega_k\,. \tag{11}$$

Умножим обе части (11) скалярно на f_k. Получим

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\rho_{\varphi_i}^{(k)}, f_k\big] = c(k)\big[\omega_k, f_k\big]. \tag{12}$$

Левая часть этого равенства равна $\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} f_k(\varphi_i)$. Вычислим правую часть (12).

По лемме 1

$$\int\limits_{S^{n-1}} \rho_{\varphi}^{(k)}(x)\,dS_\varphi \ = \int\limits_{S^{n-1}} \big[\langle x, \varphi\rangle\big]^k\,dS_\varphi = \ c(k)\,\sigma_n\,\omega_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Умножим (13) скалярно на f_k:

$$\Big[\int\limits_{S^{n-1}} \rho_\varphi^{(k)}(x)\, dS_\varphi\,,\ f_k\Big] = \sigma_n\, c(k)\big[\omega_k, f_k\big]. \tag{14}$$

Из равенства (8) получаем представление

$$\int\limits_{S^{n-1}} \rho_\varphi^{(k)}(x)\, dS_\varphi \ = \sum_{|i|=k} d_i\, M_i\, x^i,$$

где

$$M_i \ = \int\limits_{S^{n-1}} \varphi^i\, dS_\varphi\,.$$

Полином f_k запишем в виде $f_k(x) = \sum\limits_{|i|=k} a_i\, x^i$. Тогда в (14) левая часть принимает вид

$$\sum_{|i|=k} \frac{d_i\, M_i\, a_i}{d_i} \ = \int\limits_{S^{n-1}} \sum_{|i|=k} a_i\, \varphi^i\, dS_\varphi \ = \int\limits_{S^{n-1}} f_k(\varphi)\, dS_\varphi\,.$$

В интеграле заменим φ на x. На основании (14) и (12) приходим к равенствам

$$\frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} f_k(x)\, dS_x = c(k)\big[\omega_k, f_k\big] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_k(\varphi_i).$$

Тем самым проверено, что равенство (1) выполнено для всех полиномов f_k, $k \in 0 : t$, следовательно, и для полинома $P(x)$.

Теорема доказана. □

4°. Одно свойство сферических дизайнов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть система* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ *является сферическим* t*-дизайном. Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, t, \tag{15}$$

где Q_k *— полином Гегенбауэра степени* k.

Равенство (15) сразу следует из определения 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Юдин. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 3. С. 39–45.

2. B. Reznick. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No 463. P. 1–155.

3. Р. Е. Афонин, В. Н. Малоземов, А. Б. Певный. *Оценки Дельсарта для количества элементов сферического дизайна* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 20 марта 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0320`)

4. Н. О. Котелина, А. Б. Певный. *Эквивалентные определения сферических дизайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0404`)

5. B. Venkov. *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens. Designs sphériques et Formes Modulaires. Enseign. Math. Géneve. 2001. P. 10–86.

ОЦЕНКА СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н. О. Котелина

29 мая 2010 г.

Приводится теорема Дельсарта для оценки снизу числа элементов сферического дизайна и её модификация, использующая только чётные полиномы. Рассматривается соответствующая сеточная задача линейного программирования и приводятся результаты расчётов.

1°. Обозначения и предварительные сведения. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть

$$S^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| = 1\right\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть t — натуральное число. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} P(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{1}$$

для всех полиномов $P(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

Одной из важных задач теории дизайнов является нахождение для данных n и t сферического t-дизайна с минимальным количеством элементов (см., например, [4]). Важная оценка снизу для $m = |\Phi|$ была получена Ф. Дельсартом ([1, 5]). Формулировка и доказательство теоремы Дельсарта используют полиномы Гегенбауэра.

2°. Полиномы Гегенбауэра и теорема Дельсарта. Зафиксируем натуральное $n \geqslant 2$. Рассмотрим вес

$$w_n(u) = (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}, \qquad u \in [-1,1].$$

Пусть $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов Гегенбауэра. Она обладает свойством ортогональности с весом $w_n(u)$

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_k(u)\, Q_s(u)\, w_n(u)\, du = 0, \qquad k \neq s.$$

Будем считать, что выполняется следующее условие нормировки

$$Q_k(1) = 1.$$

Для полиномов Гегенбауэра справедливо рекуррентное соотношение

$$Q_0(u) \equiv 1, \qquad Q_1(u) = u,$$
$$\big(k+n-2\big)\, Q_{k+1}(u) = \big(2k+n-2\big)\, u\, Q_k(u) - k\, Q_{k-1}(u).$$

Из него следует, что

$$u\, Q_k(u) = \frac{(k+n-2)\, Q_{k+1}(u) + k\, Q_{k-1}(u)}{2k+n-2}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Обозначив

$$\alpha_k = \frac{k+n-2}{2k+n-2} \quad \text{и} \quad \beta_k = \frac{k}{2k+n-2},$$

получим

$$u\, Q_k(u) = \alpha_k\, Q_{k+1}(u) + \beta_k\, Q_{k-1}(u), \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Заметим, что при $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ числа α_k и β_k положительные.

Ф. Дельсарт [5] в 1973 г. предложил замечательный метод оценивания количества элементов сферического дизайна порядка t. Зафиксируем натуральное $d > t$. Пусть $\mathcal{P}_d^+$ — множество алгебраических полиномов степени не выше d, удовлетворяющих условиям

$$F(x) \geqslant 0 \quad \text{для всех } x \in [-1,1] \text{ и } F(1) > 0.$$

Каждый полином $F(x)$ можно разложить по полиномам Гегенбауэра

$$F(x) = \sum_{k=0}^{d} F_k\, Q_k(x),$$

где коэффициенты Фурье F_k определяются следующей формулой

$$F_k = \frac{(F, Q_k)}{\|Q_k\|^2}, \qquad k \in 0 : d.$$

Здесь $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в $L_2[-1,1]$ с весом $w_n(u)$, $\|Q_k\|^2 = (Q_k, Q_k)$. Введём множество

$$M(n,t,d) = \bigl\{F \in \mathcal{P}_d^+ \bigm| F_k \leqslant 0,\ k \in t+1 : d\bigr\}.$$

ТЕОРЕМА 1 (Дельсарт [5]). *Пусть* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический дизайн порядка* t. *Тогда*

$$m \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0} \;\middle|\; F \in M(n,t,d)\right\}, \tag{3}$$

где F_0 *— нулевой коэффициент Фурье полинома* $F(x)$.

Замечание. Теорему Дельсарта можно переформулировать в следущем виде. Обозначим $b(n,t)$ минимальное количество элементов сферического дизайна порядка t в пространстве $\mathbb{R}^n$ (при условии, что хотя бы один такой сферический дизайн существует). Тогда справедливо неравенство

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0} \;\middle|\; F \in M(n,t,d)\right\},$$

где F_0 — нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

Для оценки снизу количества элементов сферического t-дизайна можно также использовать модификацию теоремы 1, использующую только чётные полиномы.

3°. Модификация теоремы Дельсарта, использующая только чётные полиномы. Пусть везде дальше t нечётное, $t = 2s+1$. Введём класс полиномов

$$\widehat{M}(n,t,d) := \bigl\{F \in M(n,t,d) \bigm| F(-u) = F(u)\ \ \forall\, u \in [-1,1]\bigr\}.$$

Тогда справедлива теорема, которая впервые появилась в работе [3]. Ниже приведено более подробное её доказательство.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо неравенство*

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{2F(1)}{F_0} \;\middle|\; F \in \widehat{M}(n,t,d)\right\}, \tag{4}$$

где F_0 *— нулевой коэффициент Фурье полинома* $F(x)$.

Доказательство. Возьмём $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$. Докажем, что $b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0}$.

Введём полином $F^*(u) = (1+u)\,\widehat{F}(u)$. Проверим, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. Так как $\widehat{F}(u)$ неотрицательный на $[-1,1]$ полином и $\widehat{F}(1) > 0$, то F^* тоже будет неотрицательным на $[-1,1]$ и $F^*(1) > 0$. Рассмотрим коэффициенты Фурье для F^*. При чётном k интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку равен нулю. Получаем

$$F_k^* = \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1} \widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du + \int_{-1}^{1} u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du\right\} = \widehat{F}_k\,.$$

При нечётном k воспользуемся соотношением (2):

$$\begin{aligned} F_k^* &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1} \widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du + \int_{-1}^{1} u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du\right\} = \\ &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1} u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du = \\ &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1} \widehat{F}(u)\big[\alpha_k\,Q_{k+1}(u) + \beta_k\,Q_{k-1}(u)\big]w_n(u)\,du = \\ &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\Big[\alpha_k\,\big\|Q_{k+1}\big\|^2\,\widehat{F}_{k+1} + \beta_k\,\big\|Q_{k-1}\big\|^2\,\widehat{F}_{k-1}\Big]. \end{aligned}$$

Проверим, что

$$F_k^* \leqslant 0, \qquad k \in t+1 : d+1.$$

Пусть k чётное, $k \geqslant t+1$. Тогда

$$F_k^* = \widehat{F}_k \leqslant 0.$$

Пусть k нечётное, $k \geqslant t+1$. Тогда $k-1$, $k+1$ чётные и $k-1$, $k+1 \geqslant t+1$, так как t нечётное. Поскольку $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$, то $\widehat{F}_{k-1} \leqslant 0$, $\widehat{F}_{k+1} \leqslant 0$ и, следовательно, $F_k^* \leqslant 0$. Из этого следует, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. По оценке Дельсарта (3) получаем, что

$$b(n,t) \geqslant \frac{F^*(1)}{F_0^*}\,, \tag{5}$$

причём

$$F_0^* = \frac{1}{\|Q_0\|^2}\int_{-1}^{1} \big(1+u\big)\,\widehat{F}(u)\,w_n(u)\,du = \widehat{F}_0\,, \qquad F^*(1) = 2\widehat{F}(1).$$

Следовательно, (5) можно переписать в виде

$$b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0}\,. \tag{6}$$

Переходя к супремуму по $\widehat{F}$ из класса $\widehat{M}(n,t,d)$, получаем оценку (4).

Теорема доказана. □

4°. Сеточная задача линейного программирования. Для данных n, t, используя оценку Дельсарта (4), оценим величину $b(n,t)$. Будем предполагать, как и ранее, что t нечётное, $t = 2s+1$. Выберем $d > s$ и равномерную сетку на $[0,1]$. Положим

$$u_i = \frac{i-1}{M_0}, \qquad i = 1, \dots, M_0 + 1.$$

Задача оценивания $b(n,t)$ сводится к нахождению полинома $F(u) \in \widehat{M}(n,t,2d)$ вида

$$F(u) = F_0 + \sum_{k=1}^{d} F_k\, Q_{2k}(u),$$

максимизирующего $F(1)$, при условии $F_k \leqslant 0$, $k \geqslant s+1$. При этом F_0 будем фиксировать, взяв равным 1. Запишем соответствующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &L(F_1, \dots, F_d) := 2F(1) = 2 + 2(F_1 + F_2 + \dots + F_d) \to \max, \\ &F(u_i) = 1 + \sum_{k=1}^{d} F_k\, Q_{2k}(u_i) \geqslant 0, \qquad i \in 1 : M_0 + 1, \\ &F_0 = 1, \\ &F_k \leqslant 0, \qquad k \in s+1 : d. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $(F_1^*, \dots, F_d^*)$ — оптимальное решение (7), то $F^*(u) = 1 + \sum_{k=1}^{d} F_k^*\, Q_{2k}(u)$ — оптимальный полином. Для того, чтобы на отрезке $[0,\ 1]$ выполнялось условие неотрицательности, введём величину

$$\varepsilon = -\min\bigl\{F^*(u) \bigm| u \in [0,\ 1]\bigr\},$$

и рассмотрим полином

$$\widetilde{F}(u) = F^*(u) + \varepsilon.$$

Заметим, что $\widetilde{F}(u) \geqslant 0$ на $[0,\ 1]$ и $\widetilde{F}(u) \in \widehat{M}(n,t,d)$. Коэффициенты $\widetilde{F}$ и F^* связаны соотношениями

$$\widetilde{F}_k = F_k^*, \quad k = 1 : d, \qquad \widetilde{F}_0 = F_0^* + \varepsilon.$$

По оценке Дельсарта (4)

$$b(n,t) \geqslant \frac{2\widetilde{F}(1)}{\widetilde{F}_0} = \frac{2(F(1)+\varepsilon)}{1+\varepsilon} = \frac{L^* + 2\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

где $L^* = L(F_1^*, \dots, F_d^*)$ — максимальное значение целевой функции.

5°. Модифицированный симплекс-метод. В задаче (7) представим

$$\begin{aligned} &F_k = F_k' - F_k'', && F_k' \geqslant 0,\ F_k'' \geqslant 0, && k \in 1:s;\\ &F_k = -F_k'', && F_k'' \geqslant 0, && k \in s+1:d. \end{aligned}$$

Добавим переменные z_i, $i \in 1 : M_0 + 2$, и запишем задачу, эквивалентную (7):

$$\begin{aligned} &\widetilde{L}(F_1,\dots,F_d) := -2F(1) = -2 - 2\sum_{k=1}^{s}(F_k' - F_k'') + 2\sum_{k=s+1}^{d} F_k'' \to \min,\\ &F_0 + \sum_{k=1}^{s} Q_{2k}(u_i)\left(F_k' - F_k''\right) - \sum_{k=s+1}^{d} Q_{2k}(u_i)\,F_k'' - z_i = 0, \quad i \in 1 : M_0 + 1; \qquad (8)\\ &F_0 = 1,\\ &F_k' \geqslant 0, \quad k \in 1:s; \quad F_k'' \geqslant 0, \quad k \in 1:d, \quad z_i \geqslant 0, \quad i \in 1 : M_0 + 1. \end{aligned}$$

Введём индексные множества $M = 1 : M_0+2$, $D = 1 : d$ и рассмотрим матрицу $A[M, D]$ с элементами

$$\begin{aligned} &A[i,k] = Q_{2k}(u_i), && i \in 1 : M_0 + 1, \quad k \in 1:d;\\ &A[M_0 + 2, k] = 0, && k \in 1:d. \end{aligned}$$

Тогда систему ограничений в задаче (8) можно переписать в виде

$$F_0\,\mathbf{1}[M] + \sum_{k=1}^{s}\left(F_k' - F_k''\right)A[M,k] - \sum_{k=s+1}^{d} F_k'' A[M,k] - \sum_{i=1}^{M_0+1} z_i\,e_i = b[M],$$

где

$$\mathbf{1}[M] = (1,\dots,1)^T, \qquad b[M] = (0,\dots,0,1)^T.$$

Задачу (8) будем решать с помощью модифицированного симплекс-метода.

Укажем начальный базисный план

$$F_0 = 1, \quad z_i = 1 \quad \text{при} \ \ i \in 1 : M_0 + 1;$$

остальные переменные равны нулю. Проиндексируем неизвестные в задаче (8). Пусть x — массив неизвестных в задаче (8). Положим

$$x[k] = F_k', \quad k \in 1:s; \quad x[0] = F_0\,; \quad x[-k] = F_k'', \quad k \in 1:d;$$
$$x[s+i] = z_i\,, \quad i \in 1 : M_0 + 1.$$

Тогда множество базисных индексов N' для выбранного нами начального базисного плана выглядит следующим образом:

$$N' = \left\{0, s+1, \dots, s+M_0+1\right\}, \qquad \left|N'\right| = M_0 + 2.$$

Столбцы, соответствующие базисным неизвестным, линейно независимы. Это следует из того, что для базисной матрицы $A[M, N']$ можно указать обратную базисную матрицу $B[N', M]$. Базисная матрица и обратная к ней при $M_0 = 4$ имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

При составлении программы мы не будем хранить в памяти компьютера всю матрицу коэффициентов, достаточно хранить матрицу $A[M, D]$.

Обратим внимание на то, как в нашей программе будут вычисляться оценки.

Возьмём границу $barrier = 10^{-14}$. Будем продолжать вычисления, пока максимальная оценка max остаётся не меньше $barrier$. Оценки будем вычислять по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &\varepsilon[F'_k] = y[M]\,A[M,k] + 2 && \text{при } k \in 1:s; \\ &\varepsilon[F''_k] = -\varepsilon[F'_k] && \text{при } k \in 1:s; \\ &\varepsilon[F''_k] = -y[M]\,A[M,k] - 2 && \text{при } k \in s+1:d; \\ &\varepsilon[z_i] = y[M](-e_i) = -y[i] && \text{при } i \in 1:M_0+1. \end{aligned}$$

6°. Результаты работы программы. Результаты работы программы поместим в таблицу. В ней K — наименьшее известное количество элементов сферического дизайна, приведенное в [3]. Там же указан источник, где описан сферический дизайн с K элементами, например, при $n = 4$, $t = 11$, дизайн со 120 элементами описан в [2]; $b_D(n, t)$ — оценка Дельсарта, вычисляемая по следующей формуле (см. [1, 5])

$$b_D(n, t) = 2C_{n+s-1}^{n-1} \quad \text{для } t = 2s + 1.$$

Таблица

n	t	d	M_0	L^*	ε	$\frac{L^*+2\varepsilon}{1+\varepsilon}$	$b_D(n,t)$	K
2	3	2	100	4	0	4	4	4
3	5	3	100	12.006	$7.17e-004$	11.99	12	12
4	3	2	100	8	0	8	8	8
4	5	3	100	20.007	0.002	19.97	20	24
4	7	5	100	41.1	$7.54e-004$	41.07	40	46
4	7	5	200	41.1	$1.81e-004$	41.09	40	46
4	9	7	100	73.64	0.006	73.20	70	86
4	11	11	100	120.05	0.06	119.33	112	120
4	19	19	1000	499.35	0.002	498.61	440	720
8	7	4	100	240	0.001	239.70	240	240
8	11	8	800	1856	$2.28e-004$	1855.50	1584	2400
8	13	12	1000	4360.7	$7.02e-004$	4357.7	3432	24240
8	15	16	500	9191.5	0.005	9140	6864	26400
12	5	3	100	156.08	$6.34e-004$	155.98	156	756
12	7	4	100	728.52	0.002	727.08	728	756
12	9	6	600	2939.80	$2.28e-4$	2939.10	2730	8064
12	11	7	1000	10604	$1.05e-4$	10602	8736	50400

ЛИТЕРАТУРА

1. Delsarte P., Goetals J. M., Seidel J. J. *Spherical codes and designs* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

2. Андреев Н. Н. *Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере* //Матем. заметки. Сер. 2000. Т. 67. № 4. С. 489–497.

3. de la Harpe P., Pache C., Venkov B. *Construction of spherical cubature formulas, using lattices* // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18. Вып. 1. С. 162–186.

4. Bonnai E., Munemasa A., Venkov B. *The nonexistence of certain tight spherical designs* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.

5. Delsarte P. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Reports (Suppl.). 1973. V. 10.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАУССА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ И КРИТЕРИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА

Р. Е. Афонин А. Б. Певный

28 августа 2010 г.

Приводится простое доказательство теоремы о представлении однородного полинома от n переменных через гармонические полиномы. Эта теорема используется для доказательства критерия сферического дизайна в терминах сферических функций.

1°. Через $V_k(x)$ и $W_k(x)$ будем обозначать соответственно произвольный однородный полином степени k от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и произвольный однородный гармонический полином степени k. Гармонический полином удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta W_k = \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_n^2} = 0.$$

Используем также обозначение $r^2 = \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Следующую теорему можно найти в [1] и [2].

ТЕОРЕМА 1 (представление Гаусса)**.** *Однородный полином степени k допускает представление (и притом единственное) следующего вида*

$$V_k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} r^{2j}\, W_{k-2j}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ПРИМЕР. В случае $n = 2$ найдём представление полинома

$$V_2(u, v) = u^2 + 6uv - 2v^2.$$

Оно имеет вид

$$V_2(u, v) = W_2(u, v) + \left(u^2 + v^2\right) C,$$

где C — константа. Полином

$$W_2(u, v) = \left(1 - C\right) u^2 + 6uv - \left(2 + C\right) v^2$$

будет гармоническим при $C = -\dfrac{1}{2}$. Получаем представление Гаусса:

$$V_2(u,v) = \frac{3}{2}\left(u^2 - v^2\right) + 6uv - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right).$$

Любой однородный гармонический полином второй степени является линейной комбинацией гармонических полиномов $u^2 - v^2$ и uv (см. далее следствие из теоремы 1).

Перед доказательством теоремы установим четыре вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1 (формула Эйлера). *Справедливо тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial V_k}{\partial x_i}(x) = kV_k(x).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = V_k(\lambda x)$. Тогда

$$\varphi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial V_k}{\partial x_i}(\lambda x) \;\Rightarrow\; \varphi'(1) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial V_k}{\partial x_i}(x). \tag{2}$$

С другой стороны, в силу однородности $V_k(x)$ выполнено равенство

$$\varphi(\lambda) = \lambda^k V_k(x),$$

поэтому

$$\varphi'(\lambda) = k\,\lambda^{k-1} V_k(x) \;\Rightarrow\; \varphi'(1) = kV_k(x). \tag{3}$$

Приравнивая правые части (2) и (3), получим требуемое тождество. □

ЛЕММА 2. *Пусть $f(x)$ — однородный полином степени k. Тогда*

$$\Delta(r^2 f) = (2n + 4k)f + r^2 \Delta f. \tag{4}$$

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Delta(r^2 f) = 2nf + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \Delta f.$$

По формуле Эйлера имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf,$$

откуда и вытекает равенство (4). □

СЛЕДСТВИЕ. *Для произвольного натурального числа s справедлива формула*

$$\Delta(r^{2s}f) = s\big[2n + 4k + 4(s-1)\big]\, r^{2s-2}f + r^{2s}\Delta f. \tag{5}$$

Доказательство проведём индукцией по s. При $s = 1$ равенство (5) совпадает с (4). Допустим, что при некотором $s \geqslant 2$

$$\Delta(r^{2s-2}f) = \big(s-1\big)\big[2n + 4k + 4(s-2)\big]\, r^{2s-4}f + r^{2s-2}\Delta f. \tag{6}$$

Применим теперь лемму 2 к однородному полиному $r^{2s-2}f$ степени $k + 2s - 2$. Получим с учётом (6)

$$\begin{aligned}\Delta(r^{2s}f) &= \big(2n + 4k + 8s - 8\big)\, r^{2s-2}f + r^2\Delta(r^{2s-2}f) = \\ &= s\big[2n + 4k + 4s - 4\big]\, r^{2s-2}f + r^{2s}\Delta f,\end{aligned}$$

что совпадает с (5). □

Линейное пространство однородных полиномов степени k от n переменных обозначим $Hom(n,k)$. Вычислим его размерность $d(n,k) = \dim Hom(n,k)$.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$d(n,k) = C^k_{n+k-1}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Произвольный полином $V_k \in Hom(n,k)$ можно представить в виде

$$V_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x_1^i\, q_i(x_2,\ldots,x_n),$$

где q_i — однородный полином степени $k-i$ от $n-1$ переменных $x_2,\ldots,x_n$. Отсюда

$$d(n,k) = \sum_{i=0}^{k} d(n-1,k-i). \tag{8}$$

Справедливость формулы (7) доказывается индукцией по n. При $n = 1$ равенство (7) справедливо: $d(1,k) = 1 = C^k_{1+k-1}$.

Допустим, что $d(n-1,k) = C^k_{n+k-2}$ и установим (7). Имеем в силу (8)

$$d(n,k) = \sum_{i=0}^{k} C^{k-i}_{n+k-i-2} = C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-3} + \cdots + C^0_{n-2}\,. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}C^k_{n+k-1} &= C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-2} = C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-3} + C^{k-2}_{n+k-3} = \cdots \\ &\cdots = C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-3} + \cdots + C^0_{n-2}\,,\end{aligned}$$

что совпадает с (9). Лемма доказана. □

Будем говорить, что линейное пространство L является прямой суммой подпространств L_1 и L_2 (записывается в виде равенства $L = L_1 \dotplus L_2$), если каждый элемент $v \in L$ представляется в виде $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$, и это представление единственно. Условие единственности равносильно условию $L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{O}\}$.

Через $\mathcal{W}(n,k)$ обозначим линейное пространство однородных гармонических полиномов $W_k(x)$ степени k от n переменных. Следующее утверждение доказано в [1]. Мы приведём упрощённое его доказательство.

ЛЕММА 4. *Пусть $k \geqslant 2$. Справедливо разложение в прямую сумму*

$$Hom(n,k) = \mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2 Hom(n,k-2), \tag{10}$$

где $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ и

$$r^2 Hom(n,k-2) = \big\{P(x) \;\big|\; P(x) = r^2\, Q(x),\, Q \in Hom(n,k-2)\big\}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\mathcal{W}(n,k) \cap r^2 Hom(n,k-2) = \{\mathbb{O}\}, \tag{11}$$

где $\mathbb{O}$ — полином, все коэффициенты которого равны нулю. Полином

$$P \in r^2 Hom(n,k-2), \quad P \neq \mathbb{O},$$

можно представить в виде

$$P(x) = r^{2m}\, Q(x),$$

где $Q \in Hom(n,k-2m)$, $m \in 1 : \lfloor k/2 \rfloor$ и $Q(x)$ не делится на r^2. Допустим, что $P \in \mathcal{W}(n,k)$, т.е. $\Delta P = \mathbb{O}$. По формуле (5)

$$\Delta P = m\big[2n + 4(k-2m) + 4(m-1)\big]\, r^{2m-2} Q + r^{2m} \Delta Q = \mathbb{O}.$$

Отсюда $Q = C\, r^2 \Delta Q$, где $C = const \neq 0$, значит Q делится на r^2, что противоречит условию.

Противоречие доказывает равенство (11). Теперь для проверки (10) достаточно установить, что

$$d(n,k) = \dim \mathcal{W}(n,k) + d(n,k-2).$$

Так как $\mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2 Hom(n,k-2) \subset Hom(n,k)$, то

$$\dim \mathcal{W}(n,k) + d(n,k-2) \leqslant d(n,k).$$

Отсюда

$$\dim \mathcal{W}(n,k) \leqslant d(n,k) - d(n,k-2). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь оператор Лапласа Δ как оператор, действующий в пространстве $Hom(n,k)$. Тогда по известной теореме (см. [3], 6.4-6 и 6.4-7) справедливо равенство

$$\dim \mathrm{Ker}\Delta + \dim \mathrm{Im}\,\Delta = \dim Hom(n,k) := d(n,k).$$

У нас $\mathrm{Ker}\Delta = \mathcal{W}(n,k)$, а множество значений $\mathrm{Im}\,\Delta$ оператора Δ содержится в $Hom(n,k-2)$, отсюда

$$\dim \mathrm{Im}\,\Delta \leqslant \dim Hom(n,k-2) := d(n,k-2).$$

Значит

$$\dim \mathcal{W}(n,k) = d(n,k) - \dim \mathrm{Im}\,\Delta \geqslant d(n,k) - d(n,k-2). \tag{13}$$

На основании (12) и (13) получаем равенство

$$\dim \mathcal{W}(n,k) = d(n,k) - d(n,k-2), \tag{14}$$

что равносильно требуемому.

Лемма доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. *Для размерности $N(k) = \dim \mathcal{W}(n,k)$ пространства однородных гармонических полиномов степени k справедлива формула*

$$N(k) = C^{k}_{n+k-1} - C^{k-2}_{n+k-3}\,.$$

Этот результат непосредственно следует из формул (7) и (14).

Доказательство теоремы 1. Лемму 4 применяем $\lfloor k/2 \rfloor$ раз. Если $k \geqslant 4$, то придём к разложению

$$Hom(n,k) = \mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2\,\mathcal{W}(n,k-2) \dotplus r^4 Hom(n,k-4).$$

Если k чётное, $r = 2m$, то на последнем шаге получим подпространство $Hom(n,0) = \mathcal{W}(n,0)$, состоящее из констант. В итоге придём к разложению

$$Hom(h,k) = \mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2\,\mathcal{W}(n,k-2) \dotplus \cdots \dotplus r^{2m} Hom(n,0).$$

Если же $k = 2m+1$, то на последнем шаге получим $Hom(n,1) = \mathcal{W}(n,1)$ и разложение закончится слагаемым $r^{2m}\,\mathcal{W}(n,1)$. Теорема 1 доказана. □

2°. На сфере представление Гаусса (1) приобретает ещё более простой вид.

Пусть V_k — однородный полином степени k. Произвольную точку единичной сферы S^{n-1} будем обозначать буквой ξ. Тогда для $V_k(\xi)$ справедливо представление

$$V_k(\xi) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} W_{k-2j}(\xi), \qquad \xi \in S^{n-1}, \tag{15}$$

где W_{k-2j} — гармонический полином степени $k-2j$.

Пусть теперь P — произвольный полином степени не выше t. Он записывается в виде

$$P(x) = V_0(x) + V_1(x) + \cdots + V_t(x),$$

где V_k — однородный полином степени k. В свою очередь V_k на сфере представляется в виде (15). В итоге

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{t} W_j(\xi), \qquad W_j \in Harm(j). \tag{16}$$

Здесь и далее через $Harm(j)$ обозначаем множество сужений на сферу S^{n-1} всех однородных гармонических полиномов степени j.

Значит, при рассмотрении алгебраических полиномов на сфере можно ограничиться гармоническими полиномами.

3°. Определение и критерий сферического дизайна. Доказанная теорема 1 имеет важное применение в теории сферических дизайнов.

Будем использовать стандартное скалярное произведение векторов x, y из $\mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Тогда $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

В работах [4, 5] дано следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть t — натуральное число.
Множество $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим дизайном порядка t, если выполнено равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} P(\xi)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{17}$$

для любого полинома P степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

Представление (16) для алгебраических полиномов на сфере позволяет дать критерий сферического дизайна.

Заметим, что сужение однородного гармонического полинома W_k на сферу S^{n-1} называется сферической функцией (или сферической гармоникой)

порядка k. Таким образом, $Harm(k)$ — это множество сферических функций порядка k. Для любой сферической функции $W_k(\xi)$ порядка $k \geqslant 1$ интеграл по сфере равен нулю:

$$\int\limits_{S^{n-1}} W_k(\xi)\, dS \;=\; 0. \tag{18}$$

Равенство (18) является частным случаем более общего факта: сферические функции разных порядков ортогональны на сфере (см. [6] — случай $n = 3$ или [2] — общий случай). Равенство (18) означает, что $W_k(\xi)$ при $k \geqslant 1$ ортогональна сферическим функциям нулевого порядка (константам).

Теперь можно установить критерий сферического дизайна (он указан в [5], теорема 5.2).

ТЕОРЕМА 2. *Система* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ *является сферическим дизайном порядка* t *тогда и только тогда, когда для любого* $k = 1, 2, \ldots, t$ *и любой сферической функции* $W_k(\xi)$ *порядка* k *выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{m} W_k(\varphi_i) = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ — сферический t-дизайн. Тогда в силу (17) и (18) при $k \in 1 : t$ будет выполняться равенство

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_k(\varphi_i) \;=\; \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} W_k(\xi)\, dS \;=\; 0.$$

Достаточность. Пусть P — произвольный полином степени не выше t. Тогда на сфере справедливо представление (16), причём $W_0(\xi) = const = W_0$. Тогда в силу (18) и (19)

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) = \frac{1}{m}\, m\, W_0 = W_0\,,$$
$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(\xi)\, dS \;=\; \frac{1}{\sigma_n}\,\sigma_n\, W_0 = W_0\,.$$

Значит, Φ — сферический t-дизайн. Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Я. Виленкин. *Специальные функции и теория представлений групп.* М.: Наука, 1965.

2. С. Л. Соболев. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974.

3. В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. *Энциклопедия линейной алгебры.* СПб.: БХВ–Петербург, 2006.

4. Ph. Delsarte. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Repts. Suppl. 1973. N 10.

5. Ph. Delsarte, J. M. Goetals, J. J. Seidel. *Spherical codes and designs* // Geometricae Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

6. В. С. Владимиров. *Уравнения математической физики.* Изд. 4-е. М.: Наука, 1984.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА–СОНИНА

Р. Е. Афонин В. Н. Малозёмов

4 сентября 2010 г.

1°. Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$. Интеграл

$$H_k(v) = \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} \left[\langle v, x\rangle\right]^k dS,$$

где σ_n — площадь S^{n-1}, называется интегралом Гильберта-Сонина.

ТЕОРЕМА. *При целых неотрицательных k и $v \in S^{n-1}$ справедлива формула*

$$H_k(v) = \begin{cases} c_k, & \text{если } k \text{ чётное, } k = 2s; \\ 0, & \text{если } k \text{ нечётное,} \end{cases} \tag{1}$$

где $c_0 = 1$ и

$$c_{2s} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n}, \qquad s = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство этой теоремы с помощью ортогональной замены переменных в интеграле по сфере S^{n-1} приведено в [1]. Данный доклад посвящён непосредственному выводу формулы (1).

2°. Нам потребуется интеграл Дирихле

$$J(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\, dS.$$

ЛЕММА. *Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые неотрицательные числа и $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Тогда*

$$J(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{cases} \dfrac{(k_1-1)!!\,(k_2-1)!!\,\cdots\,(k_n-1)!!}{n(n+2)(n+4)\cdots(n+k-2)}, & \text{когда все } k_i \text{ чётные,} \\ 0, & \text{когда хотя бы одно } k_i \text{ нечётное.} \end{cases}$$

(*Здесь по определению* $(-1)!! = 1$.)

Доказательство. Воспользуемся формулой (см. [1])

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(x)\,dS \;=\; \int\limits_{D^{n-1}} f\big(\mathbf{\Phi}_n(\varphi)\big)\,I_n(\varphi)\,d\varphi, \tag{2}$$

где $D^{n-1} = \big\{\varphi \in \mathbb{R}^{n-1} \;\big|\; \varphi_k \in [0,\pi],\ k \in 1:n-2;\ \varphi_{n-1} \in [0,2\pi]\big\}$,

$$I_n(\varphi) = \sin^{n-2}\varphi_1\,\sin^{n-3}\varphi_2\,\cdots\sin\varphi_{n-2}$$

и отображение $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$ определяется так:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\varphi_1\,,\\
x_2 &= \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2\,,\\
x_3 &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cos\varphi_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cdots\sin\varphi_{n-2}\,\cos\varphi_{n-1}\,,\\
x_n &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cdots\sin\varphi_{n-2}\,\sin\varphi_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Согласно (2) имеем

$$\begin{aligned}
&J(k_1,k_2,\ldots,k_n) =\\
&= \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_0^{\pi}\cos^{k_1}\varphi_1\,\sin^{k-k_1+n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\cos^{k_2}\varphi_2\,\sin^{k-k_1-k_2+n-3}\varphi_2\,d\varphi_2\,\cdots\\
&\cdots\int\limits_0^{\pi}\cos^{k_{n-2}}\varphi_{n-2}\,\sin^{k_{n-1}+k_n+1}\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int\limits_0^{2\pi}\cos^{k_{n-1}}\varphi_{n-1}\,\sin^{k_n}\varphi_{n-1}\,d\varphi_{n-1}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Сначала покажем, что $J(k_1,k_2,\ldots,k_n) = 0$, когда одно из чисел $k_1,k_2,\ldots$ $\ldots,k_n$, скажем, k_i, нечётно. Для этого рассмотрим три случая.

Пусть $i \in 1:n-2$. Выделим i-й интеграл в произведении (3):

$$\int\limits_0^{\pi}\cos^{k_i}\varphi_i\,\sin^{m_i}\varphi_i\,d\varphi_i\,, \tag{4}$$

где $m_i = k - k_1 - \cdots - k_i + n - i - 1$. Сделав замену $\psi_i = \pi - \varphi_i$, в силу нечётности k_i получим

$$\int\limits_0^{\pi}\cos^{k_i}\varphi_i\,\sin^{m_i}\varphi_i\,d\varphi_i \;=\; -\int\limits_0^{\pi}\cos^{k_i}\psi_i\,\sin^{m_i}\psi_i\,d\psi_i\,,$$

так что интеграл (4) равен нулю. Как следствие, и всё произведение из правой части (3) равно нулю, т. е. $J(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 0$.

Разберём далее случаи, когда $i = n - 1$ или $i = n$. Выделим последний интеграл из произведения (3):

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{k_{n-1}} \varphi_{n-1} \sin^{k_n} \varphi_{n-1} \, d\varphi_{n-1} \, .$$

Сделав замену $\psi_{n-1} = \pi - \varphi_{n-1}$, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{k_{n-1}} \varphi_{n-1} \sin^{k_n} \varphi_{n-1} \, d\varphi_{n-1} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (-\cos \psi_{n-1})^{k_{n-1}} \sin^{k_n} \psi_{n-1} \, d\psi_{n-1} \, .$$

Если $i = n$, т. е. k_n нечётно, то подинтегральная функция будет нечётной. Поэтому, в силу симметричности интервала $[-\pi, \pi]$, последний интеграл, а вместе с ним и произведение (3), равны нулю.

Наконец, рассмотрим случай, когда k_n чётно, а k_{n-1} нечётно. На этот раз подинтегральная функция будет чётной, поэтому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (-\cos \psi_{n-1})^{k_{n-1}} \sin^{k_n} \psi_{n-1} \, d\psi_{n-1} = -2 \int\limits_0^{\pi} \cos^{k_{n-1}} \psi_{n-1} \sin^{k_n} \psi_{n-1} \, d\psi_{n-1} \, .$$

Так как k_{n-1} нечётно, то так же, как и в случае $i \in 1 : n-2$, последний интеграл равен нулю. Значит, будет равно нулю и произведение из правой части (3).

Таким образом, во всех трёх случаях получим, что $J(k_1, \ldots, k_n) = 0$.

Теперь предположим, что все числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ чётные. Как известно,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x \, \cos^q x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)} \, ,$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера, обладающая, в частности, следующими свойствами:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a) \quad \text{при} \;\; a > 0. \tag{5}$$

Учитывая это, при чётных k_i получаем

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{k_i} \varphi_i \sin^{m_i} \varphi_i \, d\varphi_i \; = \; 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{k_i} \varphi_i \sin^{m_i} \varphi_i \, d\varphi_i \; = \; \frac{\Gamma\left(\frac{k_i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_i+m_i+2}{2}\right)} \, .$$

Вместе с тем,

$$k_1 + m_1 + 2 = k + n; \qquad k_i + m_i + 1 = m_{i-1} \quad \text{при} \;\; i \in 2 : n-1.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{k_1} \varphi_1 \, \sin^{m_1} \varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)},$$

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{k_i} \varphi_i \, \sin^{m_i} \varphi_i \, d\varphi_i = \frac{\Gamma\left(\frac{k_i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_{i-1}+1}{2}\right)} \quad \text{при} \;\; i \in 2 : n-2,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{k_{n-1}} \varphi_{n-1} \, \sin^{k_n} \varphi_{n-1} \, d\varphi_{n-1} = 2\, \frac{\Gamma\left(\frac{k_{n-1}+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_{n-2}+1}{2}\right)}.$$

На основании (3) приходим к формуле

$$J(k_1, k_2, \ldots, k_n) =$$

$$= \frac{2}{\sigma_n} \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k_2+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)} \cdots$$

$$\cdots \frac{\Gamma\left(\frac{k_{n-2}+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_{n-2}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_{n-3}+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k_{n-1}+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_{n-2}+1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sigma_n \, \Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k_i+1}{2}\right). \tag{6}$$

В частности, при $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$

$$1 = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\sigma_n \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

так что

$$\sigma_n = 2\,\pi^{n/2} / \Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).$$

Подставив это в (6), получим

$$J(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2} \, \Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k_i+1}{2}\right).$$

Отметим, что в силу (5) и чётности k_i и k

$$\Gamma\left(\tfrac{k_i+1}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{k_i-1}{2} + 1\right) = \tfrac{k_i-1}{2}\, \Gamma\left(\tfrac{k_i-1}{2}\right) = \cdots =$$

$$= \tfrac{(k_i-1)!!}{2^{k_i/2}}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(k_i-1)!!}{2^{k_i/2}}\,\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\tfrac{k+n}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{k+n-2}{2}+1\right) = \tfrac{k+n-2}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k+n-2}{2}\right) = \dots =$$
$$= \tfrac{(k+n-2)(k+n-4)\cdots n}{2^{k/2}}\,\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).$$

Значит,

$$J(k_1,k_2,\dots,k_n) = \frac{(k_1-1)!!(k_2-1)!!\cdots(k_n-1)!!}{n(n+2)(n+4)\cdots(n+k-2)}.$$

Лемма доказана. □

3°. Обратимся к доказательству теоремы. Имеем

$$\left[\langle v,x\rangle\right]^k = \left[v_1\,x_1+\dots+v_n\,x_n\right]^k = \sum_{k_1+\dots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}\left(v_1\,x_1\right)^{k_1}\cdots\left(v_n\,x_n\right)^{k_n},$$

так что

$$H_k(v) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k}\frac{k!}{(k_1)!\cdots(k_n)!}\,v_1^{k_1}\cdots v_n^{k_n}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\,dS\right\}. \qquad (7)$$

Если k нечётно, то в каждом слагаемом хотя бы одно k_i нечётно. В этом случае согласно лемме выражение в фигурных скобках равно нулю. Значит, и вся сумма равна нулю, т. е. $H_k(v)=0$.

Пусть теперь $k=2s, s\geqslant 1$. Слагаемые в (7), у которых хотя бы одно k_i нечётно, равны нулю, поэтому

$$H_k(v) = \sum_{2s_1+\dots+2s_n=2s}\frac{(2s)!}{(2s_1)!\cdots(2s_n)!}\,v_1^{2s_1}\cdots v_n^{2s_n}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} x_1^{2s_1}\cdots x_n^{2s_n}\,dS\right\}.$$

Отметим, что

$$\frac{(2s)!}{(2s_1)!\cdots(2s_n)!} = \frac{(2s-1)!!\,2^s\,s!}{(2s_1-1)!!\,2^{s_1}\,s_1!\cdots(2s_n-1)!!\,2^{s_n}\,s_n!} =$$
$$= \frac{(2s-1)!!}{(2s_1-1)!!\cdots(2s_n-1)!!}\cdot\frac{s!}{s_1\cdots s_n!}.$$

С учетом леммы получаем

$$H_k(v) = \frac{(2s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)}\sum_{s_1+\dots+s_n=s}\frac{s!}{s_1!\cdots s_n!}\,(v_1^2)^{s_1}\cdots(v_n^2)^{s_n} =$$

$$= \frac{(2s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)} \left(v_1^2 + \cdots + v_n^2\right)^s.$$

Остаётся принять во внимание, что $\|v\| = 1$ и

$$\frac{(2s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n}\,.$$

Теорема доказана. □

Идея приведённого доказательства восходит к [2], п°. 676, 11.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0515`)

2. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Том III. М.-Л.: Физматгиз, 1960. 656 с.

СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Мохамед Валид Салх Отман Габр

18 сентября 2010 г.

В данной работе построена система вложенных пространств тригонометрических сплайнов первого порядка при произвольном способе измельчения сетки. Для таких пространств получено вейвлетное разложение и выведены соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции.

1°. На конечном или бесконечном интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ введём сетку $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, такую, что при всех $j \in \mathbb{Z}$

$$\cdots < x_{j-1} < x_j < x_{j+1} < \cdots ; \qquad x_{j+2} - x_j < 2\pi$$

и

$$\lim_{j\to-\infty} x_j = \alpha, \qquad \lim_{j\to+\infty} x_j = \beta.$$

Обозначим $s(x) = \sin(\frac{x}{2})$. Базисные тригонометрические сплайны первого порядка зададим формулой (см. рис. 1)

$$\mathfrak{T}_{j,X}(x) = \begin{cases} \dfrac{s(x - x_j)}{s(x_{j+1} - x_j)} & \text{при } x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}\,, \\ \dfrac{s(x_{j+2} - x)}{s(x_{j+2} - x_{j+1})} & \text{при } x_{j+1} \leqslant x \leqslant x_{j+2}\,, \\ 0 & \text{при остальных } x \in (\alpha, \beta). \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathfrak{T}_{j,X}(x_{i+1}) = \delta_{ij}$ при всех $i, j \in \mathbb{Z}$.

Определим на $C(\alpha, \beta)$ линейные функционалы λ_i следующим образом:

$$\langle \lambda_i, u\rangle = u(x_{i+1}), \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Система функционалов $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна* системе сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,X}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в том смысле, что

$$\langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,X}\rangle := \mathfrak{T}_{j,X}(x_{i+1}) = \delta_{ij}\,, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

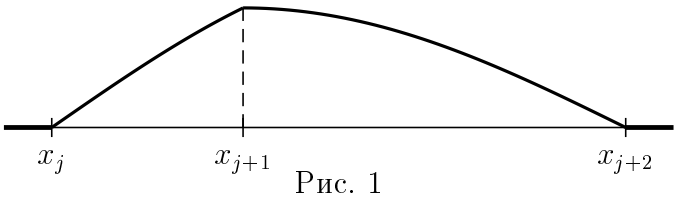


Рис. 1

2°. Калибровочное соотношение. Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и $\theta \in (x_k, x_{k+1})$. Введём расширенную на один узел сетку $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ по правилу:

$$y_{k+1} = \theta; \quad y_j = x_j \ \text{ при } j \leqslant k; \quad y_j = x_{j-1} \ \text{ при } j \geqslant k+2.$$

Сплайны $\mathfrak{T}_{j,Y}(x)$ определим аналогично (1) с заменой сетки X на Y.

Система функционалов $\{\nu_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, где $\langle \nu_i, u\rangle = u(y_{i+1})$, биортогональна системе сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,Y}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Отметим, что

$$\nu_i = \lambda_i \ \text{ при } i \leqslant k-1, \quad \nu_{i+1} = \lambda_i \ \text{ при } i \geqslant k.$$

В частности, при всех $j \in \mathbb{Z}$

$$\langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,Y}\rangle = \delta_{ij}\,, \qquad \text{если } i \leqslant k-1, \tag{2}$$

$$\langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,Y}\rangle = \delta_{i+1,j}\,, \quad \text{если } i \geqslant k. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА 1. *При $x \in (\alpha, \beta)$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{T}_{j,X}(x) = \mathfrak{T}_{j,Y}(x), \qquad \textit{если } j \leqslant k-2; \tag{4}$$

$$\mathfrak{T}_{j,X}(x) = \mathfrak{T}_{j+1,Y}(x), \quad \textit{если } j \geqslant k+1; \tag{5}$$

$$\mathfrak{T}_{k-1,X}(x) = \mathfrak{T}_{k-1,Y}(x) + \frac{s(y_{k+2}-y_{k+1})}{s(y_{k+2}-y_k)}\,\mathfrak{T}_{k,Y}(x), \tag{6}$$

$$\mathfrak{T}_{k,X}(x) = \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}\,\mathfrak{T}_{k,Y}(x) + \mathfrak{T}_{k+1,Y}(x). \tag{7}$$

Доказательство*. Соотношения (4) и (5) очевидны. Разберёмся с (6).

Обратим внимание на носитель сплайна $\mathfrak{T}_{k-1,X}(x)$ (см. рис. 2):

$$\begin{aligned}\big[x_{k-1}, x_{k+1}\big] &= \big[x_{k-1}, x_k\big] \cup \big[x_k, \theta\big] \cup \big[\theta, x_{k+1}\big] = \\ &= \big[y_{k-1}, y_k\big] \cup \big[y_k, y_{k+1}\big] \cup \big[y_{k+1}, y_{k+2}\big].\end{aligned}$$

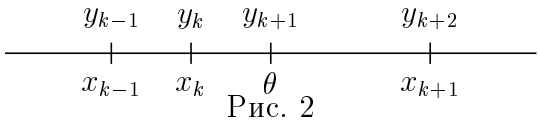


Рис. 2

*Приводимое доказательство предложено В. Н. Малозёмовым.

При $x \in [x_{k-1}, x_k]$ имеем

$$\mathfrak{T}_{k-1,X}(x) = \frac{s(x - x_{k-1})}{s(x_k - x_{k-1})} = \frac{s(x - y_{k-1})}{s(y_k - y_{k-1})} = \mathfrak{T}_{k-1,Y}(x).$$

Отсюда следует (6), поскольку $\mathfrak{T}_{k,Y}(x) = 0$ при $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

При $x \in [\theta, x_{k+1}]$

$$\mathfrak{T}_{k-1,X}(x) = \frac{s(x_{k+1} - x)}{s(x_{k+1} - x_k)} = \frac{s(y_{k+2} - x)}{s(y_{k+2} - y_k)} =$$

$$= \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)} \cdot \frac{s(y_{k+2} - x)}{s(y_{k+2} - y_{k+1})} = \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)} \mathfrak{T}_{k,Y}(x).$$

Отсюда следует (6), поскольку $\mathfrak{T}_{k-1,Y}(x) = 0$ при $x \in [\theta, x_{k+1}]$.

При $x \in [x_k, \theta]$ соотношение (6) принимает вид

$$\frac{s(x_{k+1} - x)}{s(x_{k+1} - x_k)} = \frac{s(y_{k+1} - x)}{s(y_{k+1} - y_k)} + \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)} \cdot \frac{s(x - y_k)}{s(y_{k+1} - y_k)}\,. \tag{8}$$

Обозначим (см. рис. 3)

$$a = x - y_k\,, \quad b = y_{k+2} - y_{k+1}\,, \quad c = y_{k+1} - x.$$

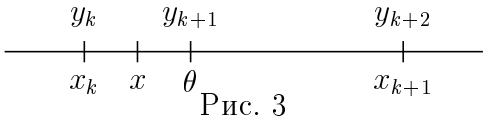


Рис. 3

В этих обозначениях перепишем формулу (8):

$$\frac{s(b+c)}{s(a+b+c)} = \frac{s(c)}{s(a+c)} + \frac{s(b)\,s(a)}{s(a+b+c)\,s(a+c)} \tag{9}$$

или

$$s(a+c)\,s(b+c) - s(a)\,s(b) = s(c)\,s(a+b+c). \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что справедливо тригонометрическое тождество

$$\sin(a+c)\sin(b+c) - \sin a\,\sin b = \sin c\,\sin(a+b+c) \tag{11}$$

(обе его части приводятся к виду

$$\sin c\,[\sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c]\,).$$

Заменив в (11) величины a, b, c на $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, получим (10).

Соотношение (6) установлено.

Переходим к соотношению (7). Рассмотрим носитель сплайна $\mathfrak{T}_{k,X}(x)$ (см. рис. 4):

$$\begin{aligned}\big[x_k, x_{k+2}\big] &= \big[x_k, \theta\big] \cup \big[\theta, x_{k+1}\big] \cup \big[x_{k+1}, x_{k+2}\big] = \\ &= \big[y_k, y_{k+1}\big] \cup \big[y_{k+1}, y_{k+2}\big] \cup \big[y_{k+2}, y_{k+3}\big].\end{aligned}$$

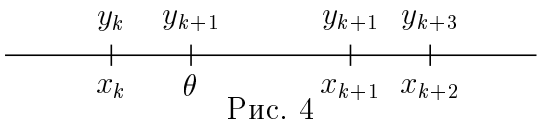


Рис. 4

При $x \in [x_k, \theta]$ имеем $\mathfrak{T}_{k+1,Y}(x) = 0$ и

$$\mathfrak{T}_{k,X}(x) = \frac{s(x - x_k)}{s(x_{k+1} - x_k)} = \frac{s(x - y_k)}{s(y_{k+2} - y_k)} = \frac{s(y_{k+1} - y_k)}{s(y_{k+2} - y_k)}\,\mathfrak{T}_{k,Y}(x).$$

Отсюда следует (7).

При $x \in [x_{k+1}, x_{k+2}]$

$$\mathfrak{T}_{k,X}(x) = \frac{s(x_{k+2} - x)}{s(x_{k+2} - x_{k+1})} = \frac{s(y_{k+3} - x)}{s(y_{k+3} - y_{k+2})} = \mathfrak{T}_{k+1,Y}(x).$$

Отсюда и из равенства $\mathfrak{T}_{k,Y}(x) = 0$ при $x \in [x_{k+1}, x_{k+2}]$ следует (7).

При $x \in [\theta, x_{k+1}]$ соотношение (7) принимает вид

$$\frac{s(x - x_k)}{s(x_{k+1} - x_k)} = \frac{s(y_{k+1} - y_k)}{s(y_{k+2} - y_k)} \cdot \frac{s(y_{k+2} - x)}{s(y_{k+2} - y_{k+1})} + \frac{s(x - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_{k+1})}\,. \tag{12}$$

Обозначим (см. рис. 5)

$$a = y_{k+2} - x, \quad b = y_{k+1} - y_k\,, \quad c = x - y_{k+1}\,.$$

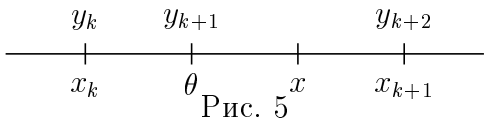


Рис. 5

В этих обозначениях перепишем соотношение (12):

$$\frac{s(b + c)}{s(a + b + c)} = \frac{s(b)\,s(a)}{s(a + b + c)\,s(a + c)} + \frac{s(c)}{s(a + c)}\,. \tag{13}$$

Отметим, что (13) совпадает с равенством (9), справедливость которого была установлена ранее. Теорема доказана. □

Результат теоремы 1 можно представить в виде формулы

$$\mathfrak{T}_{i,X}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{ij}\, \mathfrak{T}_{j,Y}(x), \tag{14}$$

где

$$p_{ij} = \delta_{ij} \qquad \text{при } \ i \leqslant k-2,\ j \in \mathbb{Z};$$
$$p_{ij} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при } \ i \geqslant k+1,\ j \in \mathbb{Z};$$
$$p_{k-1,j} = 0 \ \text{ при } j \neq k-1, k; \quad p_{k-1,k-1} = 1;$$
$$p_{k-1,k} = \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)}\,;$$
$$p_{kj} = 0 \ \text{ при } j \neq k, k+1; \quad p_{k,k+1} = 1;$$
$$p_{kk} = \frac{s(y_{k+1} - y_k)}{s(y_{k+2} - y_k)}\,.$$

Формулу (14) назовём *калибровочным соотношением* для базисных тригонометрических сплайнов первого порядка.

3°. Вейвлетное разложение. Обозначим Π_X линейную оболочку множества базисных сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,X}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Элементы линейного пространства Π_X будем называть *тригонометрическими сплайнами первого порядка на сетке* X. Таким образом, запись $w \in \Pi_X$ означает, что

$$w(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\, \mathfrak{T}_{j,X}(x), \tag{15}$$

где a_j — вещественные коэффициенты. Аналогично определяется пространство Π_Y. В силу теоремы 1, $\Pi_X \subset \Pi_Y$.

Отметим, что в сумме из правой части формулы (15) по свойству носителей базисных сплайнов при каждом $x \in (\alpha, \beta)$ отличны от нуля не более двух слагаемых.

Введём оператор проектирования P пространства Π_Y на подпространство Π_X вида

$$Pv = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \langle \lambda_i, v\rangle\, \mathfrak{T}_{i,X}\,, \qquad v \in \Pi_Y. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$v = Pv + u, \tag{17}$$

где $u \in \Pi_Y$. Сплайн u назовём *вейвлетной составляющей.*

Пусть $a_i = \langle \lambda_i, v\rangle$,

$$v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\, \mathfrak{T}_{j,Y}\,, \qquad u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\, \mathfrak{T}_{j,Y}\,.$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы соотношения*

$$a_i = c_i \ \ \textit{при}\ i \leqslant k-1, \quad a_i = c_{i+1} \ \ \textit{при}\ i \geqslant k; \tag{18}$$

$$b_j = 0 \ \ \textit{при}\ j \neq k; \tag{19}$$

$$b_k = c_k - \frac{s(y_{k+2}-y_{k+1})}{s(y_{k+2}-y_k)}\, c_{k-1} - \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}\, c_{k+1}\,. \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$a_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\, \langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,Y}\rangle \tag{21}$$

и согласно (17), (16), (14)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\, \mathfrak{T}_{j,Y} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{ij}\, \mathfrak{T}_{j,Y} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\, \mathfrak{T}_{j,Y}\,. \tag{22}$$

Соотношения (18) следуют из (21) и (2), (3). Действительно,

$$a_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\, \delta_{ij} = c_i & \text{при}\ \ i \leqslant k-1, \\ \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\, \delta_{i+1,j} = c_{i+1} & \text{при}\ \ i \geqslant k. \end{cases}$$

Линейная независимость системы базисных сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,Y}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на (α,β) и (22) приводят к равенствам

$$c_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\, p_{ij} + b_j\,, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда

$$b_j = c_j - \sum_{i\leqslant k-2} a_i\, p_{ij} - a_{k-1}\, p_{k-1,j} - a_k\, p_{kj} - \sum_{i\geqslant k+1} a_i\, p_{ij}\,. \tag{23}$$

Принимая во внимание свойства коэффициентов p_{ij} и (18), получаем

$$\sum_{i\leqslant k-2} a_i\, p_{ij} = \sum_{i\leqslant k-2} c_i\, \delta_{ij} = \begin{cases} c_j & \text{при}\ \ j \leqslant k-2, \\ 0 & \text{при}\ \ j > k-2; \end{cases}$$

$$\sum_{i\geqslant k+1} a_i\, p_{ij} = \sum_{i\geqslant k+1} c_{i+1}\, \delta_{i+1,j} = \begin{cases} c_j & \text{при}\ \ j \geqslant k+2, \\ 0 & \text{при}\ \ j < k+2, \end{cases}$$

так что при $j \leqslant k-2$ и $j \geqslant k+2$

$$b_j = -a_{k-1}\, p_{k-1,j} - a_k\, p_{kj} = 0.$$

При $j = k-1$ и $j = k+1$ имеем соответственно

$$b_{k-1} = c_{k-1} - c_{k-1}\, p_{k-1,k-1} = 0,$$
$$b_{k+1} = c_{k+1} - c_{k+1}\, p_{k,k+1} = 0.$$

Соотношение (19) установлено.

Осталось заметить, что согласно (23)

$$b_k = c_k - c_{k-1}\, p_{k-1,k} - c_{k+1}\, p_{kk}\,.$$

Это равенство эквивалентно (20).

Теорема доказана. □

Теперь вейвлетное разложение (17) сплайна $v \in \Pi_Y$ можно переписать так:

$$v = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\, \mathfrak{T}_{i,X} + b_k\, \mathfrak{T}_{k,Y},$$

где коэффициенты a_i проекции и коэффициент b_k вейвлетной составляющей вычисляются по формулам (18) и (20).

Формулы (18) и (20), которые естественно назвать *формулами декомпозиции*, допускают обращение. А именно

$$c_j = a_j \ \text{ при } j \leqslant k-1, \quad c_j = a_{j-1} \ \text{ при } j \geqslant k+1;$$
$$c_k = b_k + \frac{s(y_{k+2}-y_{k+1})}{s(y_{k+2}-y_k)}\, a_{k-1} + \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}\, a_k\,.$$

Последние формулы являются *формулами реконструкции*. Они позволяют по коэффициентам a_i и b_k восстановить коэффициенты c_j разложения сплайна $v \in \Pi_Y$ по системе базисных сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,Y}\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

4°. Данная работа выполнена в русле исследований Ю. К. Демьяновича [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянович Ю. К. *Минимальные сплайны и всплески* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2008. Вып. 2. С. 8–22.

2. Демьянович Ю. К. *Вложенные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковые разложения* // Матем. заметки. 2005. Т. 78. Вып. 5. С. 658–675.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ*

М. С. Беспалов

2 октября 2010 г.

1°. Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из основных аппаратов прикладной математики, который активно применяется в физике, различных областях техники, цифровой обработке информации и других сферах [1]. В математической литературе предлагается трактовка дискретного преобразования Фурье как метода приближённого вычисления преобразования Фурье по точкам отсчёта функции [2]. Будем рассматривать ДПФ как унитарное преобразование в конечномерном пространстве.

Матрица ДПФ порядка n имеет вид [3, с. 197] (нумерация элементов матрицы начинается с нуля)

$$DPF = \left(q^{kl}\right)_{k,l=0}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & q^3 & \dots & q^{n-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 & \dots & q^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q^{n-1} & q^{2n-2} & q^{3n-3} & \dots & q^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где в качестве q берут $\exp(2\pi i/n)$ или $\exp(-2\pi i/n)$. В одном из этих случаев перед матрицей ставится множитель $\frac{1}{n}$. При этом одно из преобразований вида (1) называют прямым ДПФ (обычно при $q = \exp(-2\pi i/n)$ [3]), а другое обратным ДПФ.

Вместо (1) применим симметричную форму записи, определив *унитарную*

*Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/5568

матрицу ДПФ (за основное взяли обратное в терминах [3] ДПФ)

$$F = F_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\, DPF, \quad \text{где} \;\; q = e^{\frac{2\pi i}{n}}. \tag{2}$$

Комплексно-сопряжённая матрица определяет обратный и сопряжённый оператор $\overline{F} = F^{-1} = F^*$.

В технических приложениях применение прямого ДПФ к вектору (входному сигналу) $x = (x_0\, x_1\, \ldots\, x_{n-1})^T$ (векторы записываем в виде матрицы-столбца) позволяет получить набор спектральных коэффициентов (выходной сигнал) $c = (c_0\, c_1\, \ldots\, c_{n-1})^T$, что в прикладных дисциплинах объявляется как представление спектра.

Следуя математической терминологии, *спектральное разложение* линейного оператора в конечномерном пространстве связываем с вычислением всех собственных чисел и собственных векторов оператора. Линейная оболочка всех собственных векторов, отвечающих фиксированному собственному числу, составляет собственное подпространство. Поэтому спектральным разложением унитарного оператора считаем представление оператора через разложение исходного пространства в виде прямой суммы взаимноортогональных собственных подпространств.

2°. Операторы кручения четвёртого порядка

ЛЕММА 1. *При $n > 2$ оператор F_n является периодическим, а именно, оператором кручения четвёртого порядка: $F^4 = I$.*

Доказательство. Из (1) и (2) вытекает, что обратная и прямая матрицы ДПФ связаны формулой $F^* = GF = FG$ через пермутатор (матрицу перестановки строк или столбцов)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Подставим эту формулу в условие унитарности оператора $FF^* = I$ и получим $F^2G = I$, $F^2 = G$. Так как $G^2 = I$, то $F^4 = I$. □

Известно [4, с. 316], что оператор преобразования Фурье в $L_2(-\infty,+\infty)$ также является унитарным оператором кручения четвёртого порядка с собственными числами 1, i, -1, $-i$ и функциями Эрмита в качестве собственных функций.

Также унитарными операторами кручения четвёртого порядка в $L_2[0,\infty)$ являются оператор мультипликативного преобразования Фурье [5] и оператор Λ-мультипликативного преобразования Фурье [6]. В [5] приведено доказательство следующей леммы, которая в ином виде встречается и в [4].

ЛЕММА 2. *Пусть $F\colon X\to X$ есть унитарный оператор кручения четвёртого порядка. Тогда операторы*

$$Q_k=\tfrac{1}{4}\bigl(I+i^kF+(i^kF)^2+(i^kF)^3\bigr),$$

где $k=0,1,2,3$, являются ортопроекторами на собственные подпространства R_k, то есть

$$X=R_0\oplus R_1\oplus R_2\oplus R_3,\quad R_l\perp R_j\ \text{при}\ l\neq j,\quad FQ_k=(-i)^kQ_k.$$

При доказательстве проверяем, что введённые операторы *идемпотентные* ($Q_k^2=Q_k$), действительные и симметричные ($Q_k^T=Q_k$), и заключаем на основании [4, с. 286], что Q_k есть ортопроекторы. Также непосредственно проверяются условия ортогональности ($Q_lQ_j=0$ при $l\neq j$) и инвариантности ($FQ_k=\lambda_kQ_k$, где $\lambda_k=(-i)^k$).

Для *ортогонального* (действительного унитарного) оператора верно аналогичное утверждение [5].

ЛЕММА 3. *Пусть $S\colon X\to X$ есть ортогональный оператор кручения второго порядка. Тогда операторы $Q_k=\frac{1}{2}\bigl(I+(-1)^kS\bigr)$, где $k=0,1$, являются ортопроекторами на собственные подпространства R_k, то есть*

$$X=R_0\oplus R_1,\qquad R_0\perp R_1,\qquad SQ_k=(-1)^kQ_k\,.$$

В конечномерном (нашем) случае $X=\mathbb{R}^n$ или $X=\mathbb{C}^n$.

Из леммы 2 вытекает спектральное разложение оператора ДПФ:

$$F=F\bigl(Q_0+Q_1+Q_2+Q_3\bigr)=Q_0-i\,Q_1-Q_2+i\,Q_3=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\,Q_k\,,\qquad(4)$$

которое согласно спектральной теореме для унитарных операторов [7, с. 180] выражается через единичные ортопроекторы P_j:

$$F=\sum_{j=1}^{n_0}P_j-i\sum_{s=1}^{n_1}P_{n_0+s}-\sum_{s=1}^{n_2}P_{n_0+n_1+s}+i\sum_{s=1}^{n_3}P_{n_0+n_1+n_2+s}\,,$$

где $n_k = \dim R_k$, $n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$.

Сумма всех единичных ортопроекторов представляет собой *разложение единицы* [7, с. 134]: $I = \sum_{j=1}^{n} P_j$.

С каждым разложением единицы связан ортонормированный базис $\{f_j\}$. Полагаем в нашем случае, что базис $\{f_j\}$ представлен в виде n-мерных столбцов. Тогда $P_j = f_j\, f_j^*$ для каждого j. По построению P_j след каждого единичного ортопроектора равен норме образующего элемента

$$\operatorname{Tr} P_j = f_j^* f_j = \|f_j\|^2 = \|f_j\| = 1.$$

Так как произвольный ортопроектор есть сумма единичных, то получаем следующее правило вычисления размерности n_k собственных подпространств R_k.

ЛЕММА 4. *След матрицы ортопроектора на конечномерное подпространство равен размерности подпространства. В частности, для каждого собственного подпространства*

$$\operatorname{Tr} Q_k = \dim R_k = n_k.$$

Унитарная матрица U, которую составим из столбцов базиса f_j, позволяет диагонализировать матрицу F: $U^* F\, U = D$. Так как ортопроекторы Q_k действительные, то и матрицу U можно выбрать действительную (то есть ортогональную).

3°. Спектр дискретного преобразования Фурье

Введём обозначение $\sigma(F_n)$ для *спектра* оператора ДПФ, то есть для набора собственных чисел с учётом их кратности. Вычислив корни характеристического многочлена $p(\lambda) = |F - \lambda I|$, найдем

$$\sigma(F_2) = \{1, -1\}, \quad \sigma(F_3) = \{1, -1, i\}, \quad \sigma(F_4) = \{1, 1, -1, i\}.$$

Спектр очередного ДПФ получается из спектра предыдущего ДПФ присоединением к набору одного числа: $\sigma(F_3) = \sigma(F_2) \sqcup \{i\}$, $\sigma(F_4) = \sigma(F_3) \sqcup \{1\}$.

Напомним обозначения $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$.

ТЕОРЕМА ([8, 9]). *Спектр матрицы $F = F_n$ дискретного преобразования Фурье вычисляется по рекуррентной формуле*

$$\sigma(F_{4m+k}) = \sigma(F_{4m+k-1}) \sqcup \lambda_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

присоединением к спектру предыдущего ДПФ очередного собственного числа. Алгебраическая кратность n_k каждого собственного числа λ_k равна его геометрической кратности, то есть матрица F диагонализируема. В частности, $n_0 = \lfloor n/4 \rfloor + 1$, $n_1 = \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$, $n_2 = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$, $n_3 = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$ (применён знак целой части числа).

Ортопроекторами на собственные ортогональные подпространства R_k размерности n_k служат операторы $(k = 0, 1, 2, 3)$

$$Q_k = \tfrac{1}{4}\big(I + i^k F + (i^k F)^2 + (i^k F)^3\big),$$

то есть $\mathbb{C}^n = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ (или $\mathbb{R}^n = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$), $R_l \perp R_j$ при $l \neq j$, $Q_k x = x$ и $Fx = \lambda_k x$ для любого $x \in R_k$.

Для справедливости теоремы осталось вычислить значения n_0, n_1, n_2 и n_3.

Используя (3), вычислим след проекторов P_+ и P_- на действительное $R_0 \oplus \oplus R_2$ и мнимое $R_1 \oplus R_3$ инвариантные подпространства отдельно

$$\operatorname{Tr} P_+ = \operatorname{Tr}\big(Q_0 + Q_2\big) = \operatorname{Tr} \tfrac{1}{2}\big(I + F^2\big) = \left\lfloor \tfrac{n+2}{2} \right\rfloor, \tag{5}$$

$$\operatorname{Tr} P_- = \operatorname{Tr}\big(Q_1 + Q_3\big) = \operatorname{Tr} \tfrac{1}{2}\big(I - F^2\big) = n - \left\lfloor \tfrac{n+2}{2} \right\rfloor. \tag{6}$$

Используя (1), вычислим (как действительную и мнимую часть суммы)

$$\operatorname{Tr}\big(Q_0 - Q_2\big) = \operatorname{Tr} \tfrac{1}{2}\big(F + F^3\big) = \operatorname{Tr}\big(\operatorname{Re} F\big) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\big(q^{k^2}\big), \tag{7}$$

$$\operatorname{Tr}\big(Q_3 - Q_1\big) = \operatorname{Tr} \tfrac{-i}{2}\big(F - F^3\big) = \operatorname{Tr}\big(\operatorname{Im} F\big) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\big(q^{k^2}\big). \tag{8}$$

В правой части формул (7) и (8) присутствует *сумма Гаусса*, модуль которой вычисляется в [10, с. 81]. Оригинальное вычисление (результат которого в следующем утверждении) суммы Гаусса, предложенное Дирихле, приводится в [11, с. 446].

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}} = \frac{i^n + 1}{i^n + i^{n-1}}\,.$$

Данное утверждение перепишем в виде

$$\operatorname{Tr}\big(Q_0 - Q_2\big) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \tag{9}$$

$$\operatorname{Tr}\big(Q_3 - Q_1\big) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 2 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{10}$$

Из (5) и (9) вытекает $\operatorname{Tr} Q_0 = k + 1$, так как для $n = 4k + j$

$$\tfrac{1}{2}\big(\operatorname{Tr}(Q_0 + Q_2) + \operatorname{Tr}(Q_0 - Q_2)\big) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\big((2k+1) + 1\big), & \text{если } j \in \{0, 1\}, \\ \tfrac{1}{2}\big((2k+2) + 0\big), & \text{если } j \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Из (6) и (10) вытекает

$$\operatorname{Tr} Q_1 = \tfrac{1}{2}\big(\operatorname{Tr}(Q_1+Q_3)-\operatorname{Tr}(Q_3-Q_1)\big) = \begin{cases} k-1, & \text{если } n=4k, \\ k, & \text{если } n=4k+j,\ j\in\{1,2,3\}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\operatorname{Tr} Q_2 = \operatorname{Tr} P_+ - \operatorname{Tr} Q_0 = \begin{cases} k, & \text{если } n=4k \ \text{ или } \ n=4k+1, \\ k+1, & \text{если } n=4k+2 \ \text{ или } \ n=4k+3; \end{cases}$$

$$\operatorname{Tr} Q_3 = \operatorname{Tr} P_- - \operatorname{Tr} Q_1 = \begin{cases} k, & \text{если } n=4k+j, \quad j\in\{0,1,2\}, \\ k+1, & \text{если } n=4k+3. \end{cases}$$

4°. Построение базисов собственных подпространств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Линейная оболочка столбцов матрицы Q_k совпадает с собственным пространством R_k.*

Доказательство. Пусть $\{f_j\}_{j=1}^{n_k}$ есть ортонормированный базис собственного пространства R_k, записанный в виде столбцов. Тогда

$$Q_k = \sum_{j=1}^{n_k} P_j = \sum_{j=1}^{n_k} f_j\, f_j^*$$

есть сумма единичных проекторов. Это означает, что каждый столбец матрицы Q_k есть линейная комбинация столбцов f_j. Значит, линейная оболочка столбцов матрицы Q_k является подпространством пространства R_k ($span(Q_k) \subset R_k$).

Равенство $Q_k\, f_j = \lambda_k\, f_j$ означает, что любой элемент базиса (столбец в правой части равенства) линейно выражается через столбцы матрицы Q_k. Установили противоположное включение $R_k \subset span(Q_k)$. □

Предложим способ построения базиса пространства R_k выделением из матрицы Q_k линейно независимых столбцов. Методом ортогонализации Грама-Шмидта [4, с. 87] этот базис пространства R_k превращается в ортонормированный. Предложим метод матричной ортогонализации, который эквивалентен методу Грама-Шмидта и объединяет оба указанных приёма.

Пронормируем и возьмём в качестве f_1 любой столбец матрицы Q_k. Построим единичный проектор $P_1 = f_1\, f_1^T$. Спроектируем все остальные столбцы матрицы Q_k на ортогональное дополнение к f_1. Для этого применим проектор P_1 к (каждому) столбцу и вычтем из него полученный результат. Для

набора полученных столбцов повторяем все шаги описанной процедуры вычисления: выбираем f_2, строим $P_2 = f_2\, f_2^T$ и проектируем на дополнение к f_2. И так далее. В процессе выполнения данного алгоритма возникают нулевые столбцы, которые исключаем из дальнейшего рассмотрения. Тем самым попутно вычисляется ранг матрицы Q_k.

Приведём примеры вычислений, полученных этим методом. Результат вычислений оформим в виде ортогональной матрицы U.

Пусть $n = 4$. Тогда (при $q = i$) матрица

$$F = F_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_0 = 1$ — кратности 2, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$. Ортопроекторами на инвариантные подпространства служат (Q_0 — проектор на двумерное подпространство)

$$Q_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из проектора Q_0 выделяем

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

строим единичный проектор

$$P_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

проектируем

$$P_1\, q_2 = P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\, f_1$$

и вычитаем

$$q_2 - \frac{1}{3} f_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После нормировки имеем

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а векторы

$$f_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

получаем из проекторов Q_2, Q_3.

Итак,

$$I = Q_0 + Q_2 + Q_3, \qquad F = F_4 = Q_0 - Q_2 + iQ_3\,.$$

Ортонормированный базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, записанный по столбцам, даёт ортогональную матрицу

$$U = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 1 & -2\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Ортогональным преобразованием с этой ортогональной матрицей матрица ДПФ приводится к диагональному виду:

$$U^T F\, U = \operatorname{diag}(1, 1, -1, i).$$

Пусть $n = 5$. Ортогональная матрица из собственных векторов, вычисленная описанным выше способом, имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2k & 0 & -2l & 0 & 0 \\ l & 1 & k & s & t \\ l & -1 & k & t & -s \\ 1 & -1 & k & -t & s \\ l & 1 & k & -s & -t \end{pmatrix},$$

где

$$k = \frac{2\sin(2\pi/5)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\,,$$
$$l = \frac{2\sin(4\pi/5)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\,,$$
$$s = \sqrt{1+k}, \qquad t = \sqrt{1-k}.$$

Получаем

$$U^T F\, U = \operatorname{diag}(1,1,-1,i,-i), \qquad U^T F^2\, U = \operatorname{diag}\bigl(1,1,1,-1,-1\bigr).$$

При $n = 6$ ортогональная матрица из собственных векторов имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{5}\,c & 0 & -\sqrt{5}\,d & 0 & 0 & 0 \\ d & d+x & c & y-c & a & b \\ d & -x & c & -y & b & -a \\ d & -2d & c & 2c & 0 & 0 \\ d & -x & c & -y & -b & a \\ d & d+x & c & y-c & -a & -b \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\,, \quad b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\,, \quad c = \frac{\sqrt{6+\sqrt{6}}}{\sqrt{60}}\,, \quad d = \frac{\sqrt{6-\sqrt{6}}}{\sqrt{60}}\,,$$
$$x = \sqrt{3/2}\,d, \quad y = \sqrt{3/2}\,c.$$

При этом

$$U^T F\, U = \operatorname{diag}(1,1,-1,-1,i,-i).$$

При $n = 8$ ортогональная матрица из собственных векторов имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & a & -b & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & b & a & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & a & -b & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & b & a & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

с теми же a, b. При этом

$$U^T F\, U = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1, -1, i, i, -i).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Залманзон Л. А. *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях.* М.: Наука, 1989. 496 с.

2. *Математическая энциклопедия.* Т. 5. М.: Сов. энцикл. 1984. 1248 с.

3. Ефимов А. В. *Математический анализ (специальные разделы). Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение.* М.: Высшая школа, 1980. 279 с.

4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональноиу анализу.* М.: Мир, 1979. 588 с.

5. Беспалов М. С. *Операторы мультипликативного преобразования Фурье* // Изв. ВУЗОВ. Сер. мат. 2006. Т. 526. № 3. С. 9–23.

6. Ефимов А. В., Поспелов А. С., Умняшкин С. В. *Некоторые свойства мультипликативных систем, используемые в цифровой обработке сигналов* // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 137–182.

7. Глазман И. М., Любич Ю. И. *Конечномерный линейный анализ.* М.: Наука, 1969. 476 с.

8. McClellan J. H., Parks T. W. *Eigenvalues and eigenvectors of the discrete Fourier transformation* // IEEE Trans. Audio Electroacoust. 1972. V. 20. No. 1. P. 66–74.

9. Dickinson B. W., Steiglitz K. *Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform* // IEEE Trans. Acoust., Speech and Sig. Processing. 1982. V. 30. No. 1. P. 25–31.

10. Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* М.: Наука, 1972. 168 с.

11. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. *Лекции по математическому анализу.* М.: Дрофа, 2004. 640 с.

ДИСКРЕТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА СФЕРИЧЕСКОГО ТИПА

Н. В. Чашников

30 октября 2010 г.

1°. Напомним определение дискретной поверхности Кунса, данное в [1].

Пусть $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$, где m_1, n_1 и m_2, n_2 — натуральные числа, отличные от единицы. Зафиксируем также натуральные числа r_1 и r_2. Обозначим через H_0^u и H_0^v фундаментальные дискретные периодические сплайны порядков r_1 и r_2 соответственно, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$\begin{aligned} H_0^u(kn_1) &= \delta_{m_1}(k), \qquad k \in 0 : m_1 - 1, \\ H_0^v(kn_2) &= \delta_{m_2}(k), \qquad k \in 0 : m_2 - 1. \end{aligned}$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_0, \ldots, \mathbf{f}_{m_1-1},\ \mathbf{g}_0, \ldots, \mathbf{g}_{m_2-1} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3,$$

где вектор-функции $\mathbf{f}_i$ — N_2-периодические, $\mathbf{g}_j$ — N_1-периодические и выполнены условия согласования

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{1}$$

Дискретная поверхность Кунса определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u,v) = &\sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u - in_1)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(u) - \\ &- \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u - in_1)\,H_0^v(v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(in_1). \end{aligned} \tag{2}$$

В [1] показано, что для вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через $\mathbf{T}$ множество вектор-функций, зависящих от двух целочисленных аргументов, периодичных с периодом N_1 по первому аргументу, и с периодом N_2 — по второму. Ясно, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$, определяемая формулой (2), принадлежит множеству $\mathbf{T}$.

Обратимся к геометрической интерпретации вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$. Опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{g}_j$ задают два набора замкнутых ломаных в трёхмерном пространстве. Условия согласования (1) означают, что каждая ломаная из первого набора пересекается с ломаной из второго набора. Обозначим через $\sigma(\mathbf{c})$ многогранную поверхность, состоящую из треугольных граней с вершинами

$$\mathbf{c}(u,v),\ \mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1),$$

и

$$\mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1),\ \mathbf{c}(u+1,v+1)$$

при всех целых u и v. Эта поверхность называется дискретной поверхностью Кунса. Согласно условиям (3), поверхность $\sigma(\mathbf{c})$ будет проходить через все опорные ломаные. Меняя опорные вектор-функции можно влиять на вид получаемой поверхности. Наиболее естественным образом строятся поверхности в виде замкнутых трубок. При этом ломаные $\mathbf{f}_i$ задают продольную форму трубки, а ломаные $\mathbf{g}_j$ — её поперечные сечения. Покажем, что при помощи дискретных поверхностей Кунса можно также строить многогранные поверхности, гомеоморфные сфере.

2°. Пусть числа m_1 и m_2 — чётные. Положим $k_1 = m_1/2$, $k_2 = m_2/2$, тогда $N_1/2 = k_1 n_1$, $N_2/2 = k_2 n_2$. Введём множество $\mathbf{S}$, состоящее из тех вектор-функций $\mathbf{a}(u,v)$ множества $\mathbf{T}$, которые удовлетворяют условиям

$$\mathbf{a}(u,0) \equiv \mathrm{const}, \qquad \mathbf{a}(u,N_2/2) \equiv \mathrm{const}; \tag{4}$$

$$\mathbf{a}(u,-v) = \mathbf{a}(u+N_1/2,v), \quad u,v \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Рассмотрим многогранную поверхность $\sigma(\mathbf{a})$ для $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$. Согласно тождествам (4) на поверхности выделяются вершины $\mathbf{a}(\cdot,0)$ и $\mathbf{a}(\cdot,N_2/2)$. Назовём эти вершины “Северным полюсом” и “Южным полюсом” соответственно. При каждом фиксированном u последовательность рёбер с вершинами $\{\mathbf{a}(u,v)\}_{v=0}^{N_2/2}$ образует “меридиан” от “Северного полюса” до “Южного полюса”. При каждом фиксированном $v \in 1 : N_2/2-1$ последовательность рёбер с вершинами $\{\mathbf{a}(u,v)\}_{u=0}^{N_1-1}$ образует замкнутую “параллель” (см. рис. 1). Из равенства (5) следует, что каждая из вершин $\mathbf{a}(u,v)$ при $u \in 0 : N_1-1$, $v \in N_2/2+1 : N_2-1$ совпадает вершиной $\mathbf{a}(u+N_1/2, N_2-v)$. Таким образом, для построения поверхности $\sigma(\mathbf{a})$ достаточно соединить рёбрами вершины $\mathbf{a}(u,v)$ при $u \in 0 : N_1-1$, $v \in 0 : N_2/2$.

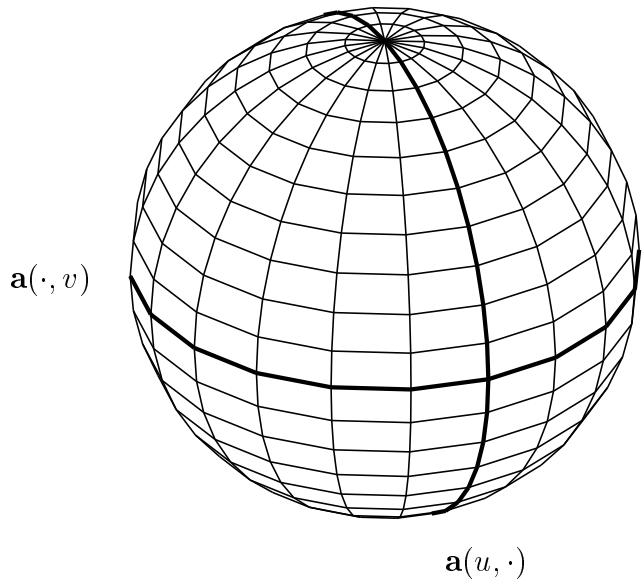


Рис. 1

ЛЕММА. *Фундаментальный сплайн H_0^v — чётная вещественная функция.*

Доказательство. Пусть $c(p)$, $p \in 0 : m_2 - 1$, — коэффициенты в разложении сплайна H_0^v по сдвигам B-сплайна:

$$H_0^v(v) = \sum_{p=0}^{m_2-1} c(p) Q_{r_2}(v - pn_2), \qquad v \in \mathbb{Z},$$

а $z = \delta_{m_2}$ — правые части интерполяционных условий для данного сплайна. Положим $C = \mathcal{F}_{m_2}(c)$, $Z = \mathcal{F}_{m_2}(z)$. Согласно [2, с. 22], значения $C(k)$ могут быть получены по формуле

$$C(k) = \frac{Z(k)}{T_{r_2}(k)}, \qquad k \in 0 : m_2 - 1,$$

где

$$T_{r_2}(k) = \begin{cases} n_2^{2r_2-1} & \text{при } k = 0, \\ \dfrac{1}{n_2} \displaystyle\sum_{s=0}^{n_2-1} \left(\frac{\sin(\pi k/m_2)}{\sin\bigl(\pi(sm_2 + k)/N_2\bigr)} \right)^{2r_2} & \text{при } k \in 1 : m_2 - 1. \end{cases}$$

В данной задаче $z = \delta_{m_2}$, поэтому $Z(k) \equiv 1$. Сигнал T_{r_2} вещественный и чётный (см. [2, задача 3.4]), следовательно, сигнал C также вещественный и чётный. Значит, коэффициенты $c(p)$ вещественны и образуют чётный сигнал. Отсюда сразу вытекает вещественность сплайна H_0^v. Чтобы установить чётность сплайна H_0^v, достаточно сослаться на задачу 3.10 из [2]. $\square$

Будем считать, что последовательности опорных функций $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{g}_j$ периодически продолжены на все целые индексы с периодами m_1 и m_2 соответственно. Тогда равенства (1) и (3) выполняются для всех целых i и j.

ТЕОРЕМА. *Чтобы вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$, *построенная по формуле* (2), *принадлежала множеству* $\mathbf{S}$ *необходимо и достаточно, чтобы опорные вектор-функции* $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ *удовлетворяли соотношениям*

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_0(u) \equiv \mathrm{const}, \qquad \mathbf{g}_{k_2}(u) \equiv \mathrm{const};\\ &\mathbf{g}_{-j}(u) = \mathbf{g}_j(u + N_1/2), \quad j,\, u \in \mathbb{Z};\\ &\mathbf{f}_i(-v) = \mathbf{f}_{i+k_1}(v), \qquad\quad i,\, v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ принадлежит множеству $\mathbf{S}$. Из условия (3) следует, что $\mathbf{g}_0(u) = \mathbf{c}(u,0)$ и $\mathbf{g}_{k_2}(u) = \mathbf{c}(u, N_2/2)$, а в силу (4) вектор-функции в правых частях не зависят от u.

Используя равенства (3) и условие (5), получаем

$$\mathbf{g}_{-j}(u) = \mathbf{c}(u, -jn_2) = \mathbf{c}(u + N_1/2, jn_2) = \mathbf{g}_j(u + N_1/2).$$

Аналогично проверяется последнее тождество в (6):

$$\mathbf{f}_i(-v) = \mathbf{c}(in_1, -v) = \mathbf{c}(in_1 + k_1n_1, v) = \mathbf{f}_{i+k_1}(v).$$

Достаточность. Пусть опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ удовлетворяют условиям (6). Справедливость соотношений (4) следует из (6) и (3):

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u,0) &= \mathbf{g}_0(u) \equiv \mathrm{const},\\ \mathbf{c}(u, N_2/2) &= \mathbf{g}_{k_2}(u) \equiv \mathrm{const}\,. \end{aligned}$$

Проверим тождество (5). По определению вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u,-v) = &\sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u - in_1)\,\mathbf{f}_i(-v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(-v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(u) -\\ &- \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u - in_1)\,H_0^v(-v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(in_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим суммы в правой части (7) по отдельности. Для первой суммы в силу (6) имеем

$$\sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u - in_1)\,\mathbf{f}_i(-v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u\big(u + k_1n_1 - (i + k_1)n_1\big)\,\mathbf{f}_{i+k_1}(v) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u + k_1 n_1 - i n_1)\, \mathbf{f}_i(v).$$

Во второй сумме заменим j на $-j$ и воспользуемся чётностью функции H_0^v и условиями (6):

$$\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(-v - j n_2)\, \mathbf{g}_j(u) = \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(-v + j n_2)\, \mathbf{g}_{-j}(u) =$$
$$= \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(v - j n_2)\, \mathbf{g}_j(u + N_1/2).$$

Преобразуем двойную сумму из (7), заменив i на $i + k_1$, j на $-j$ и учтя равенства (6) и чётность H_0^v:

$$\sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u - i n_1)\, H_0^v(-v - j n_2)\, \mathbf{g}_j(i n_1) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u\big(u - (i + k_1) n_1\big)\, H_0^v(-v + j n_2)\, \mathbf{g}_{-j}\big((i + k_1) n_1\big) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u + N_1/2 - i n_1)\, H_0^v(v - j n_2)\, \mathbf{g}_j(i n_1).$$

Подставляя полученные выражения в правую часть равенства (7), получаем

$$\mathbf{c}(u, -v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u + k_1 n_1 - i n_1)\, \mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(v - j n_2)\, \mathbf{g}_j(u + N_1/2) -$$
$$- \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u + N_1/2 - i n_1)\, H_0^v(v - j n_2)\, \mathbf{g}_j(i n_1) = \mathbf{c}(u + N_1/2, v).$$

Теорема доказана. □

Поверхности, определяемые вектор-функцией $\mathbf{c}(u, v)$ вида (2), принадлежащей множеству $\mathbf{S}$, будем называть *дискретными поверхностями Кунса сферического типа.*

Покажем, как построить наборы опорных вектор-функций $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$, удовлетворяющих и условиям согласования (1), и условиям (6). Пусть заданы значения постоянных вектор-функций $\mathbf{g}_0$ и $\mathbf{g}_{k_2}$, а также вектор-функции $\mathbf{g}_j$ при

$j \in 1 : k_2 - 1$ и значения $\mathbf{f}_i(v)$ при $i \in 0 : m_1 - 1$, $v \in 0 : N_2/2$, причём выполняются условия

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : k_2.$$

Доопределим оставшиеся значения вектор-функций $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ таким образом, чтобы были истинны условия (6):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i(v) &= \mathbf{f}_{i+k_1}(N_2 - v), & i &\in 0 : m_1 - 1, & v &\in N_2/2 + 1 : N_2 - 1; \\ \mathbf{g}_j(u) &= \mathbf{g}_{m_2-j}(u + N_1/2), & j &\in k_1 + 1 : m_1 - 1, & u &\in 0 : N_1 - 1. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для полученных вектор-функций справедливы равенства (1). Действительно, при $j \in 0 : k_2$ равенство $\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1)$ выполняется по условию. При $j \in k_2 + 1 : m_2 - 1$ имеем

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{f}_{i+k_1}\big((m_2 - j)n_2\big) = \mathbf{g}_{m_2-j}\big((i + k_1)n_1\big) = \mathbf{g}_j(in_1).$$

ПРИМЕР. Пусть $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$, $r_1 = r_2 = 3$. На рис. 2 приведён пример дискретной поверхности Кунса сферического типа. Остовные кривые выделены жирными линиями.

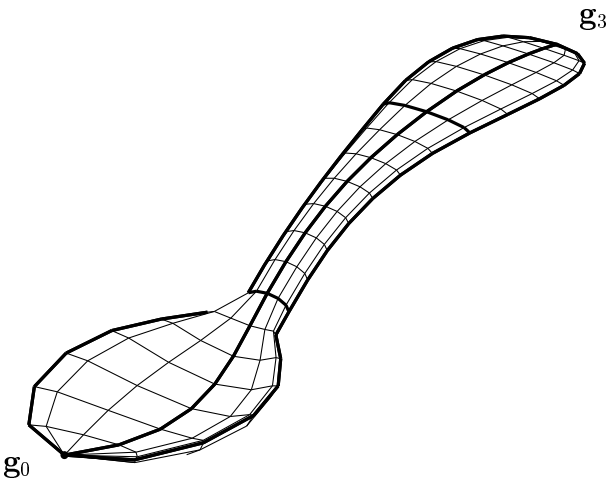


Рис. 2. Ложка

На рис. 3 приведён другой пример дискретной поверхности Кунса сферического типа. Здесь $m_1 = 4$, $m_2 = 10$, $n_1 = 11$, $n_2 = 4$, $r_1 = r_2 = 3$.

3°. Положим

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{a}(u+i, v+j)$$

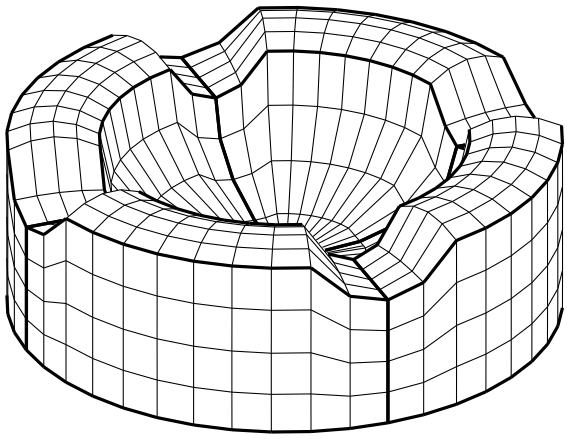


Рис. 3. Пепельница

и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\right\|^2\to\inf,\\ \mathbf{a}(\cdot,jn_2)=\mathbf{g}_j,\qquad j\in 0:m_2-1,\\ \mathbf{a}(in_1,\cdot)=\mathbf{f}_i,\qquad i\in 0:m_1-1,\\ \mathbf{a}\in\mathbf{T}.\end{gathered}\tag{8}$$

В [1] доказано, что единственным решением задачи (8) является вектор-функция дискретной поверхности Кунса, определяемая формулой (2).

Предположим, что опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ удовлетворяют условиям (6). Тогда по теореме вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ принадлежит множеству $\mathbf{S}$. Следовательно, $\mathbf{c}(u,v)$ является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered}\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\right\|^2\to\inf,\\ \mathbf{a}(\cdot,jn_2)=\mathbf{g}_j,\qquad j\in 0:m_2-1,\\ \mathbf{a}(in_1,\cdot)=\mathbf{f}_i,\qquad i\in 0:m_1-1,\\ \mathbf{a}\in\mathbf{S}.\end{gathered}$$

4°. Пусть заданы чётные числа $m_1=2k_1$, $m_2=2k_2$, набор непрерывных вектор-функций

$$\mathbf{F}_0,\,\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_{m_1-1}\colon[0,k_2]\to\mathbb{R}^3,$$

и набор m_1-периодических непрерывных вектор-функций

$$\mathbf{G}_0,\, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_{k_2} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Предположим, что вектор-функции $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{G}_j$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \mathbf{G}_0(x) \equiv \mathrm{const}, \quad \mathbf{G}_{k_2}(x) \equiv \mathrm{const}, \\ \mathbf{F}_i(j) = \mathbf{G}_j(i), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : k_2. \end{gathered} \tag{9}$$

Доопределим наборы вектор-функций по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(y) &= \mathbf{F}_{i+k_1}(m_2 - y), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \qquad y \in (k_2, m_2]; \\ \mathbf{G}_j(x) &= \mathbf{G}_{m_2-j}(x + k_1), \qquad j \in k_1 + 1 : m_1 - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Проверим, что равенство $\mathbf{F}_i(j) = \mathbf{G}_j(i)$ справедливо и при $i \in 0 : m - 1$, $j \in k_2 + 1 : m_2 - 1$. Действительно,

$$\mathbf{F}_i(j) = \mathbf{F}_{i+k_1}(m_2 - j) = \mathbf{G}_{m_2-j}(i + k_1) = \mathbf{G}_j(i).$$

Кроме того, при $i \in 0 : m_1 - 1$ имеет место тождество

$$\mathbf{F}_i(m_2) = \mathbf{F}_{i+k_1}(0) = \mathbf{G}_0(i + k_1) = \mathbf{G}_0(i) = \mathbf{F}_i(0),$$

поэтому вектор-функции $\mathbf{F}_i$ можно периодически продолжить на $\mathbb{R}$ с периодом m_2, сохранив непрерывность.

Итак, заданы наборы непрерывных вектор-функций

$$\begin{gathered} \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_{m_1-1}, \\ \mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_{m_2-1}, \end{gathered}$$

удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{F}_i(j) = \mathbf{G}_j(i), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{10}$$

Для натуральных n_1 и n_2, отличных от единицы, проведём дискретизацию вектор-функций $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{G}_j$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,n_2}(v) &:= \mathbf{F}_i\left(\tfrac{v}{n_2}\right), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}; \\ \mathbf{g}_{j,n_1}(u) &:= \mathbf{G}_j\left(\tfrac{u}{n_1}\right), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Полученные наборы опорных вектор-функций удовлетворяют как условиям согласования (1), так и условиям (6). Построим вектор-функцию $\mathbf{c}_{n_1,n_2}$ по формуле (2) для данных опорных вектор-функций. По теореме вектор-функция

$\mathbf{c}_{n_1,n_2}$ будет принадлежать множеству $\mathbf{S}$. В [3] доказано, что при неограниченном увеличении n_1 и n_2 дискретные функции $\mathbf{c}_{n_1,n_2}$ сходятся к предельной вектор-функции $\mathbf{c}_*$:

$$\mathbf{c}_{n_1,n_2}\big(\lfloor xn_1\rfloor, \lfloor yn_2\rfloor\big) \xrightarrow[n_1,n_2\to\infty]{} \mathbf{c}_*(x,y) \qquad \text{равномерно по } x,y\in\mathbb{R}.$$

Значит, дискретные поверхности Кунса $\sigma(c_{n_1,n_2})$ сходятся к поверхности, определяемой функцией $\mathbf{c}_*(x,y)$ при $x\in[0,m_1]$, $y\in[0,k_2]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Чашников. *Экстремальное свойство дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

3. Н. В. Чашников. *Предел дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 5 декабря 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#1205`)

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ГЕГЕНБАУЭРА

Н. О. Котелина

13 ноября 2010 г.

Выводится формула сложения для полиномов Гегенбауэра из формулы Грина для гармонических функций.

1°. Обозначения и предварительные сведения.

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ и σ_n — её площадь. Пусть далее

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

— единичный открытый шар в $\mathbb{R}^n$. В докладе будем рассматривать однородные гармонические полиномы степени k. Они удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Сужение однородного гармонического полинома степени k на сферу называется сферической функцией порядка k.

Обозначим $\mathrm{Harm}(k)$ линейное пространство сферических функций порядка k. Пусть $N(k)$ — размерность $\mathrm{Harm}(k)$. В [3] показано, что

$$N(k) = C_{n+k-1}^{k} - C_{n+k-3}^{k-2}\,.$$

В пространстве $L_2(S^{n-1})$ введём скалярное произведение

$$\big(f, g\big) \;=\; \int_{S^{n-1}} f(\xi)\, g(\xi)\, dS.$$

Тогда в $\mathrm{Harm}(k)$ можно выбрать ортонормированный базис

$$\big\{Y_{ks}(\xi) \mid s = 1, 2, \ldots, N(k)\big\},$$

такой, что $(Y_{ks}, Y_{kl}) = \delta_{sl}$. Как известно [4], система $\big\{\{Y_{ks}\}_{s=1}^{N(k)}\big\}_{k=0}^{\infty}$ является полной системой в пространстве $L_2(S^{n-1})$, так что любая функция $f \in$ $\in L_2(S^{n-1})$ разлагается в ряд Фурье по этой системе:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{N(k)} f_{ks}\, Y_{ks}\,, \quad f_{ks} = \big(f, Y_{ks}\big). \tag{1}$$

Данный ряд сходится по норме пространства $L_2(S^{n-1})$ [4].

2°. Полиномы Гегенбауэра.

Рассмотрим ультрасферические полиномы Якоби $\{P_k^{(\alpha,\alpha)}\}_{k=0}^{\infty}$. Они являются ортогональными с весом $(1-x^2)^{\alpha}$ на $[-1,1]$. Обозначим (см. [2])

$$P_k^{(\lambda)}(x) = M_k\, P_k^{(\alpha,\alpha)}(x), \quad \lambda = \alpha + \frac{1}{2}\,,$$

где константа M_k выбирается так, чтобы была справедлива формула

$$\frac{1}{(1-2xr+r^2)^{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(\lambda)}(x)\, r^k. \tag{2}$$

Ряд (2) сходится при выполнении неравенства $2|xr|+r^2<1$. Мы ограничимся случаем, когда $x\in[-1,1]$. Тогда условие сходимости гарантированно выполнено при $2|r|+r^2<1$, что равносильно неравенству $\big(1+|r|\big)^2<2$ или

$$|r| < \sqrt{2}-1. \tag{3}$$

Функция в левой части (2) является производящей функцией системы полиномов $\{P_k^{(\lambda)}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

В дальнейшем будем рассматривать полиномы Гегенбауэра $\{G_k^{(n)}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ вида

$$G_k^{(n)}(x) = C_k^{(n)} P_k^{(\lambda)}(x),$$

где $\lambda = \frac{n-3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{n-2}{2}$, а константа $C_k^{(n)}$ выбирается из условия $G_k^{(n)}(1)=1$. Вместо $G_k^{(n)}(x)$ будем писать просто $G_k(x)$. Основной целью доклада является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного ортонормированного базиса* $\{Y_{ks}\}_{s=1}^{N(k)} \subset \subset \mathrm{Harm}(k)$ *справедлива формула сложения для полиномов Гегенбауэра:*

$$G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big) = \frac{\sigma_n}{N(k)} \sum_{s=1}^{N(k)} Y_{ks}(\xi)\, Y_{ks}(\eta), \qquad \xi,\ \eta\in S^{n-1}. \tag{4}$$

Для доказательства формулы (4) зафиксируем ξ и найдём коэффициенты Фурье функции $f(\eta) = G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)$ в разложении в ряд по системе $\Big\{\{Y_{ms}(\eta)\}_{s=1}^{N(m)}\Big\}_{m=1}^{\infty}$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых целых* $k,\ m\geqslant 0$ *и* $s=1,\dots,N(m)$ *справедлива формула*

$$\Big(G_k\big(\langle\xi,\cdot\rangle\big), Y_{ms}\Big) = \frac{\sigma_n}{N(m)}\, Y_{ms}(\xi)\, \delta_{km}\,.$$

Из теоремы 2 будет следовать теорема 1.

3°. Формула Грина для гармонических функций.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится формула Грина для гармонических функций. Пусть функция $u(x)$ является гармонической в шаре B^n и принадлежит классу $C^1(\overline{B^n})$, где $\overline{B^n} = B^n \cup S^{n-1}$. Для $x \in B^n$ справедлива формула Грина (см. [1]):

$$u(x) \;=\; \gamma_n \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \nu} - u(\eta) \frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\Big)\, dS_\eta\,. \tag{5}$$

Здесь $\gamma_n = \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}$ и ν — вектор нормали к S^{n-1} в точке η.

Перейдём к доказательству теоремы 2.

4°. Доказательство теоремы 2.

Доказательство. Для произвольных $m \geqslant 0$, $s = 1, \ldots, N(m)$ функция $Y_{ms}(\eta)$ является сужением на сферу гармонического полинома $Y_{ms}(x)$ степени m. Запишем для него формулу Грина (5). Возьмём произвольную точку $\xi \in S^{n-1}$ и число $r \in [0, \sqrt{2}-1)$. Положим $x = r\xi$. Тогда $x \in B^n$. Пусть $\eta \in S^{n-1}$. Имеем

$$\|x-\eta\|^2 = \|r\xi - \eta\|^2 = r^2 - 2r\langle \xi, \eta\rangle + 1.$$

Возьмём $\lambda = \frac{n-2}{2}$, так что $n-2 = 2\lambda$. Пользуясь разложением (2), получаем тождество

$$\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}} = \frac{1}{\|x-\eta\|^{2\lambda}} = \frac{1}{\big(r^2 - 2r\langle \xi, \eta\rangle + 1\big)^\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(\lambda)}\big(\langle \xi, \eta\rangle\big)\, r^k.$$

Так как $|\langle \xi, \eta\rangle| \leqslant \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ и $r \in [0, \sqrt{2}-1)$, то ряд сходится (см. условие (3)). Для $Y_{ms}(x)$ формула Грина будет выглядеть следующим образом:

$$Y_{ms}(x) = r^m\, Y_{ms}(\xi) =$$

$$= \gamma_n \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}} \frac{\partial\big[Y_{ms}(\eta)\big]}{\partial \nu} - Y_{ms}(\eta) \frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\Big)\, dS_\eta\,,$$

где ν — это нормаль в точке η к S^{n-1}. Далее получим

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\Big) = \frac{d}{d\rho}\Big[\frac{1}{\|x-\rho\eta\|^{2\lambda}}\Big]_{\rho=1} = \frac{d}{d\rho}\Big[\frac{1}{\big(r^2 - 2r\rho\langle \xi, \eta\rangle + \rho^2\big)^\lambda}\Big]_{\rho=1} =$$

$$= \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^{2\lambda}\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{\rho}\right)\langle\xi,\eta\rangle + 1\right)^{\lambda}}\right]_{\rho=1} = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^{2\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\left(\frac{r}{\rho}\right)^k\right]_{\rho=1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}(n-2+k)\,P_k^{(\lambda)}(\langle\xi,\eta\rangle)\,r^k.$$

При $\eta \in S^{n-1}$ также выполняется равенство

$$\frac{\partial\big[Y_{ms}(\eta)\big]}{\partial\nu} = \left(\frac{d\big[\rho^m\,Y_{ms}(\eta)\big]}{d\rho}\right)_{\rho=1} = \big[m\,\rho^{m-1}\,Y_{ms}(\eta)\big]_{\rho=1} = m\,Y_{ms}(\eta).$$

С учётом этих соотношений и разложения в ряд для производящей функции формула Грина будет выглядеть так:

$$r^m\,Y_{ms}(\xi) = \gamma_n\int_{S^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}P_k^{\lambda}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,r^k\,m\,Y_{ms}(\eta) +$$

$$+\,Y_{ms}(\eta)\sum_{k=0}^{\infty}(k+n-2)\,P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,r^k\,dS_\eta =$$

$$= \gamma_n\sum_{k=0}^{\infty}r^k\int_{S^{n-1}}(m+k+n-2)\,P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta$$

при любом $r \in (0, \sqrt{2}-1)$. В силу произвольности r получим, что при $k \neq m$

$$\int_{S^{n-1}}(m+k+n-2)\,P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta = 0$$

или, так как $n \geqslant 3$,

$$\int_{S^{n-1}}P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta = 0.$$

По определению полинома Гегенбауэра приходим к равенству

$$\int_{S^{n-1}}G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta = 0.$$

При $k = m$

$$\int_{S^{n-1}}P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ks}(\eta)\,dS_\eta = \frac{1}{\gamma_n(2k+n-2)}\,Y_{ks}(\xi),$$

так что

$$\frac{1}{C_k^{(n)}}\int_{S^{n-1}}G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ks}(\eta)\,dS_\eta = \frac{1}{\gamma_n(2k+n-2)}\,Y_{ks}(\xi).$$

Обозначив $C = \frac{C_k^{(n)}}{\gamma_n(2k+n-2)}$, получим для всех $k, m \geqslant 0$

$$\Big(G_k\big(\langle\xi,\cdot\rangle\big), Y_{ms}(\cdot)\Big) = C\, Y_{ms}(\xi)\, \delta_{km}\,.$$

Константу C найдём при доказательстве теоремы 1. □

5°. Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Для $f(\eta) = G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)$ с учётом теоремы 2 и формулы (1) можно записать разложение

$$f(\eta) = G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{N(m)} f_{ms}\, Y_{ms}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{N(m)} \Big(G_k\big(\langle\xi,\cdot\rangle\big), Y_{ms}(\cdot)\Big)\, Y_{ms}(\eta) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{N(m)} C\, Y_{ms}(\xi)\, \delta_{km}\, Y_{ms}(\eta).$$

Отсюда следует, что

$$G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big) = C\sum_{s=1}^{N(k)} Y_{ks}(\xi)\, Y_{ks}(\eta). \tag{6}$$

При $\xi = \eta$ в силу нормировки $G_k(1) = 1$ получим тождество

$$1 = C\sum_{s=1}^{N(k)} Y_{ks}^2(\xi), \qquad \xi \in S^{n-1}.$$

Проинтегрируем обе части тождества по сфере S^{n-1}. Придём к равенству

$$\sigma_n = CN(k). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big) = \frac{\sigma_n}{N(k)}\sum_{s=1}^{N(k)} Y_{ks}(\xi)\, Y_{ks}(\eta), \qquad \xi,\eta \in S^{n-1}.$$

Это и есть формула сложения для полиномов Гегенбауэра. □

Замечание. Поясним, как выглядит формула сложения в случае $n = 2$, когда $\lambda = 0$ и вес имеет вид $(1 - x^2)^{-1/2}$. Этому весу соответствуют ортогональные полиномы — полиномы Чебышёва $T_k(x)$. Для них $T_k(\cos\varphi) = \cos k\varphi$.

Возьмём точки $\xi, \eta \in S^1$ и запишем их в полярных координатах $\xi = (\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$, $\eta = (\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$. Для скалярного произведения получаем формулу

$$\langle \xi, \eta \rangle = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Поэтому $T_k(\langle \xi, \eta \rangle) = \cos k(\varphi_1 - \varphi_2)$.

В случае $n = 2$ имеем $\sigma_2 = 2\pi$, $N(k) = 2$ при $k \geqslant 1$, $\sigma_2/N(k) = \pi$. Пространство $\mathrm{Harm}(k)$ при $k \geqslant 1$ состоит из тригонометрических полиномов $a\cos k\varphi + b\sin k\varphi$ (см. [1], с. 387) и ортонормированный базис в нём образуют функции $Y_{k1}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k\varphi$ и $Y_{k2}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k\varphi$. Формула (4) принимает вид

$$\cos k(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi\Big(\frac{\cos k\varphi_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos k\varphi_2}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sin k\varphi_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin k\varphi_2}{\sqrt{\pi}}\Big).$$

Эта формула (после сокращения на π) называется формулой сложения для функции $\cos k\varphi$. По аналогии формула (4) называется формулой сложения для полиномов Гегенбауэра.

6°. Свойство неотрицательной определённости полиномов Гегенбауэра.

Покажем, что полиномы Гегенбауэра $G_k(x)$ при $k \geqslant 0$ обладают свойством неотрицательной определённости. Это значит, что для произвольных $m > 0$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ из S^{n-1} матрица $A = \big\{G_k(\langle \xi_i, \xi_j \rangle)\big\}_{i,j=0}^m$ является неотрицательно определённой, то есть для любого $y \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\langle Ay, y \rangle \geqslant 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Полиномы Гегенбауэра $G_k(x)$ обладают свойством неотрицательной определённости.*

Доказательство. Опираемся на теорему 1. Рассмотрим произвольные $m > 0$, точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ из S^{n-1} и вектор $y \in \mathbb{R}^m$. В формуле (4) положим $\xi = \xi_i$, $\eta = \xi_j$. После этого умножим обе части равенства на $y_i\, y_j$ и просуммируем по $i, j \in 1 : m$. Получим

$$\langle Ay, y \rangle = \sum_{i,j=1}^m G_k\big(\langle \xi_i, \xi_j \rangle\big)\, y_i\, y_j = \frac{\sigma_n}{N(k)} \sum_{s=1}^{N(k)} \Big[\sum_{i=1}^m y_i\, Y_{ks}(\xi_i)\Big]^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. □

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. *Уравнения математической физики: Учебник для вузов.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

2. Г. Сегё. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962.

3. Р. Е. Афонин, А. Б. Певный. *Представление Гаусса для однородных полиномов и критерий сферического дизайна* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 августа 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0828`).

4. С. Л. Соболев. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974.

ПРОЕКТИВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Н. В. Чашников

19 февраля 2011 г.

1°. Пусть $N = mn$, где m и n — натуральные числа, отличные от единицы. Напомним данное в [1] определение нормализованных дискретных N-периодических B-сплайнов. B-сплайн первого порядка на основном периоде $0 : N-1$ задаётся явно

$$\widetilde{Q}_{1,n}(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ 0 & \text{при } j \in n : N-n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N-n+1 : N-1. \end{cases}$$

Нормализованные B-сплайны более высоких порядков вводятся с помощью циклической свёртки

$$\widetilde{Q}_{\nu,n} = \tfrac{1}{n}(\widetilde{Q}_{1,n} * \widetilde{Q}_{\nu-1,n}), \quad \nu = 2, 3, \ldots.$$

Для любого натурального ν значения B-сплайна $\widetilde{Q}_{\nu,n}$ неотрицательны и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{\nu,n}(j - pn) = 1, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Пусть фиксировано натуральное число r. Дискретный периодический сплайн порядка r с векторными коэффициентами определяется формулой

$$\mathbf{S}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j - pn)\, \mathbf{a}(p), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\mathbf{a}(0), \mathbf{a}(1), \ldots, \mathbf{a}(m-1)$ — векторы из пространства $\mathbb{R}^d$, называемые *полюсами*.

В [1] показано, что дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами можно использовать в геометрическом моделировании. Соединим отрезками пары соседних точек сплайна $\mathbf{S}(j)$, $\mathbf{S}(j+1)$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную, лежащую внутри выпуклой оболочки полюсов. Изменяя положение полюсов, можно добиться желаемой формы ломаной.

2°. Пусть заданы полюсы $\mathbf{a}(0), \mathbf{a}(1), \ldots, \mathbf{a}(m-1)$ и положительные вещественные числа $w(0), w(1), \ldots, w(m-1)$, называемые *весами*. Припишем каждому полюсу $\mathbf{a}(p)$ дополнительную координату, равную единице, и умножим полученный вектор на $w(p)$. Придём к новому набору полюсов в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$\widehat{a}(p) = \big(w(p)\,\mathbf{a}(p), w(p)\big), \quad p \in 0 : m-1.$$

По полюсам $\widehat{a}(p)$ построим дискретный периодический сплайн

$$\widehat{S}(j) = \left(\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)\,\mathbf{a}(p),\ \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)\right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для каждого $j \in 0 : N-1$ спроецируем точку $\widehat{S}(j)$ на гиперплоскость

$$\big\{(\mathbf{x}, 1) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\big\},$$

используя центральную проекцию с центром в начале координат. Алгебраически эта операция выражается делением всех компонент вектора $\widehat{S}(j)$ на последнюю. Отбросим последнюю (равную единице) координату в полученном векторе и обозначим результат через $\mathbf{R}(j)$:

$$\mathbf{R}(j) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)\,\mathbf{a}(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)}. \tag{3}$$

Для проверки корректности определения необходимо удостовериться, что знаменатель дроби отличен от нуля. Действительно, согласно тождеству (1) знаменатель является выпуклой комбинацией весов $w(p)$. Но все веса положительны, поэтому их выпуклая комбинация также положительна. Формула (3) определяет вектор-функцию $\mathbf{R}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$, периодичную с периодом N. Назовём эту функцию *проективным дискретным периодическим сплайном порядка* r, построенным по полюсам $\mathbf{a}(p)$ с весами $w(p)$.

Использованная здесь геометрическая идея позаимствована из [2, с. 209], где с её помощью вводились проективные кривые Безье.

Рассмотрим случай, когда все веса $w(p)$ равны единице. С учётом равенства (1) проективный сплайн $\mathbf{R}(j)$ примет вид (2). Таким образом, обычные дискретные периодические сплайны являются частным случаем проективных.

Проективные дискретные периодические сплайны можно использовать для построения замкнутых ломаных. Соединяя соседние точки сплайна $\mathbf{R}(j)$, $\mathbf{R}(j+1)$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$ отрезками, получим замкнутую ломаную. Управлять формой ломаной можно меняя как полюсы, так и соответствующие им веса.

ПРИМЕР 1. Пусть $m = 4$, $n = 10$, $r = 2$ и полюсы расположены в вершинах квадрата. На рис. 1 изображена ломаная, определяемая проективным дискретным периодическим сплайном, все веса которого равны единице. На рис. 2 показана ломаная, полученная после изменения одного из весов с 1 на 3. На рисунках кружками отмечены полюсы, рядом с ними приведены соответствующие им веса.

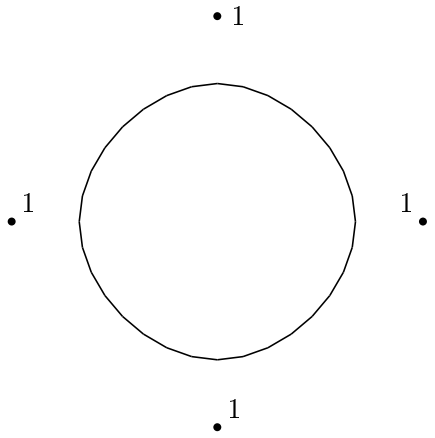


Рис. 1

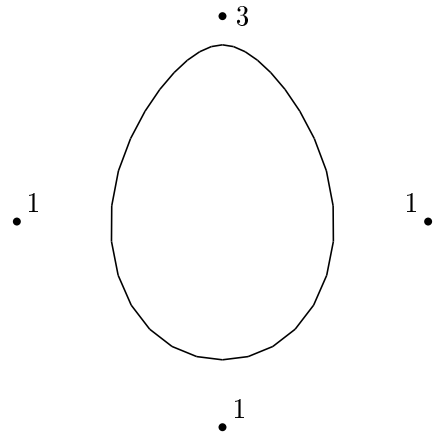


Рис. 2

3°. Пусть фиксированы веса $w(p)$, $p \in 0 : m-1$, и заданы векторы $\mathbf{b}(0), \mathbf{b}(1), \ldots, \mathbf{b}(m-1)$. Рассмотрим интерполяционную задачу: найти полюсы $\mathbf{a}(p)$, при которых проективный сплайн вида (3) удовлетворяет условиям

$$\mathbf{R}(ln) = \mathbf{b}(l), \quad l \in 0 : m-1. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 1. *Интерполяционная задача* (4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Будем считать, что наборы $\mathbf{a}(p)$, $w(p)$ и $\mathbf{b}(p)$ периодически продолжены на все целые p с периодом m. Введём функцию

$$h_n(p) := \widetilde{Q}_{r,n}(pn), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что $h_n(p)$ — m-периодическая функция.

Подставим в равенство (4) выражение для $\mathbf{R}(j)$:

$$\frac{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(ln-pn)\, w(p)\, \mathbf{a}(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(ln-pn)\, w(p)} = \mathbf{b}(p).$$

Перенесём знаменатель в правую часть и воспользуемся определением функции $h_n(p)$:

$$\sum_{p=0}^{m-1} h_n(l-p)\, w(p)\, \mathbf{a}(p) = \mathbf{b}(p) \sum_{p=0}^{m-1} h_n(l-p)\, w(p).$$

Перепишем полученное равенство в компактной форме:

$$(w\,\mathbf{a}) * h_n = \mathbf{b} \cdot (h_n * w). \tag{5}$$

Для произвольных m-периодических вектор-функции $\mathbf{x}(j)$ и скалярной функции $y(j)$ справедливо тождество

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{x} * y) = \mathcal{F}_m(\mathbf{x})\mathcal{F}_m(y). \tag{6}$$

Здесь свёртка вектор-функции со скалярной, ДПФ вектор-функции и произведение вектор-функции на скалярную вычисляются покомпонентно. Справедливость формулы (6) следует из теоремы о свёртке [3, с. 38].

Применим ДПФ к обеим частям равенства (5) и воспользуемся тождеством (6):

$$\mathcal{F}_m(w\,\mathbf{a})\, H_n = \mathcal{F}_m\big(\mathbf{b} \cdot (h_n * w)\big),$$

где $H_n = \mathcal{F}_m(h_n)$. Известно (см. доказательство теоремы 1 в [4]), что значения $H_n(k)$ положительны. Поделив на H_n, придём к равенству

$$\mathcal{F}_m(w\,\mathbf{a}) = \frac{\mathcal{F}_m\big(\mathbf{b} \cdot (h_n * w)\big)}{H_n}.$$

Осталось применить обратное ДПФ к обеим частям и поделить на положительную функцию w:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{w}\, \mathcal{F}_m^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}_m\big(\mathbf{b} \cdot (h_n * w)\big)}{H_n}\right). \tag{7}$$

В силу эквивалентности проведённых преобразований формула (7) задаёт набор полюсов, являющий единственным решением задачи (4). □

Обратимся к геометрической интерпретации теоремы 1. Пусть заданы точки интерполяции и веса. Ломаная, определяемая интерполяционным сплайном, проходит через точки интерполяции. Меняя веса, можно регулировать форму ломаной.

ПРИМЕР 2. Пусть $r = 2$, $m = 6$, $n = 15$. На рисунках 3 и 4 показаны ломаные, задаваемые интерполяционными сплайнами, построенными по одним и тем же точкам интерполяции, но с разными весами. Точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ изображены кружками, рядом приведены веса $w(p)$.

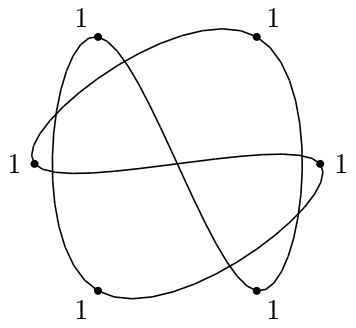


Рис. 3

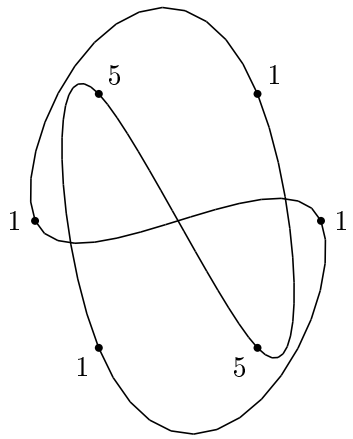


Рис. 4

4°. Пусть фиксированы натуральные числа r и $m \geqslant 2$, точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ и веса $w(p)$. Для каждого натурального n, отличного от единицы, построим проективный интерполяционный сплайн $\mathbf{R}_n(j)$. Исследуем поведение множества $\{\mathbf{R}_n(j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ при неограниченном увеличении n.

Напомним данное в [4] определение m-периодических B-сплайнов вещественного аргумента. На основном периоде $[0, m]$ сплайны задаются рекуррентно:

$$P_1(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{при } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t - m + 1, & \text{при } t \in (m-1, m]; \end{cases}$$

$$P_\nu(t) = \int_0^m P_{\nu-1}(s)\, P_1(t-s)\, ds, \qquad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Для любого натурального ν сплайн P_ν неотрицателен и удовлетворяет тождеству

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(t - l) \equiv 1. \tag{8}$$

Кроме того, функция P_ν принадлежит пространству $C^{2\nu-2}$.

ЛЕММА. *Для любого натурального ν и вещественного t справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{Q}_{\nu,n}\big(\lfloor tn\rfloor\big) = P_\nu(t), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Доказательство. Зафиксируем натуральное ν. В [4] доказано, что найдётся такое A_ν, что

$$\big|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\tfrac{j}{n})\big| \leqslant \frac{A_\nu}{n} \qquad \text{для всех } j,n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 2.$$

Возьмём произвольное вещественное t и положим $j=\lfloor tn\rfloor$. Имеем

$$\Big|\widetilde{Q}_{\nu,n}\big(\lfloor tn\rfloor\big) - P_\nu(t)\Big| \leqslant \big|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\tfrac{j}{n})\big| + \big|P_\nu(\tfrac{j}{n}) - P_\nu(t)\big|.$$

Первое слагаемое не превосходит $\frac{A_\nu}{n}$ и поэтому стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Второе слагаемое также стремится к нулю, так как функция P_ν непрерывна и выполняется неравенство

$$\Big|\frac{j}{n} - t\Big| = \Big|\frac{\lfloor tn\rfloor - tn}{n}\Big| \leqslant \frac{1}{n}\,.$$

Следовательно, разность $\widetilde{Q}_{\nu,n}\big(\lfloor tn\rfloor\big) - P_\nu(t)$ стремится к нулю, что и требовалось доказать. □

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $t\in\mathbb{R}$ существует конечный предел*

$$\mathbf{R}_*(t) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_n\big(\lfloor tn\rfloor\big). \tag{10}$$

Предельная вектор-функция $\mathbf{R}_*\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ принадлежит пространству C^{2r-2}.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{a}_n(p)$, $p\in 0:m-1$, коэффициенты интерполяционного сплайна $\mathbf{R}_n$. Значения вектор-функции $\mathbf{a}_n$ определяются по формуле (7):

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{w}\,\mathcal{F}_m^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}_m\big(\mathbf{b}\cdot(h_n * w)\big)}{H_n}\right). \tag{11}$$

В правой части (11) от n зависят только функции h_n и H_n. Найдём их пределы.

В силу леммы при $k\in 0:m-1$ справедливо предельное соотношение

$$h(k) := \lim_{n\to\infty} h_n(k) = \lim_{n\to\infty} Q_{r,n}(kn) = P_r(k).$$

При доказательстве теоремы 1 в [4] было установлено, что для каждого $k \in \in 0 : m-1$ существует конечный предел

$$H(k) := \lim_{n\to\infty} H_n(k) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(p)\,\omega_m^{-kp}$$

и $H(k)$ положительно.

Используемые в правой части (11) операции свёртки, ДПФ и обратного ДПФ сводятся к конечному не зависящему от n числу арифметических действий. Следовательно, можно перейти к пределу под этими операциями. Принимая во внимание положительность H, получаем

$$\mathbf{a}_*(p) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n(p) = \left[\frac{1}{w}\,\mathcal{F}_m^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}_m\big(\mathbf{b}\cdot(h*w)\big)}{H}\right)\right](p).$$

Зафиксируем $t \in [0, m]$ и подставим $\lfloor tn \rfloor$ в формулу (3):

$$\mathbf{R}_n\big(\lfloor tn \rfloor\big) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p)\, \mathbf{a}_n(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p)}. \tag{12}$$

Найдём предел знаменателя и числителя дроби по отдельности. Для знаменателя согласно (9) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p).$$

Полученное выражение положительно, так как в силу тождества (8) представляет собой выпуклую комбинацию положительных весов $w(p)$.

Воспользовавшись соотношением (9) и сходимостью последовательности $\big\{\mathbf{a}_n(p)\big\}$, получим выражение для предела числителя в правой части (12):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p)\, \mathbf{a}_n(p) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p)\, \mathbf{a}_*(p).$$

Итак,

$$\mathbf{R}_*(t) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_n\big(\lfloor tn \rfloor\big) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p)\, \mathbf{a}_*(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p)}.$$

Сплайн P_r принадлежит пространству C^{2r-2}, поэтому вектор-функция $\mathbf{R}_*(t)$ также принадлежит этому пространству.

Теорема доказана. □

Рассмотрим результат теоремы 2 с геометрической точки зрения. Ломаные, задаваемые проективными интерполяционными сплайнами, сходятся к гладкой кривой, определяемой вектор-функцией $\mathbf{R}_*(t)$. Подставляя в формулу (10) значение $t = l \in 0 : m - 1$, получаем

$$\mathbf{R}_*(l) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_n(ln) = \mathbf{b}(l).$$

Следовательно, предельная кривая проходит через точки интерполяции.

ПРИМЕР 3. Пусть $m = 5$, $r = 2$. На рисунках 5–8 штриховыми линиями изображены ломаные, соответствующие проективным дискретным сплайнам, построенным для различных значений n по одному и тому же набору из пяти точек интерполяции. Кроме того, на каждом рисунке сплошной линией показана предельная кривая, задаваемая вектор-функцией $\mathbf{R}_*(t)$. Точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ отмечены кружками, рядом с которыми указаны веса $w(p)$.

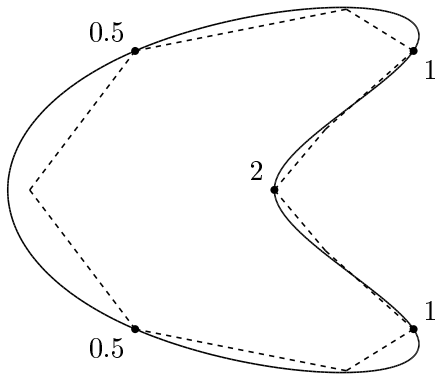


Рис. 5. $n = 2$

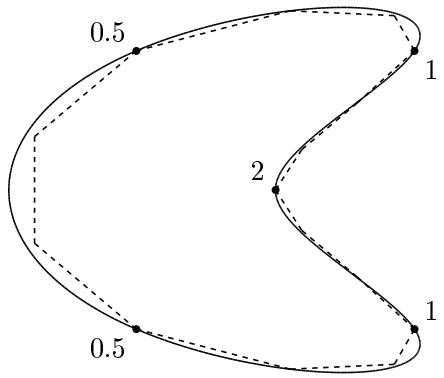


Рис. 6. $n = 3$

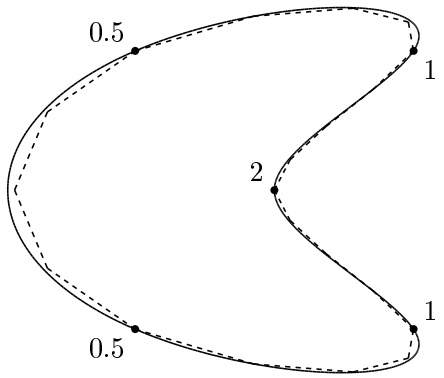


Рис. 7. $n = 4$

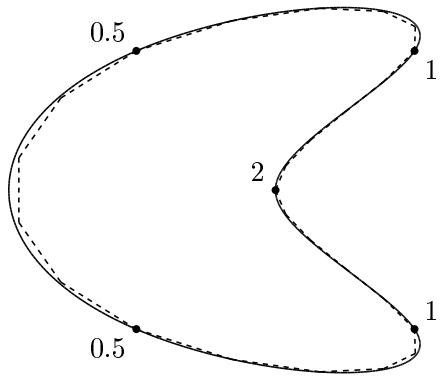


Рис. 8. $n = 5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0904`)

2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.

3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть первая. СПб.: НИИММ, 2003. 100 с.

4. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША

В. Н. Малозёмов

12 марта 2011 г.

В докладе приводятся базовые сведения о дискретных функциях Уолша.

1°. Пусть $N = 2^s$, где s — натуральное число. Возьмём числа $k, j \in 0 : N-1$ и запишем их двоичные коды

$$k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_2\,, \quad j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2\,.$$

Здесь k_α и j_α принимают значения 0 или 1. Обозначим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, j_\alpha\,.$$

Функции

$$v_k(j) = (-1)^{\{k,j\}_s} = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha j_\alpha}, \quad k, j \in 0 : N-1, \tag{1}$$

называются *дискретными функциями Уолша*. Очевидно, что

$$v_0(j) \equiv 1 \quad \text{и} \quad v_k(0) = 1 \quad \text{при } k \in 1 : N-1.$$

Дискретные функции Уолша принимают только два значения ± 1.

2°. Дискретные функции Уолша связаны с *матрицами Адамара*. Последние определяются рекуррентно

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} \quad \text{при } \nu = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Матрица A_ν имеет порядок 2^ν. Будем считать, что индексы её строк и столбцов изменяются от 0 до $2^\nu - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула*

$$A_\nu[k, j] = (-1)^{\{k,j\}_\nu}, \quad k, j \in 0 : 2^\nu - 1. \tag{3}$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (3) очевидна, поскольку $\{k, j\}_1 = kj$ при $k, j \in 0 : 1$. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν.

Возьмём $k, j \in 0 : 2^\nu - 1$ и представим их в виде

$$k = k_{\nu-1}\, 2^{\nu-1} + k', \quad j = j_{\nu-1}\, 2^{\nu-1} + j',$$

где $k' = (k_{\nu-2}, \ldots, k_0)_2$, $j' = (j_{\nu-2}, \ldots, j_0)_2$. Согласно (2)

$$A_\nu[k, j] = (-1)^{k_{\nu-1} j_{\nu-1}} A_{\nu-1}[k', j']$$

($k_{\nu-1}$, $j_{\nu-1}$ — индексы блоков, k', j' — индексы элемента внутри блока). По индукционному предположению

$$A_{\nu-1}[k', j'] = (-1)^{\{k', j'\}_{\nu-1}},$$

так что

$$A_\nu[k, j] = (-1)^{k_{\nu-1} j_{\nu-1} + \{k', j'\}_{\nu-1}} = (-1)^{\{k, j\}_\nu}.$$

Предложение доказано. □

Сравнивая (1) и (3), получаем

$$v_k(j) = A_s[k, j], \quad k, j \in 0 : N - 1, \tag{4}$$

то есть значения $v_k(j)$ на множестве $0 : N-1$ совпадают с k-й строкой матрицы Адамара A_s.

ПРИМЕР. Построим графики дискретных функций Уолша при $N = 2^3 = 8$. Согласно (2) имеем

$$A_2 = \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right], \quad A_3 = \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

На рис. 1 представлены графики функций $v_k(j)$, $j \in 0 : 7$, при $k \in 0 : 7$.

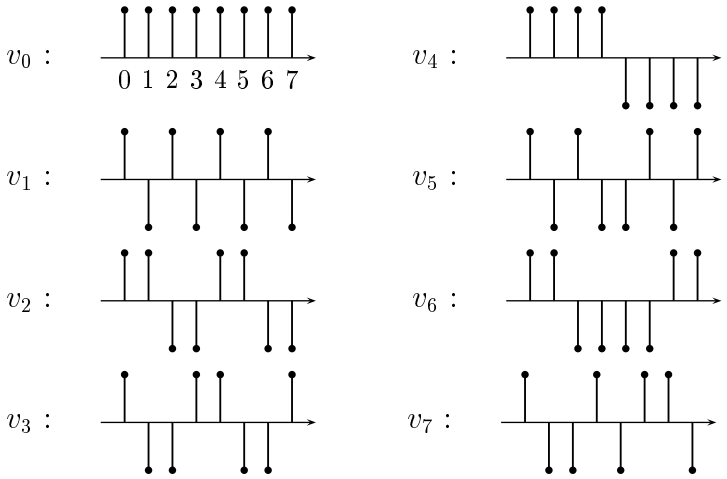


Рис. 1. Графики дискретных функций Уолша при $N = 8$.

3°. Введём скалярное произведение и норму дискретных функций Уолша:

$$\langle v_k, v_{k'} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} v_k(j)\, v_{k'}(j), \qquad \|v_k\| = \sqrt{\langle v_k, v_k \rangle}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При $N = 2^s$ дискретные функции Уолша $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ попарно ортогональны и $\|v_k\| = \sqrt{N}$ при всех $k \in 0 : N-1$.*

Доказательство. Отметим, что в силу (3) матрицы A_ν симметричны. Кроме того,

$$A_\nu\, A_\nu = 2^\nu E_{2^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где E_{2^ν} — единичная матрица порядка 2^ν. При $\nu = 1$ это очевидно. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν. Согласно (2)

$$A_\nu\, A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A_{\nu-1}A_{\nu-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & 2A_{\nu-1}A_{\nu-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^\nu E_{2^{\nu-1}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & 2^\nu E_{2^{\nu-1}} \end{bmatrix} = 2^\nu E_{2^\nu}.$$

Равенство (5) установлено.

Теперь воспользуемся формулами (4), (5) при $\nu = s$ и симметричностью матрицы A_s. Получим

$$\langle v_k, v_{k'} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} A_s[k,j]\, A_s[k',j] = \sum_{j=0}^{N-1} A_s[k,j]\, A_s[j,k'] =$$

$$= \big(A_s A_s\big)[k,k'] = 2^s E_{2^s}[k,k'].$$

Предложение доказано. □

4°. Продолжим изучение свойств дискретных функций Уолша. Согласно (1)

$$v_k(j) = v_j(k), \quad k, j \in 0 : N-1. \tag{6}$$

Далее, справедливо равенство

$$\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \delta_N(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{7}$$

При $j = 0$ это очевидно. Пусть $j \in 1 : N-1$. В силу ортогональности функций Уолша и (6) имеем

$$\sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \sum_{k=0}^{N-1} v_j(k)\, v_0(k) = 0,$$

что эквивалентно (7).

Для формулировки очередных свойств нам потребуется операция поразрядного сложения чисел из множества $0 : 2^s - 1$. Пусть

$$k = (k_{s-1}, \ldots, k_0)_2\,, \quad j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_2\,.$$

Число $l = (l_{s-1}, \ldots, l_0)_2$ называется поразрядной суммой чисел k и j, $l = k \oplus j$, если

$$l_\alpha = \langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2\,, \quad \alpha \in 0 : s-1,$$

где $\langle n \rangle_2 = n - 2\lfloor n/2 \rfloor$ есть остаток от деления целого числа n на 2.

Нетрудно понять, что $j \oplus j = 0$ при всех $j \in 0 : 2^s - 1$. Отметим также, что при $k, j \in 0 : 2^s - 1$

$$\delta_N(k \oplus j) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j, \\ 0, & \text{если } k \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедлива формула*

$$v_k(j \oplus r) = v_k(j)\, v_k(r), \quad j, r \in 0 : N-1. \tag{9}$$

Действительно,

$$v_k(j \oplus r) = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha (j \oplus r)_\alpha} = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha \langle j_\alpha + r_\alpha \rangle_2} =$$

$$= \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha (j_\alpha + r_\alpha)} = v_k(j)\, v_k(r). \qquad \square$$

Согласно (6) и (9)

$$v_k(j)\, v_{k'}(j) = v_j(k)\, v_j(k') = v_j(k \oplus k') = v_{k\oplus k'}(j).$$

Таким образом,

$$v_k(j)\, v_{k'}(j) = v_m(j), \quad j \in 0 : N-1, \tag{10}$$

где $m = k \oplus k'$. К этому нужно добавить формулу

$$1/v_k(j) = v_k(j), \quad j \in 0 : N-1, \tag{11}$$

справедливость которой следует из тождества $v_k^2(j) \equiv 1$.

Соотношения (10) и (11) характеризуют систему дискретных функций Уолша $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ как *мультипликативную* систему.

5°. Операция поразрядного сложения коммутативна и ассоциативна. Коммутативность, $k \oplus j = j \oplus k$, очевидна. Проверим ассоциативность:

$$(k \oplus j) \oplus r = k \oplus (j \oplus r).$$

При $\alpha \in 0 : s-1$ имеем

$$\big((k \oplus j) \oplus r\big)_\alpha = \big\langle (k \oplus j)_\alpha + r_\alpha \big\rangle_2 = \big\langle \langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2 + r_\alpha \big\rangle_2 =$$
$$= \big\langle (k_\alpha + j_\alpha) + r_\alpha \big\rangle_2 = \big\langle k_\alpha + \langle j_\alpha + r_\alpha \rangle_2 \big\rangle_2 = \big(k \oplus (j \oplus r)\big)_\alpha .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При фиксированном $k \in 0 : N-1$ отображение $j \to j \oplus k$ является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.*

Доказательство. Указанное отображение переводит множество $0 : N-1$ в себя, поэтому достаточно проверить, что уравнение $x \oplus k = j$ имеет на $0 : N-1$ решение при любом $j \in 0 : N-1$. Таким решением будет $x_0 = j \oplus k$. Действительно,

$$x_0 \oplus k = (j \oplus k) \oplus k = j \oplus (k \oplus k) = j. \qquad \square$$

В табл. 1 указана перестановка $j \to j \oplus k$ при $N = 8 = 2^3$ и $k = 6 = (1, 1, 0)_2$.

Таблица 1

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$j \oplus 6$	6	7	4	5	2	3	0	1

Можно ввести операцию поразрядного вычитания $k \ominus j$, положив

$$(k \ominus j)_\alpha = \langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 , \quad \alpha \in 0 : s-1.$$

Но эта операция избыточна, поскольку

$$k \ominus j = k \oplus j.$$

Проверим последнее равенство. Запишем его в развёрнутом виде

$$\langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 = \langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2 \,, \quad \alpha \in 0 : s-1, \tag{12}$$

где $k_\alpha, j_\alpha \in 0 : 1$. Зафиксируем α. При $k_\alpha = j_\alpha$ равенство (12) справедливо $(0 = 0)$. Пусть $k_\alpha \neq j_\alpha$. Тогда $\langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2 = 1$. Вместе с тем, $\langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 = 1$ при $k_\alpha = 1$, $j_\alpha = 0$ и при $k_\alpha = 0$, $j_\alpha = 1$ также

$$\langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 = \langle -1 \rangle_2 = -1 - 2\lfloor (-1)/2 \rfloor = 1.$$

6°. Введём *дикретное преобразование Уолша* $\mathcal{W}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$, сопоставляющее сигналу $x \in \mathbb{C}_N$ сигнал $X = \mathcal{W}_N(x)$ с отсчётами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, v_k(j), \quad k \in 0 : N-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (формула обращения)**.** *Справедливо равенство*

$$x(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, v_k(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно (9), (7) и (8) имеем

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, v_k(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, v_k(l) \Big)\, v_k(j) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} v_k(l)\, v_k(j) =$$
$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} v_k(l \oplus j) = N \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, \delta_N(l \oplus j) = N x(j),$$

что равносильно (13). □

Сигнал $X = \mathcal{W}_N(x)$ называется *спектром Уолша* сигнала x.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть* $x, y \in \mathbb{C}_N$ *и* $X = \mathcal{W}_N(x)$, $Y = \mathcal{W}_N(y)$. *Тогда*

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{N} \langle X, Y \rangle. \tag{14}$$

Действительно, в силу (13) и вещественности v_k

$$\tfrac{1}{N}\langle X, Y\rangle = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, v_k(l)\Big)\,\overline{Y}(k) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\left\{\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{Y}(k)\, v_k(l)\right\} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\overline{y}(l) = \langle x, y\rangle.$$

При $x = y$ из (14) следует, что

$$\|x\|^2 = \tfrac{1}{N}\,\|X\|^2. \tag{15}$$

Соотношения (15), (14) называются соответственно *равенством Парсеваля* и *обобщённым равенством Парсеваля* для дискретного преобразования Уолша.

7°. *Диадной свёрткой* сигналов x, y из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал z с отсчётами

$$z(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, y(k \oplus j), \quad k \in 0 : N-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (о диадной свёртке). *Пусть z есть диадная свёртка сигналов x, y из $\mathbb{C}_N$. Тогда*

$$\mathcal{W}_N(z) = \mathcal{W}_N(x)\,\mathcal{W}_N(y).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (9) и тем фактом, что отображение $j \to j \oplus l$ является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Получим

$$\big[\mathcal{W}_N(z)\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, y(j \oplus l)\Big)\, v_k\big((j \oplus l) \oplus l\big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{j'=0}^{N-1} y(j')\, v_k(j' \oplus l) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{j=0}^{N-1} y(j)\, v_k(j)\, v_k(l) =$$

$$= \big[\mathcal{W}_N(x)\big](k)\,\big[\mathcal{W}_N(y)\big](k). \qquad \square$$

8°. Обратимся к вопросу о *частоте* дискретной функции Уолша $v_k(j)$. Начнём с экспоненциальной функции

$$u_k(j) = \exp\big(i\,\tfrac{2\pi k}{N}\,j\big).$$

Её частота считается равной k. Это связано с тем, что при изменении j от 0 до N (до начала следующего периода) аргумент комплексного числа $u_k(j)$,

равный $\frac{2\pi k}{N}j$, изменяется, монотонно возрастая, от 0 до $2\pi k$, то есть точка $u_k(j)$ пробегает k раз единичную окружность комплексной плоскости.

Рассмотрим с этой точки зрения дискретную функцию Уолша

$$v_k(j) = (-1)^{\{k,j\}_s} = \exp\bigl(i\pi\{k,j\}_s\bigr).$$

К сожалению, величина $\{k,j\}_s$ не возрастает монотонно вместе с j. Пример поведения этой величины при $N = 8 = 2^3$ и $k = 3 = (0,1,1)_2$ представлен в табл. 2.

Таблица 2

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\{k,j\}_3$	0	1	1	2	0	1	1	2

Чтобы добиться монотонности, приведём $v_k(j)$ при $j = (j_{s-1},\dots,j_0)_2$ к виду

$$v_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha (j_\alpha + j_{\alpha+1}2 + \dots + j_{s-1}2^{s-1-\alpha})}.$$

Отметим, что

$$j/2^\alpha = j_{s-1}\,2^{s-1-\alpha} + \dots + j_{\alpha+1}\,2 + j_\alpha + j_{\alpha-1}\,2^{-1} + \dots + j_0\,2^{-\alpha},$$

так что

$$\lfloor j/2^\alpha \rfloor = j_{s-1}\,2^{s-1-\alpha} + \dots + j_{\alpha+1}\,2 + j_\alpha\,.$$

Получаем

$$v_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha \lfloor j/2^\alpha \rfloor}, \quad j \in 0 : N-1.$$

Обозначив

$$\theta_k(j) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha \lfloor j/2^\alpha \rfloor,$$

придём к представлению

$$v_k(j) = (-1)^{\theta_k(j)}, \quad j \in 0 : N-1. \tag{16}$$

Формула (16) верна и при $j = N = 2^s$. В этом случае

$$\theta_k(N) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, 2^{s-\alpha} = 2\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, 2^{s-1-\alpha}. \tag{17}$$

Следовательно, правая часть (16) при $j = N$ равна единице. В силу N-периодичности и левая часть (16) при $j = N$ равна единице. Действительно, $v_k(N) = v_k(0) = 1$. Таким образом, формула (16) справедлива при $j \in 0 : N$.

Перепишем (16) в виде

$$v_k(j) = \exp\bigl(i\pi\theta_k(j)\bigr), \quad j \in 0 : N.$$

Теперь аргумент комплексного числа $v_k(j)$, равный $\pi\theta_k(j)$, при изменении j от 0 до N изменяется, *монотонно не убывая*, от 0 до $\pi\theta_k(N)$.

Разберёмся с величиной $\theta_k(N)$ (см. (17)). Отметим, что

$$\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, 2^{s-1-\alpha} = k_0\, 2^{s-1} + k_1\, 2^{s-2} + \dots + k_{s-1}\,.$$

В правой части этого равенства стоит число, двоичным кодом которого является перевёрнутый двоичный код числа k. Обозначим его $\mathrm{rev}_s(k)$ (от английского слова *reverse*). Согласно (17),

$$\theta_k(N) = 2\,\mathrm{rev}_s(k).$$

Приходим к следующему заключению: при изменении j от 0 до N аргумент комплексного числа $v_k(j)$ изменяется, монотонно не убывая, от 0 до $2\pi\,\mathrm{rev}_s(k)$, то есть точка $v_k(j)$ пробегает $\mathrm{rev}_s(k)$ раз единичную окружность комплексной плоскости. Естественно число $\mathrm{rev}_s(k)$ считать частотой дискретной функции Уолша v_k.

9°. Очевидно, что $\mathrm{rev}_s(k) \in 0 : N-1$, поэтому отображение $k \to \mathrm{rev}_s(k)$ есть отображение множества $0 : N-1$ в себя. На самом деле, это отображение является *перестановкой* множества $\{0, 1, \dots, N-1\}$, что следует из равенства $\mathrm{rev}_s(\mathrm{rev}_s(k)) = k$, $k \in 0 : N-1$.

В табл. 3 приведён пример такой перестановки при $N = 8 = 2^3$.

Таблица 3

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{rev}_3(k)$	0	4	2	6	1	5	3	7

10°. Обозначим

$$\widehat{v}_k = v_{\mathrm{rev}_s(k)}\,.$$

Согласно (1) имеем

$$\widehat{v}_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1}(\mathrm{rev}_s(k))_\alpha\, j_\alpha} = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{s-1-\alpha}\, j_\alpha}, \quad k, j \in 0 : N-1.$$

Частота функции $\widehat{v}_k$ равна k, так что система функций

$$\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_{N-1}$$

упорядочена по частоте. Она называется *системой Уолша-Пэли* в отличие от исходной системы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$, которая называется *системой Уолша-Адамара.*

На рис. 2 представлена система Уолша-Пэли при $N = 8 = 2^3$ (ср. с рис. 1).

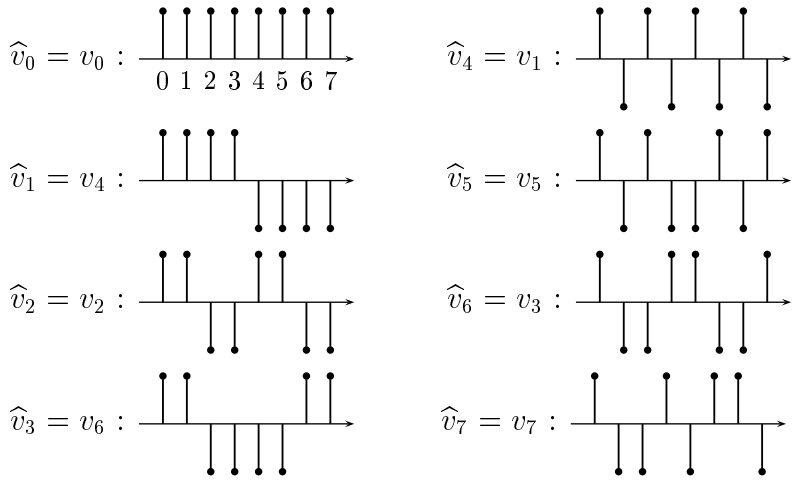


Рис. 2. Графики дискретных функций Уолша, упорядоченных по частоте, при $N = 8$.

11°. Вернёмся к разложению (13) сигнала x по базису Уолша-Адамара. Отметим, что

$$v_{\mathrm{rev}_s(k)}(\mathrm{rev}_s(j)) = v_k(j),$$

поэтому

$$x(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, v_{\mathrm{rev}_s(k)}(\mathrm{rev}_s(j)) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \widehat{v}_k(\mathrm{rev}_s(j)).$$

Заменив j на $\mathrm{rev}_s(j)$, получим

$$x(\mathrm{rev}_s(j)) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \widehat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Таким образом, спектр Уолша-Адамара $\{X(k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала $x(j)$ является одновременно спектром Уолша-Пэли сигнала $x(\mathrm{rev}_s(j))$.

12°. Обобщению дискретных функций Уолша посвящён доклад [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В., Сабаев А. Н. *Дискретные функции Виленкина-Крестенсона* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 января 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml\#0116`).

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ХААРА

В. Н. Малозёмов

19 марта 2011 г.

В докладе представлены базовые сведения о дискретных функциях Хаара. Описаны быстрое преобразование Хаара и его обращение. Приведены примеры разложения сигнала по базису Хаара.

1°. Пусть $N = 2^s$, где s — натуральное число. Обозначим

$$N_\nu = N/2^\nu, \quad \nu \in 0 : s; \qquad \Delta_\nu = 2^{\nu-1}, \quad \nu \in 1 : s+1.$$

Очевидно, что $N_0 = N$, $N_s = 1$; $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_{s+1} = N$ и

$$N_\nu \, \Delta_{\nu+1} = N \quad \text{при всех } \nu \in 0 : s.$$

Построим рекуррентную последовательность систем N-периодических сигналов

$$\varphi_\nu = \big\{\varphi_\nu(p; j)\big\}_{p=0}^{N_{\nu-1}-1}, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Сигнал $\varphi_\nu(p; j)$ как элемент пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $\varphi_\nu(p)$. Положим

$$\varphi_0(p) = \delta_N(\cdot - p), \quad p \in 0 : N-1;$$

$$\begin{gathered} \varphi_\nu(p) = \varphi_{\nu-1}(2p) + \varphi_{\nu-1}(2p+1), \\ \varphi_\nu(p + N_\nu) = \varphi_{\nu-1}(2p) - \varphi_{\nu-1}(2p+1), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{1}$$

В табл. 1 представлена структура последовательности $\{\varphi_\nu\}_{\nu=0}^s$ при $s = 3$ (при $N = 8$).

Таблица 1

φ_0	$\varphi_0(0)$	$\varphi_0(1)$	$\varphi_0(2)$	$\varphi_0(3)$	$\varphi_0(4)$	$\varphi_0(5)$	$\varphi_0(6)$	$\varphi_0(7)$
φ_1	$\varphi_1(0)$	$\varphi_1(1)$	$\varphi_1(2)$	$\varphi_1(3)$	$\varphi_1(4)$	$\varphi_1(5)$	$\varphi_1(6)$	$\varphi_1(7)$
φ_2	$\varphi_2(0)$	$\varphi_2(1)$	$\varphi_2(2)$	$\varphi_2(3)$				
φ_3	$\varphi_3(0)$	$\varphi_3(1)$						

Ясно, что сигналы системы φ_ν можно выразить через сигналы системы φ_0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы формулы*

$$\varphi_\nu(p) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}) + \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \tag{2}$$

$$\varphi_\nu(p + N_\nu) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}) - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \tag{3}$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Начнём с формулы (2), которую можно переписать так:

$$\varphi_\nu(p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}). \tag{4}$$

При $\nu = 1$ она примет вид

$$\varphi_1(p) = \sum_{q=0}^{1} \varphi_0(q + 2p),$$

что соответствует (1). Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν. Имеем

$$\varphi_\nu(p) = \varphi_{\nu-1}(2p) + \varphi_{\nu-1}(2p+1) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + 2p\Delta_\nu) + \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + (2p+1)\Delta_\nu) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}) + \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}).$$

Справедливость формулы (4) при всех $\nu \in 1 : s$ установлена. Отметим, что эта формула верна и при $\nu = 0$.

Заменив в (4) ν на $\nu - 1$ и подставив полученное выражение в рекуррентное соотношение $\varphi_\nu(p + N_\nu) = \varphi_{\nu-1}(2p) - \varphi_{\nu-1}(2p + 1)$, придём аналогично предыдущему к (3).

Предложение доказано. □

Система φ_s состоит из двух сигналов $\varphi_s(0)$ и $\varphi_s(1)$. Согласно (4) и (3) при $\nu = s$ ($N_s = 1$, $p = 0$)

$$\varphi_s(0) = \sum_{q=0}^{N-1} \varphi_0(q),$$

$$\varphi_s(1) = \sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_0(q) - \sum_{q=N/2}^{N-1} \varphi_0(q)$$

или, в развёрнутом виде,

$$\varphi_s(0; j) = \sum_{q=0}^{N-1} \delta_N(j - q), \tag{5}$$

$$\varphi_s(1; j) = \sum_{q=0}^{N/2-1} \delta_N(j - q) - \sum_{q=N/2}^{N-1} \delta_N(j - q). \tag{6}$$

Ясно, что $\varphi_s(0; j) \equiv 1$, в то время как $\varphi_s(1; j)$ на половине периода принимает значение $+1$, а на второй половине периода значение -1.

Запишем ещё одну формулу, которая следует из (3) при $p = 0$:

$$\varphi_\nu(N_\nu; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - q) - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - q), \tag{7}$$

$$j \in 0 : N - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

2°. Формулы (2) и (3) можно объединить

$$\varphi_\nu(p + lN_\nu) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{l\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \tag{8}$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Действительно, при $l = 0$ формула (8) совпадает с (4), а при $l = 1$ — с (3). В последнем случае нужно учесть, что

$$\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{при } q \in 0 : \Delta_\nu - 1, \\ 1 & \text{при } q \in \Delta_\nu : \Delta_{\nu+1} - 1. \end{cases} \tag{9}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При каждом* $\nu \in 1:s$ *сигналы*

$$\varphi_\nu(0), \varphi_\nu(1), \ldots, \varphi_\nu(N_{\nu-1}-1)$$

попарно ортогональны; при этом $\|\varphi_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$ *при всех* $k \in 0 : N_{\nu-1}-1$.

Доказательство. Возьмём индексы $k, k' \in 0 : N_{\nu-1}-1$ и представим их в виде

$$k = lN_\nu + p, \quad k' = l'N_\nu + p',$$

где $p, p' \in 0 : N_\nu - 1$, $l, l' \in 0 : 1$. Согласно (8) имеем

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \big\langle \varphi_\nu(p + lN_\nu), \varphi_\nu(p' + l'N_\nu) \big\rangle =$$
$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{l\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor + l'\lfloor q'/\Delta_\nu \rfloor} \big\langle \varphi_\nu(q + p\Delta_{\nu+1}), \varphi_\nu(q' + p'\Delta_{\nu+1}) \big\rangle.$$

Воспользуемся формулой

$$\langle \delta_N(\cdot - s), \delta_N(\cdot - s') \rangle = \delta_N(s - s'), \quad s, s' \in \mathbb{Z}.$$

Получим

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \sum_{q,q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{l\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor + l'\lfloor q'/\Delta_\nu \rfloor} \delta_N(q - q' + (p - p')\Delta_{\nu+1}).$$

Отметим, что $|q - q'| \leqslant \Delta_{\nu+1} - 1$. Если $p \neq p'$, то аргумент у δ_N отличен от нуля при всех $q, q' \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. В этом случае

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = 0.$$

При $p = p'$ аргумент у δ_N равен нулю только при $q = q'$, поэтому

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{(l+l')\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor}.$$

Напомним, что $l, l' \in 0 : 1$. Если $l \neq l'$, то $l + l' = 1$. В силу (9) получим

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor} = 0.$$

И только тогда, когда $p = p'$, $l = l'$, то есть когда $k = k'$, скалярное произведение $\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k) \rangle$ отлично от нуля. Оно равно $\Delta_{\nu+1} = 2^\nu$.

Предложение доказано. □

3°. Рассмотрим систему сигналов

$$\varphi_s(0); \quad \varphi_\nu(p+N_\nu), \ \ p \in 0 : N_\nu - 1, \ \ \nu = s, s-1, \ldots, 1. \tag{10}$$

При $N = 8 = 2^3$ она выглядит так (см. табл. 1)

$$\varphi_3(0),\ \varphi_3(1),\ \varphi_2(2),\ \varphi_2(3),\ \varphi_1(4),\ \varphi_1(5),\ \varphi_1(6),\ \varphi_1(7).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Сигналы* (10) *попарно ортогональны.*

Доказательство. Зафиксируем $\nu \in 1 : s-1$. Внутри блока $\{\varphi_\nu(p+N_\nu)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$ сигналы попарно ортогональны в силу предложения 2. Они ортогональны и сигналам блоков $\{\varphi_{\nu'}(p+N_{\nu'})\}_{p=0}^{N_{\nu'}-1}$ при $\nu' > \nu$ (включая блок $\{\varphi_s(0), \varphi_s(1)\}$), которые по построению являются линейными комбинациями сигналов блока $\{\varphi_\nu(p)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$. Ортогональность следует из того, что согласно предложению 2 сигналы блока $\{\varphi_\nu(p)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$ ортогональны сигналам блока $\{\varphi_\nu(p+N_\nu)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$. □

Ортогональная система (10) состоит из N сигналов. Она образует базис пространства $\mathbb{C}_N$, который называется *базисом Хаара*. Сигналы, входящие в базис Хаара, называются *дискретными функциями Хаара*.

Вид функций $\varphi_s(0)$ и $\varphi_s(1)$ нам известен (см. (5), (6)). Уточним структуру функций $\varphi_\nu(p+N_\nu)$ при $\nu \in 1 : s-1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При* $\nu \in 1 : s-1$ *и* $p \in 0 : N_\nu - 1$ *справедливо тождество*

$$\varphi_\nu(p+N_\nu; j) = \varphi_\nu(N_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, подставив в (7) $j - p\Delta_{\nu+1}$ вместо j, получим

$$\varphi_\nu(N_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q) \ - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q) =$$
$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}; j) \ - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}; j) = \varphi_\nu(p+N_\nu; j).$$

Теперь базис Хаара (10) принимает вид

$$\varphi_s(0; j),\ \varphi_s(1; j); \quad \varphi_\nu(N_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}), \ \ p \in 0 : N_\nu - 1, \ \ \nu = s-1, s-2, \ldots, 1.$$

Функции $\varphi_s(0; j)$, $\varphi_s(1; j)$ и $\varphi_\nu(N_\nu; j)$ при $\nu = s-1, s-2, \ldots, 1$ на множестве $0 : N-1$ определяются формулами (5), (6), (7).

На рис. представлен базис Хаара при $N = 8 = 2^3$. В данном случае $\varphi_2(N_2) = \varphi_2(2)$, $\varphi_1(N_1) = \varphi_1(4)$.

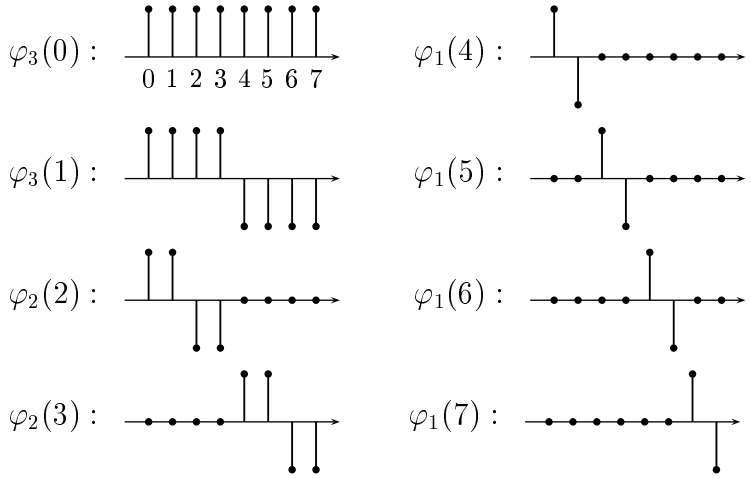


Рис. Базис Хаара при $N = 2^3$.

4°. Разложим сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ по базису Хаара (10):

$$x = 2^{-s}\,\xi_s(0)\,\varphi_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \xi_\nu(p + N_\nu)\,\varphi_\nu(p + N_\nu). \tag{11}$$

Здесь $\xi_s(0) = \langle x, \varphi_s(0)\rangle$, $\xi_\nu(p + N_\nu) = \langle x, \varphi_\nu(p + N_\nu)\rangle$. Это следует из предложения 3 и условий $\|\varphi_s(0)\|^2 = 2^s$, $\|\varphi_\nu(p + N_\nu)\|^2 = 2^\nu$.

Введём расширенную систему обозначений

$$\begin{aligned} &\xi_0(p) = \langle x, \varphi_0(p)\rangle, \quad p \in 0 : N - 1; \\ &\xi_\nu(p) = \langle x, \varphi_\nu(p)\rangle, \quad p \in 0 : N_{\nu-1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

Имеем

$$\xi_0(p) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\delta_N(j - p) = x(p), \quad p \in 0 : N - 1.$$

Согласно (1) при $p \in 0 : N_\nu - 1$

$$\begin{aligned} \xi_\nu(p) &= \langle x, \varphi_{\nu-1}(2p) + \varphi_{\nu-1}(2p + 1)\rangle = \xi_{\nu-1}(2p) + \xi_{\nu-1}(2p + 1), \\ \xi_\nu(p + N_\nu) &= \langle x, \varphi_{\nu-1}(2p) - \varphi_{\nu-1}(2p + 1)\rangle = \xi_{\nu-1}(2p) - \xi_{\nu-1}(2p + 1). \end{aligned}$$

Приходим к следующей схеме вычислений:

$$\begin{gathered}\xi_0(p) = x(p), \quad p \in 0 : N-1;\\ \xi_\nu(p) = \xi_{\nu-1}(2p) + \xi_{\nu-1}(2p+1),\\ \xi_\nu(p+N_\nu) = \xi_{\nu-1}(2p) - \xi_{\nu-1}(2p+1),\\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.\end{gathered} \tag{12}$$

Эта схема называется *быстрым преобразованием Хаара* сигнала x. Она позволяет вычислить коэффициенты разложения (11) (см. табл. 2).

Таблица 2

ξ_0	$\xi_0(0)$	$\xi_0(1)$	$\xi_0(2)$	$\xi_0(3)$	$\xi_0(4)$	$\xi_0(5)$	$\xi_0(6)$	$\xi_0(7)$
ξ_1	$\xi_1(0)$	$\xi_1(1)$	$\xi_1(2)$	$\xi_1(3)$	$\xi_1(4)$	$\xi_1(5)$	$\xi_1(6)$	$\xi_1(7)$
ξ_2	$\xi_2(0)$	$\xi_2(1)$	$\xi_2(2)$	$\xi_2(3)$				
ξ_3	$\xi_3(0)$	$\xi_3(1)$						

Система коэффициентов

$$\xi_s(0); \quad \xi_\nu(p+N_\nu), \;\; p \in 0 : N_\nu - 1, \;\; \nu = s, s-1, \ldots, 1, \tag{13}$$

называется *спектром Хаара* сигнала x. Для вычисления спектра Хаара по схеме (12) требуются только сложения/вычитания в количестве

$$2\sum_{\nu=1}^{s} N_\nu = 2\sum_{\nu=1}^{s} 2^{s-\nu} = 2(N-1)$$

(примерно два сложения/вычитания на одну компоненту спектра!).

ПРИМЕР. Разложим по базису Хаара при $N = 8$ сигнал

$$x = (1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1).$$

Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

ξ_0	1	−1	−1	1	1	1	−1	−1
ξ_1	0	0	2	−2	2	−2	0	0
ξ_2	0	0	0	4				
ξ_3	0	0						

Получаем

$$x = \tfrac{1}{4}\,4\,\varphi_2(3) + \tfrac{1}{2}\,2\,\varphi_1(4) - \tfrac{1}{2}\,2\,\varphi_1(5) = \varphi_2(3) + \varphi_1(4) - \varphi_1(5).$$

Справедливость этого равенства можно проверить непосредственно, если воспользоваться видом функций $\varphi_2(3)$, $\varphi_1(4)$, $\varphi_1(5)$ (см. рис.).

5°. Схема (12) допускает обращение:

$$\begin{gathered}\xi_{\nu-1}(2p) = \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(p) + \xi_\nu(p+N_\nu)\big],\\ \xi_{\nu-1}(2p+1) = \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(p) - \xi_\nu(p+N_\nu)\big],\\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.\end{gathered} \tag{14}$$

Формулы (14) позволяют по спектру Хаара (13) сигнала x восстановить все его отсчёты: $x(p) = \xi_0(p)$, $p \in 0 : N-1$.

6°. Приведём ещё два примера. Первый пример посвящён разложению сигнала по базису Хаара, второй — обратной задаче.

Рассмотрим при $k \in 0 : s-1$ сигнал-«ступеньку»

$$h_k(j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{k+1}-1} \delta_N(j-q), \quad j \in 0 : N-1.$$

Покажем, что

$$h_k(j) = 2^{-s+k} + \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\,\varphi_\nu(N_\nu; j). \tag{15}$$

Согласно (1) при $p = 0$, $\nu \in 1 : s$ имеем

$$2\,\varphi_{\nu-1}(0; j) = \varphi_\nu(0; j) + \varphi_\nu(N_\nu; j).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\,\varphi_\nu(N_\nu; j) &= 2\sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\,\varphi_{\nu-1}(0; j) - \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\,\varphi_\nu(0; j) =\\ &= \sum_{\nu=k}^{s-1} 2^{-\nu+k}\,\varphi_\nu(0; j) - \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\,\varphi_\nu(0; j) =\\ &= \varphi_k(0; j) - 2^{-s+k}\,\varphi_s(0; j).\end{aligned}$$

Отсюда следует (15), если учесть, что $\varphi_s(0; j) \equiv 1$ и $\varphi_k(0; j) = h_k(j)$ (см. (4)).

Положив в (15) $k = 0$, придём к разложению единичного импульса по базису Хаара:

$$\delta_N(j) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^{s} 2^{-\nu}\,\varphi_\nu(N_\nu; j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Теперь восстановим сигнал x, у которого все компоненты спектра Хаара равны единице. Покажем, что в этом случае

$$x(j) = 1 - \tfrac{2}{N}\,\mathrm{rev}_s(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{16}$$

Здесь $\mathrm{rev}_s(j)$ — число, двоичный код которого есть перевёрнутый двоичный код числа j. Таким образом, если $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2$, то $\mathrm{rev}_s(j) = (j_0, j_1, \ldots, j_{s-1})_2$. Нам потребуются два простых свойства операции rev_s:

$$\begin{gathered} \mathrm{rev}_1(j) = j \quad \text{при } j \in 0 : 1; \\ \mathrm{rev}_{\nu+1}(2p+\sigma) = \sigma\, 2^\nu + \mathrm{rev}_\nu(p), \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{17}$$

Проверим последнее равенство. Пусть $p = p_{\nu-1}\, 2^{\nu-1} + \cdots + p_0$. Тогда

$$2p + \sigma = p_{\nu-1}\, 2^\nu + \cdots + p_0\, 2 + \sigma$$

и

$$\mathrm{rev}_{\nu+1}(2p+\sigma) = \sigma\, 2^\nu + p_0\, 2^{\nu-1} + \cdots + p_{\nu-1} = \sigma\, 2^\nu + \mathrm{rev}_\nu(p).$$

Для восстановления таблицы быстрого преобразования Хаара по спектру, все компоненты которого равны единице, воспользуемся формулами (14), заменив в них ν на $s - \nu$:

$$\begin{gathered} \xi_{s-\nu-1}(2p) = \tfrac{1}{2}\big[\xi_{s-\nu}(p) + 1\big], \\ \xi_{s-\nu-1}(2p+1) = \tfrac{1}{2}\big[\xi_{s-\nu}(p) - 1\big], \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s-1 \end{gathered} \tag{18}$$

(учли, что $N_{s-\nu} = \Delta_{\nu+1}$). Блоки ξ_{s-1} и ξ_s должны выглядеть так:

Таблица 4

ξ_{s-1}	1	0	1	1
ξ_s	1	1		

Введём обозначение

$$x_\nu(p) = 1 - \tfrac{1}{2^{\nu-1}}\ \mathrm{rev}_\nu(p)$$

и покажем, что при $\nu = 1, \ldots, s$

$$\xi_{s-\nu}(p) = x_\nu(p), \quad p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1.$$

При $\nu = 1$ эта формула верна (см. табл. 4). Проверим, что при указанных $\xi_{s-\nu}$ выполняются соотношения (18).

Перепишем (18) в терминах x_ν:

$$\begin{gathered} x_{\nu+1}(2p) = \tfrac{1}{2}\big[x_\nu(p) + 1\big], \\ x_{\nu+1}(2p+1) = \tfrac{1}{2}\big[x_\nu(p) - 1\big], \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1. \end{gathered} \tag{19}$$

Подставив вместо $x_\nu(p)$ его явное выражение, преобразуем (19) к виду

$$\begin{gathered} \mathrm{rev}_{\nu+1}(2p) = \mathrm{rev}_\nu(p), \\ \mathrm{rev}_{\nu+1}(2p+1) = 2^\nu + \mathrm{rev}_\nu(p), \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1. \end{gathered}$$

Справедливость последних соотношений следует из (17).

Итак, мы полностью восстановили таблицу быстрого преобразования Хаара. По построению

$$x(j) = \xi_0(j) = x_s(j) = 1 - \tfrac{2}{N}\,\mathrm{rev}_s(j), \quad j \in 0 : N - 1.$$

7°. Дальнейшие сведения о дискретных функциях Хаара имеются в [1, 2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть вторая. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов* // Проблемы передачи инф. 2000. Т. 36. Вып. 2. С. 27–37.

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А. *Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений* // Проблемы передачи инф. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 77–85.

КОНТАКТНЫЕ ЧИСЛА И СФЕРИЧЕСКИЕ КОДЫ

Н. О. Котелина А. Б. Певный

26 марта 2011 г.

Инициирующей для нас работой послужила статья Н. Н. Андреева и В. А. Юдина [1]. Для оценки контактных чисел M_n сверху используется теорема Дельсарта [2], которая при $n = 8$ и 24 даёт точный результат.

1°. В $\mathbb{R}^n$ определены скалярное произведение $xy = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ векторов x, y и норма $|x| = \sqrt{xx}$. Рассмотрим шар $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leqslant r\}$ радиуса $r > 0$. Будем искать шары $B(x_i, r)$, $i \in 1 : m$, касающиеся шара $B(x_0, r)$, но при этом $B(x_i, r)$ и $B(x_j, r)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m$ не должны иметь общих внутренних точек. Эти условия можно записать так:

$$|x_i - x_0| = 2r, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

$$|x_i - x_j| \geqslant 2r, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant m. \tag{2}$$

Какое максимальное количество m шаров $B(x_i, r)$ можно прикоснуть к данному шару $B(x_0, r)$ так, чтобы выполнялись условия (1) *и* (2)?

Через M_n обозначим максимально возможное m. Число M_n зависит только от n и называется *контактным числом*. Используется также английский термин “kissing number”. Известны контактные числа $M_2 = 6$, $M_3 = 12$, $M_4 = 24$. О них имеется обширная литература (см. ссылки в [5, 6, 7]). Число $M_3 = 12$ правильно указано Ньютоном в 1694 г. Из многочисленных доказательств отметим работу [8]. Равенство $M_4 = 24$ очень сложным образом доказал О. Мусин [7].

Обратимся теперь к сферическим кодам. *Сферическим кодом* называется любое конечное множество C на сфере $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Рассмотрим случай, когда угол между векторами кода не меньше 60°, то есть выполнено неравенство

$$xy \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \forall\, x,\ y \in C, \quad x \neq y. \tag{3}$$

Такой код C будем называть $\frac{1}{2}$-кодом. Условие (3) равносильно неравенству

$$|x - y|^2 = |x|^2 - 2xy + |y|^2 = 2(1 - xy) \geqslant 1,$$

то есть расстояние между точками кода не меньше 1.

Какое максимальное количество точек может иметь $\frac{1}{2}$-код на сфере S^{n-1}?

Через A_n обозначим максимальное количество векторов $\frac{1}{2}$-кода. Справедливо равенство

$$A_n = M_n. \tag{4}$$

Действительно, возьмём $\frac{1}{2}$-код $C = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$, где $m = A_n$, основной шар $B(\mathbb{O}, \frac{1}{2})$ и приклеим к нему шары $B(x_i, \frac{1}{2})$, $i \in 1 : m$. Условия (1) и (2) выполнены при $x_0 = \mathbb{O}$ и $r = \frac{1}{2}$, поэтому $A_n \leqslant M_n$. Обратное неравенство столь же очевидно.

Многочисленные примеры $\frac{1}{2}$-кодов можно получить, рассматривая минимальные векторы решеток (см. об этом [1]), а оценку сверху для $A_n = M_n$ дает теорема Дельсарта [2].

2°. В начале 1970-х годов Ф. Дельсарт предложил замечательный метод оценки A_n сверху, использующий специальные полиномы $\left\{G_k^{(n)}(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$. Эти полиномы обладают свойствами:

1) $G_k^{(n)}(t)$ — алгебраический полином степени k;

2) полиномы $\left\{G_k^{(n)}(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$ образуют ортогональную систему на $[-1, 1]$ с весом $w_n(t) = (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$;

3) выполнено условие нормировки $G_k^{(n)}(1) = 1$;

4) для любых $x_1, \dots, x_m \in S^{n-1}$ матрица $\left\{G_k^{(n)}(x_i\, x_j)\right\}_{i,j=1}^{m}$ неотрицательно определена; в частности,

$$\sum_{i,j=1}^{m} G_k^{(n)}(x_i\, x_j) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{5}$$

Полиномы $G_k^{(n)}(t)$ являются частным случаем полиномов Гегенбауэра $P_k^{(\alpha,\alpha)}(t)$ при $\alpha = (n-3)/2$ (см. [3]) с изменённым условием нормировки. Поэтому в дальнейшем полиномы $G_k^{(n)}(t)$ будем называть полиномами Гегенбауэра. Доказательство свойства неотрицательной определённости приводится в докладе [4].

ТЕОРЕМА 1 (Дельсарт). *Пусть $f(t)$ — полином степени d, удовлетворяющий условиям:*

1) $f(t) \leqslant 0$ при $t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$;

2) коэффициенты разложения $f(t)$ по полиномам Гегенбауэра

$$f(t) = \sum_{k=0}^{d} f_k^{(n)} G_k^{(n)}(t)$$

неотрицательны и $f_0^{(n)} > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$A_n \leqslant f(1)/f_0^{(n)}.$$

Доказательство. Возьмём произвольный $\frac{1}{2}$-код $C = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset S^{n-1}$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{i,j=1}^{m} f(x_i\, x_j) = f_0^{(n)} m^2 + \sum_{k=1}^{d} f_k^{(n)} \sum_{i,j=1}^{m} G_k^{(n)}(x_i\, x_j). \tag{6}$$

В силу условия 2) и неравенства (5) $S \geqslant f_0^{(n)} m^2$. Вместе с тем в силу условия 1) и неравенства (3) имеем $f(x_i\, x_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$. Отсюда следует, что $S \leqslant mf(1)$.

В результате получаем $f_0^{(n)} m^2 \leqslant S \leqslant mf(1)$, откуда

$$m \leqslant \frac{f(1)}{f_0^{(n)}}. \tag{7}$$

Ввиду произвольности кода C получим утверждение теоремы. □

3°. Допустим, что нашёлся сферический $\frac{1}{2}$-код $C = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и полином $f(t)$, удовлетворяющий условиям теоремы, такие, что выполнено равенство $m = f(1)/f_0^{(n)}$. Тогда

$$f_0^{(n)} m^2 = S = mf(1).$$

Учитывая, что $S = mf(1) + \sum_{i \neq j} f(x_i\, x_j)$, получаем

$$\sum_{i \neq j} f(x_i\, x_j) = 0.$$

Здесь все слагаемые $f(x_i\, x_j)$ неположительны, поэтому

$$f(x_i\, x_j) = 0 \qquad \text{для всех пар } (i,\, j),\ i \neq j. \tag{8}$$

Значит, скалярные произведения $t_{ij} = x_i\, x_j$ при $i \neq j$ должны быть корнями полинома $f(t)$.

Кроме того, из (6) следует, что

$$f_k^{(n)} \sum_{i,j=1}^{m} G_k^{(n)}(x_i\, x_j) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, d. \tag{9}$$

Если $f_k^{(n)} > 0$, то сумма должна равняться нулю.

Эти соображения позволяют построить экстремальный полином $f(t)$ при $n = 8$ и $n = 24$.

4°. При $n = 8$ максимальный $\frac{1}{2}$-код образуют минимальные векторы решетки E_8 в пространстве $\mathbb{R}^8$:

$$E_8 = \Big\{ x \in \mathbb{R}^8 \mid \text{ все } x_i \in \mathbb{Z} \text{ или все } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2};\ \sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 \pmod 2 \Big\}.$$

Напомним, что $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_8^2$. Минимальные векторы решетки являются решением задачи

$$|x|^2 \to \min,$$
$$x \in E_8,\ x \neq \mathbb{O}.$$

В $E_8 \setminus \{\mathbb{O}\}$ минимальную норму имеют 240 векторов следующего вида:

1) векторы вида $\xi = (\pm 1^2, 0^6)$, содержащие две ± 1 и шесть нулей. При этом $|\xi| = \sqrt{2}$, а количество таких векторов равно $2^2 C_8^2 = 112$.

2) векторы вида $\xi = \left(\pm\frac{1}{2}^8\right)$ с чётным числом плюсов (это условие равносильно включению $\xi \in E_8$). При этом $|\xi| = \sqrt{2}$ и количество таких векторов равно $C_8^0 + C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8 = 128$. В результате получим множество векторов $\{\xi_1, \ldots, \xi_{240}\}$.

ЛЕММА. *При $i \neq j$ скалярные произведения $\xi_i \xi_j$ могут принимать только следующие значения:* -2, -1, 0, 1.

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского $-2 \leqslant \xi_i\, \xi_j < 2$. Если ξ_i из первой группы векторов, то $\xi_i\, \xi_j$ будет целым числом.

Допустим, что векторы $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_8)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_8)$ из второй группы. В каждом векторе чётное число плюсов. Пусть $I = \{k \mid \xi_k\, \eta_k > 0\}$. Тогда $p = |I|$ — чётное число и

$$\xi\eta = \frac{p}{4} - \frac{8-p}{4} = \frac{2p}{4} - 2 \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $\xi\eta \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Лемма доказана. □

Следующая теорема установлена независимо в двух работах: Левенштейн [9] и Одлыжко, Слоэн [10] (см. также главу 13 в книге [5], написанную теми же авторами).

ТЕОРЕМА 2. *При $n = 8$ справедливы равенства $A_8 = M_8 = 240$. Максимальный $\frac{1}{2}$-код образуют точки*

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 240.$$

Идея доказательства. Авторы [10] используют теорему Дельсарта. Поскольку $x_i\,x_j \in \left\{-1,\, -\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{1}{2}\right\}$ при $i \neq j$, то ввиду условия (8) авторы [10] берут полином

$$f(t) = \frac{320}{3}(t+1)\left(t+\tfrac{1}{2}\right)^2 t^2\left(t-\tfrac{1}{2}\right).$$

Коэффициент поставлен авторами [10] для того, чтобы $f_0^{(8)} = 1$. Далее $f(t)$ нужно разложить по полиномам Гегенбауэра $G_k^{(8)}(t)$, $k \in 0:6$. Приведём алгоритм вычислений в системе MAPLE.

Алгоритм.

1. В массив `G(0..6)` запишем выражения для полиномов Гегенбауэра, используя рекуррентную формулу. Основные операторы: `G[0]:=1; G[1]:=t; G[k+1]:=simplify(((2*k+n-2)*t*G[k]-k*G[k-1])/(k+n-2)).`

2. Вычислим матрицу Грама

$$H_{kl} = \left(G_k^{(n)}, G_l^{(n)}\right) := \int_{-1}^{1} G_k^{(n)}(t)\,G_l^{(n)}(t)\,w_8(t)\,dt, \quad k,\, l \in 0:6.$$

   Убедимся, что $H_{kl} = 0$ при $k \neq l$. Нам потребуются только $H_{kk} = \|G_k^{(n)}\|^2$. Интегралы будут вычислены точно, например, $H_{00} = \frac{5}{16}\pi$.

3. Вычислим коэффициенты разложения

$$f(t) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(8)} G_k^{(8)}(t)$$

   по формуле

$$f_k^{(8)} = \frac{\left(f, G_k^{(8)}\right)}{\left(G_k^{(8)}, G_k^{(8)}\right)} = \frac{1}{H_{kk}} \int_{-1}^{1} f(t)\,G_k^{(8)}(t)\,w_8(t)\,dt, \quad k \in 0:6.$$

4. Напечатаем коэффициенты $f_0^{(8)}, \ldots, f_6^{(8)}$ в строчку с помощью оператора `convert(f,list)`:
$$\Big[1,\ 8,\ 25,\ 52,\ \tfrac{133}{2},\ 60,\ \tfrac{55}{2}\Big].$$

5. Вычислим $f(1)$ двумя способами:
$$f(1) = \tfrac{320}{3} \cdot 2 \cdot \big(\tfrac{3}{2}\big)^2 \cdot \tfrac{1}{2} = 240,$$
$$f(1) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(8)} G_k^{(8)}(1) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(8)} = 240.$$

Окончательный вывод. По теореме Дельсарта
$$A_8 = M_8 \leqslant \frac{f(1)}{f_0^{(8)}} = 240.$$

Это убеждает нас в справедливости теоремы 2.

Задачи

1. Дан полином $F = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \ldots + a_d$. Для нахождения коэффициентов разложения по полиномам Гегенбауэра можно использовать следующий процесс. Найдём $\mathtt{a_0} = \mathtt{coeff(F,t,d)}$ — старший коэффициент полинома F и $\mathtt{b_0} = \mathtt{coeff(G[d],t,d)}$ — старший коэффициент полинома $G[d] = G_d^{(n)}(t)$. Положим $\mathtt{f[d]} = \mathtt{a_0}/\mathtt{b_0}$ и вычислим полином $\mathtt{F_1} = \mathtt{F} - \mathtt{f[d]G[d]}$ степени не выше $d-1$. Далее приём применяется к полиному F_1. Написать программу для нахождения коэффициентов разложения $f[d], \ldots, f[0]$. Для полинома
$$f(t) = \frac{320}{3}(t+1)\big(t+\tfrac{1}{2}\big)^2 t^2 \big(t-\tfrac{1}{2}\big)$$
при $n = 8$ получаются коэффициенты $(1,\ 8,\ 25,\ 52,\ \frac{133}{2},\ 60,\ \frac{55}{2})$.

2. Минимальные векторы решетки Лича. Решетка Лича Λ_{24} в $\mathbb{R}^{24}$ (см. [5]) имеет $m = 196560$ минимальных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Положим $x_i = \xi_i/|\xi_i|$. Тогда $C = \{x_1, \ldots, x_m\}$ является $\frac{1}{2}$-кодом и при этом $x_i x_j \in \in \big\{-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\big\}$ при $i \neq j$. Для доказательства максимальности кода C в [10] предлагается взять полином
$$f(t) = (t+1)\big(t+\tfrac{1}{2}\big)^2\big(t+\tfrac{1}{4}\big)^2 t^2 \big(t-\tfrac{1}{4}\big)^2\big(t-\tfrac{1}{2}\big).$$
Разложить $f(t)$ по полиномам Гегенбауэра, $f(t) = \sum_{k=0}^{10} f_k^{(24)} G_k^{(24)}(t)$, и показать, что все $f_k^{(24)}$ положительны. Показать, что
$$\frac{f(1)}{f_0^{(24)}} = 196560.$$

Отсюда будет следовать, что $A_{24} = M_{24} = 196560$.

3. Случай n=4. Рассмотрим сферический $\frac{1}{2}$-код $C \subset S^3$, состоящий из 8 векторов $x = (\pm 1, 0^3)$, где ± 1 может стоять на любом из четырёх мест, и 16 векторов $x = \left(\pm\frac{1}{2}^4\right)$. Показать, что $xy \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ при $x, y \in C$, $x \neq y$. Сформировать матрицу $X(1..24, 1..4)$, строками которой являются указанные векторы x, и матрицу Грама $T = XX'$, где $T_{ij} = x_i\, x_j$. Разложить полином $f(t) = (t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 t^2 \left(t-\frac{1}{2}\right)$ по полиномам Гегенбауэра, $f(t) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(4)} G_k^{(4)}(t)$.

Показать, что все $f_k^{(4)}$ положительны и $A_4 \leqslant \frac{f(1)}{f_0^{(4)}} = \frac{144}{5} = 28.8$.

Эта оценка является завышенной: О. Мусин [7] показал, что $A_4 = 24$. Причиной этой завышенности является нарушение условия (9). Показать, что $\sum_{i,j=1}^{24} G_6^{(4)}(T_{ij}) = \frac{576}{7}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Арифметический минимум квадратичной формы и сферические коды* // Матем. просвещение. Сер. 3. 1998. Вып. 2. С. 133—140.

2. Delsarte Ph., Goetals J. M., Seidel J. J. *Spherical codes and designs* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

3. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

4. Котелина Н. О. *Формула сложения для полиномов Гегенбауэра* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 13 ноября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1113`)

5. Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решётки и группы.* Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.

6. Pfender F., Ziegler G. M. *Kissing numbers, sphere packings and some unexpected proofs* // Notices AMS. September 2004. P. 873–883.

7. Musin O. R. *The kissing number in four dimensions* // Preprint. 30 pp. (`http://arXiv.org/abs/math/0309430v3`)

8. Maehara H. *The problem of thirteen spheres — a proof for undergraduates* // Europ. J. Combinatorics. 2007. V. 28. P. 1770–1778.

9. Левенштейн В. И. *О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве* // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303.

10. Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions* // J. Comb. Th. 1979. V. A26. P. 210–214.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

В. Н. Малозёмов Я. В. Петухова

9 апреля 2011 г.

Мы продолжаем изучение свойств периодических кривых Безье, следуя [1].

1°. Пусть n — натуральное число и $N = 2n + 1$. Напомним определение ядра Валле-Пуссена

$$b_n(t) = \frac{1}{N}\left(C_{2n}^n\right)^{-1}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Это неотрицательный чётный тригонометрический полином порядка n, обладающий следующими свойствами [1, 2]:

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\, b_n(t)\Big|_{t=\pm\pi} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots\ldots, 2n-1; \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j) \equiv 1. \tag{2}$$

Здесь и далее $t_j = \frac{2\pi j}{N}$. На рис. 1 изображены графики ядра Валле-Пуссена при $n = 2$ и $n = 8$.

Ядро Валле-Пуссена можно представить в экспоненциальной форме

$$b_n(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt},$$

где $f_{k,n} = \left(C_{2n}^n\right)^{-1} C_{2n}^{n-k}$. Ясно, что $f_{0,n} = 1$ и $f_{-k,n} = f_{k,n}$, $k \in 1:n$. При этом

$$f_{k,n} = \prod_{s=1}^{k} \frac{n-s+1}{n+s}, \qquad k \in 1:n. \tag{3}$$

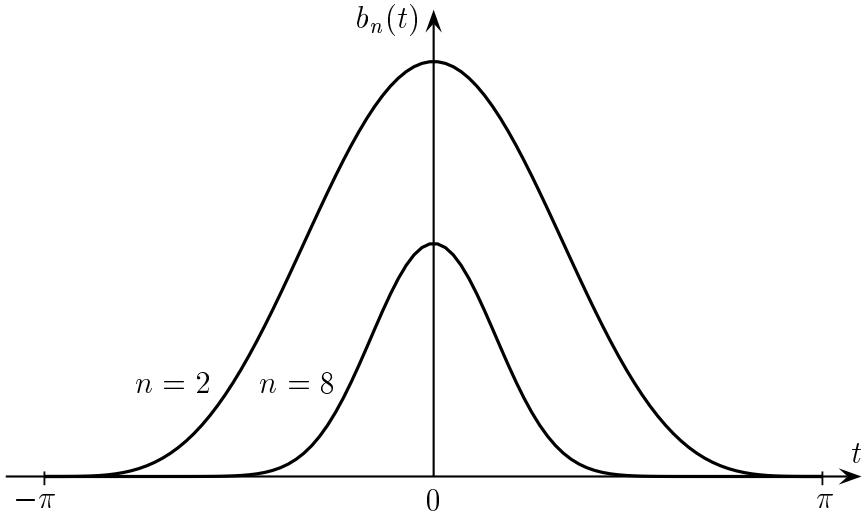


Рис. 1. Графики ядра Валле-Пуссена при $n = 2$ и $n = 8$

Продолжим коэффициенты $f_{k,n}$ с периодом N на все целые k. В силу периодичности и чётности

$$f_{k,n} = f_{N-k,n}\,, \qquad k \in n+1 : N-1. \tag{4}$$

Набор $\{f_{k,n}\}$ образует *спектр* ядра Валле-Пуссена. На рис. 2 изображён спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 6$.

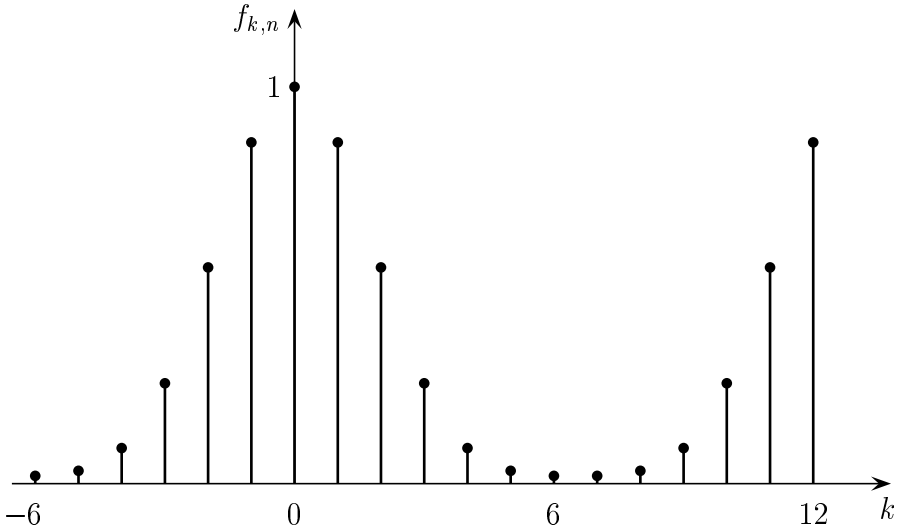


Рис. 2. Спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 6$

2°. Рассмотрим тригонометрический полином порядка n в форме Валле-Пуссена

$$p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j\, b_n(t - t_j). \tag{5}$$

Здесь p_j — комплексные коэффициенты. График $p(t)$ на комплексной плоскости называется *периодической кривой Безье*, а коэффициенты p_j — её *полюсами*.

Обозначим $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{N-1})$. Задание $p(t)$ в форме (5) эквивалентно заданию $p(t)$ в экспоненциальной форме

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt}, \tag{6}$$

где $c_k = f_{k,n}\left[\mathcal{F}_N(\mathbf{p})\right](k)$. Переход от представления (6) к представлению (5) осуществляется с помощью формулы обращения для ДПФ [2]

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{c_k}{f_{k,n}}\, \omega_N^{kj}\,, \qquad j \in 0 : N-1. \tag{7}$$

3°. Зафиксируем $s \in 1 : n$ и положим

$$c_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = s, \\ 0 & \text{при } k \neq s. \end{cases}$$

В этом случае формула (6) примет вид

$$p(t) = \frac{1}{N}\, e^{ist}.$$

Вместе с тем, $p(t)$ допускает представление (5), в котором согласно (7)

$$p_j = \frac{1}{N}\, \frac{\omega_N^{sj}}{f_{s,n}}\,.$$

Получаем при $s \in 1 : n$

$$e^{ist} = \frac{1}{f_{s,n}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{sj}\, b_n(t - t_j). \tag{8}$$

Возьмем $s = 1$. Согласно (3), $f_{1,n} = \frac{n}{n+1}$, поэтому

$$e^{it} = \frac{n+1}{n} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j}\, b_n(t - t_j). \tag{9}$$

Формула (9) показывает, что периодической кривой Безье, построенной по полюсам $p_j = \frac{n+1}{n}\,\omega_N^j$, $j \in 0 : N-1$, является окружность на комплексной плоскости радиуса 1 с центром в начале координат. На рис. 3 изображены окружности Безье при $n = 1, 2, 3$.

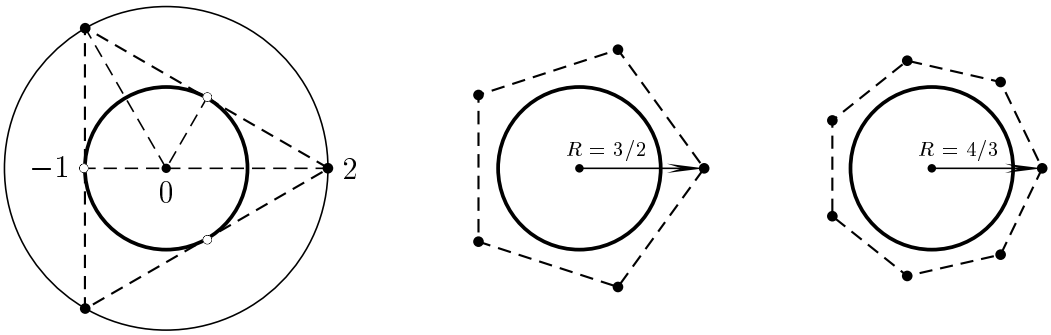


Рис. 3. Окружности Безье при $n = 1, 2, 3$

Отдельно рассмотрим случай $n = 1$, когда окружность Безье строится по трём полюсам $\widehat{p}_j = 2\,\omega_3^j$, $j \in 0 : 2$. Эти полюсы находятся на внешней окружности радиуса 2 с центром в начале координат и имеют вид

$$\widehat{p}_0 = (2,\,0), \quad \widehat{p}_1 = (-1, \sqrt{3}), \quad \widehat{p}_2 = (-1, -\sqrt{3}).$$

По ним строится окружность Безье радиуса 1 с центром в начале координат. Из геометрических соображений ясно, что окружность Безье касается сторон треугольника с вершинами $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ в средних точках.

Положим в (8) $s = n = 2$. Учитывая, что $\frac{1}{f_{2,2}} = 6$, получаем

$$e^{i2t} = 6\sum_{j=0}^{4} \omega_5^{2j}\, b_2(t - t_j).$$

Отсюда следует, что периодическая кривая Безье второго порядка, построенная по полюсам $p_j = 6\,\omega_5^{2j}$, $j \in 0 : 4$, при изменении t от 0 до 2π дважды пробегает на комплексной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат (см. рис. 4).

4°. Обратимся к задаче интерполяции с помощью периодических кривых Безье. Зафиксируем комплексные числа $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ и построим сначала тригонометрический полином вида (6), удовлетворяющий условиям

$$p(t_s) = a_s, \qquad s \in 0 : N-1. \tag{10}$$

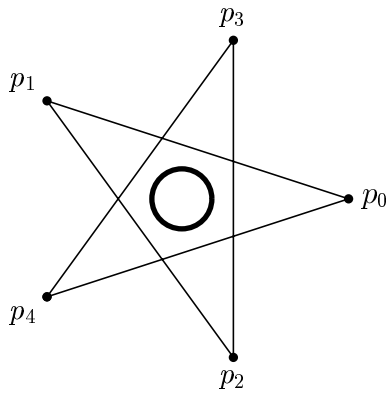


Рис. 4. Окружность Безье при $n = s = 2$

Подробная запись этих условий выглядит так:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\omega_N^{ks} \;=\; a_s, \qquad s \in 0 : N-1. \tag{11}$$

Решение системы (11) очевидно:

$$c_k = \big[\mathcal{F}_N(\mathbf{a})\big](k) =: A(k), \qquad k \in -n : n,$$

где $\mathbf{a} = (a_0,\, a_1, \ldots,\, a_{N-1})$. Действительно,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} a_l\,\omega_N^{-lk}\Big)\,\omega_N^{ks} = \sum_{l=0}^{N-1} a_l\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\omega_N^{k(s-l)}\right\} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} a_l\,\delta_N\,(s-l) = a_s\,, \qquad s \in 0 : N-1.$$

Теперь перейдем к форме Валле-Пуссена для интерполяционного тригонометрического полинома. Согласно (7)

$$p_j = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{A(k)}{f_{k,n}}\,\omega_N^{kj}\,, \qquad j \in 0 : N-1.$$

В силу N-периодичности последнюю формулу можно переписать так:

$$p_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A(k)}{f_{k,n}}\,\omega_N^{kj}\,, \qquad j \in 0 : N-1. \tag{12}$$

При этом нужно иметь в виду, что $f_{k,n}$ при $k \in n+1 : N-1$ вычисляются по формуле (4).

Подведем итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Решением интерполяционной задачи* (10) *является тригонометрический полином в форме Валле-Пуссена с полюсами* (12).

На рис. 5a изображена периодическая кривая Безье четвертого порядка, построенная по девяти полюсам p_0, $p_1, \ldots, p_8$, а на рис. 5b — другая кривая Безье, у которой предыдущие полюсы играют роль узлов интерполяции $a_0, a_1, \ldots, a_8$. На рис. 6 представлена соответствующая интерполяционная кривая Безье вместе с её полюсами.

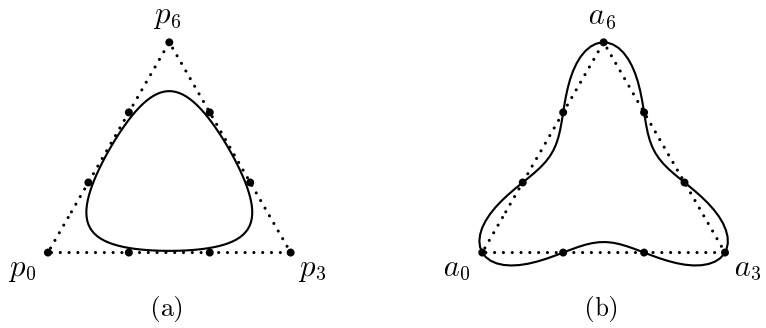


Рис. 5. Периодические кривые Безье четвертого порядка

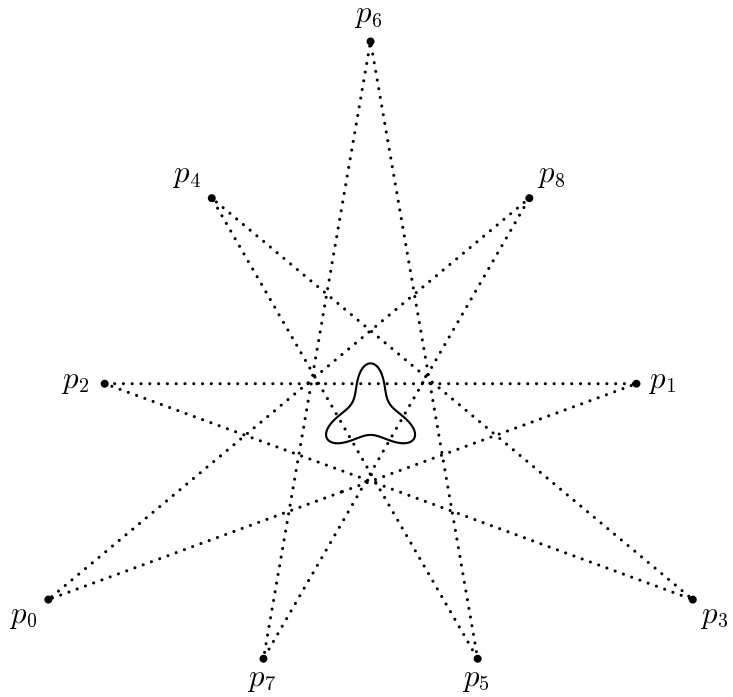


Рис. 6. Интерполяционная кривая Безье вместе с её полюсами

5°. В формуле (5) базисные функции $b_n(t-t_j)$ вещественны, поэтому вещественные и мнимые части $p(t)$ можно вычислять независимо. Это позволяет считать, что полюсы p_j — это векторы из $\mathbb{R}^2$. При изменении t от 0 до 2π вектор-функция $p(t)$ описывает некоторую замкнутую кривую на вещественной плоскости. Её по-прежнему будем называть *периодической кривой Безье*. В силу неотрицательности ядра Валле-Пуссена и свойства (2) периодическая кривая Безье содержится в выпуклой оболочке, натянутой на полюсы p_j, $j \in 0 : N-1$.

На рис. 7 показан вид периодической кривой Безье, построенной по трём полюсам, лежащим на одной прямой. Она дважды пробегает выделенный отрезок.

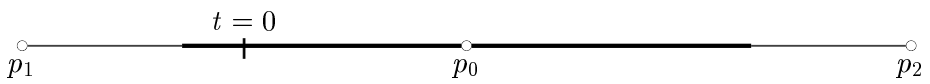


Рис. 7. Вырожденная кривая Безье

Рассмотрим случай, когда все полюсы, кроме одного, лежат на одной прямой. Пусть

$$p_j = \begin{pmatrix} \xi_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in 0 : N-1, \quad j \neq k;$$

$$p_k = \begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{pmatrix}, \quad \eta_k > 0.$$

Тогда

$$p(t) = \sum_{j \neq k} \begin{pmatrix} \xi_j \\ 0 \end{pmatrix} b_n\big(t - t_j\big) + \begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{pmatrix} b_n\big(t - t_k\big) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \, b_n(t - t_j) \\ \eta_k \, b_n(t - t_k) \end{pmatrix}.$$

Согласно (1) у кривой $p(t)$ при $t = t_k + \pi$ вторая координата равна нулю. Это значит, что $p(t)$ в указанной точке касается оси $\eta = 0$, на которой лежат остальные полюсы p_j. Более того, это касание в силу (1) имеет высокий порядок (см. рис. 8).

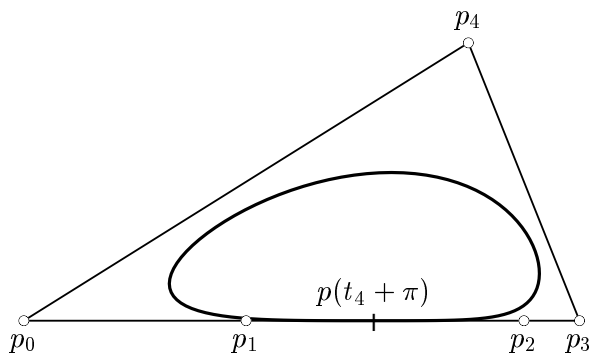


Рис. 8. Случай, когда все полюсы, кроме одного, лежат на одной прямой

6°. Следующий результат выглядит очень эффектно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть p_0, p_1, p_2 — произвольные полюсы на плоскости, не лежащие на одной прямой. Периодической кривой Безье, построенной по этим полюсам, будет эллипс, вписанный в треугольник с вершинами p_0, p_1, p_2 и касающийся его сторон в средних точках* (см. рис. 9).

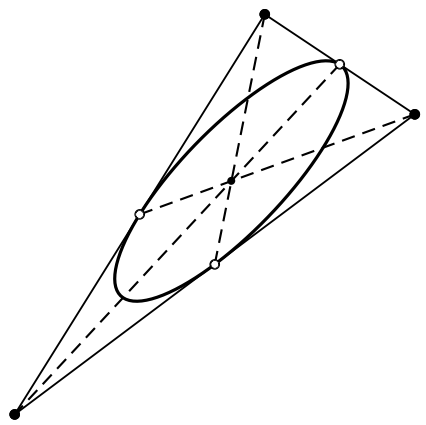


Рис. 9. Периодическая кривая Безье, построенная по трём полюсам

Для доказательства нам потребуются некоторые сведения об аффинных преобразованиях плоскости. Три точки $p_i = (\xi_i, \eta_i)^T$, $i \in 0:2$, называются *аффинно независимыми*, если матрица

$$\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

обратима.

ЛЕММА 1. *Точки p_0, p_1, p_2 не лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда они аффинно независимы.*

Действительно, условие леммы выполняется тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\begin{aligned} a\,\xi_0 + b\,\eta_0 + c &= 0, \\ a\,\xi_1 + b\,\eta_1 + c &= 0, \\ a\,\xi_2 + b\,\eta_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

относительно a, b, c имеет только нулевое решение. Это равносильно линейной независимости строк матрицы (13), что, в свою очередь, эквивалентно обратимости данной матрицы. □

Преобразование

$$y = Ax + b, \tag{14}$$

где $x = (\xi, \eta)^T$, $y = (u, v)^T$, $b = (b_1, b_2)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— обратимая матрица, называется *аффинным.*

ЛЕММА 2. *Существует единственное аффинное преобразование, переводящее три аффинно независимые точки $x_i = (\xi_i, \eta_i)^T$, $i \in 0:2$, в три аффинно независимые точки $y_i = (u_i, v_i)^T$, $i \in 0:2$.*

Доказательство. Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По условию леммы матрицы X и Y обратимы, поэтому существует единственная матрица $\widehat{A}$, такая, что $\widehat{A}\,X = Y$. Для матрицы $\widehat{A}$ можно указать явное представление $\widehat{A} = YX^{-1}$. Она обратима и $\widehat{A}^{-1} = XY^{-1}$.

Последняя строка матрицы $\widehat{A}$ равна произведению $(1,1,1)\,X^{-1}$, которое совпадает с последней строкой матрицы XX^{-1}, равной $(0,0,1)$. Таким образом, матрица $\widehat{A}$ имеет следующую структуру:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из обратимости матрицы $\widehat{A}$ следует обратимость матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица A и вектор $b = (b_1, b_2)^T$ определяют требуемое аффинное преобразование. □

Возьмем точки x_0, x_1 на плоскости и рассмотрим прямую

$$x(t) = t\,x_1 + (1-t)\,x_0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

При аффинном преобразовании (14) точки x_0, x_1 переходят соответственно в точки $y_0 = Ax_0 + b$ и $y_1 = Ax_1 + b$, а прямая $x(t)$ — в прямую

$$y(t) = A\,x(t) + b = t\,\big(A\,x_1 + b\big) + (1-t)\,\big(A\,x_0 + b\big) = t\,y_1 + (1-t)\,y_0.$$

В частности, середина отрезка $[x_0, x_1]$ переходит в середину отрезка $[y_0, y_1]$.

ЛЕММА 3. *При аффинном преобразовании* (14) *единичная окружность* $S_1 = \Big\{x = (\xi, \eta)^T \;\big|\; \xi^2 + \eta^2 = 1\Big\}$ *переходит в эллипс.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть линейное преобразование $y = A\,x$.

Обозначим $D = A^{-1}$,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Столбцы d_1, d_2 матрицы D отличны от нуля и линейно независимы. Отсюда, в частности, следует, что

$$\big|\big\langle d_1, d_2 \big\rangle\big| < \big\|d_1\big\| \cdot \big\|d_2\big\|. \tag{15}$$

На основании равенства $x = Dy$, заключаем, что образ единичной окружности S_1 состоит из точек $y = (u, v)^T$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(d_{11}\,u + d_{12}\,v)^2 + (d_{21}\,u + d_{22}\,v)^2 = 1.$$

Приведем это уравнение к виду

$$(d_{11}^2 + d_{21}^2)\,u^2 + 2\,(d_{11}\,d_{12} + d_{21}\,d_{22})\,u\,v + (d_{12}^2 + d_{22}^2)\,v^2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать в терминах столбцов матрицы D:

$$\|d_1\|^2 u^2 + 2\,\big\langle d_1, d_2 \big\rangle\,u\,v + \|d_2\|\,v^2 - 1 = 0.$$

В данном случае неравенство (15) гарантирует, что кривая AS_1 является эллипсом (см. [3, часть 1, глава 7]). □

7°. Переходим к доказательству предложения 2.

Как установлено в п. 3°, периодической кривой Безье, построенной по полюсам

$$\widehat{p}_0 = (2,0), \quad \widehat{p}_1 = (-1,\sqrt{3}), \quad \widehat{p}_2 = (-1,-\sqrt{3}),$$

является окружность $S_1 = \{x = (\xi,\eta)^T \mid \xi^2+\eta^2 = 1\}$, вписанная в треугольник $\widehat{\Delta}$ с вершинами $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ и касающаяся его сторон в средних точках. Очевидно, что полюсы $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ аффинно независимы. По лемме 2 существует единственное аффинное преобразование $y = Ax + b$, переводящее данные полюсы в полюсы p_0, p_1, p_2,

$$A\,\widehat{p}_j + b = p_j, \qquad j \in 0:2. \tag{16}$$

При этом треугольник $\widehat{\Delta}$ переходит в треугольник Δ с вершинами p_0, p_1, p_2 и середины сторон треугольника $\widehat{\Delta}$ переходят в середины сторон треугольника Δ.

Далее, кривая Безье, построенная по полюсам $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ при аффинном преобразовании переходит в кривую Безье, построенную по полюсам p_0, p_1, p_2. Действительно, согласно (2) и (16)

$$A\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{p}_j\,b_1(t-t_j)\right) + b = \sum_{j=0}^{2}\big(A\,\widehat{p}_j + b\big)\,b_1(t-t_j) = \sum_{j=0}^{2} p_j\,b_1(t-t_j). \tag{17}$$

Значит, окружность S_1 переходит в кривую Безье (17). Вместе с тем, по лемме 3 при аффинном преобразовании окружность S_1 переходит в эллипс. Как следствие получаем, что кривая Безье (17) является эллипсом.

Остается отметить, что кривая Безье (17) содержится в выпуклой оболочке своих полюсов p_0, p_1, p_2 и что середины сторон треугольника Δ лежат на этой кривой. Объединяя отмеченные факты, приходим к выводу: кривая Безье, построенная по полюсам p_0, p_1, p_2, есть эллипс, вписанный в треугольник с вершинами p_0, p_1, p_2 и касающийся его сторон в средних точках. □

На рис. 10 иллюстрируется суть доказательства.

8°. Вернёмся к случаю, когда все полюсы являются комплексными числами. Каждому полюсу p_j сопоставим положительный вес w_j и рассмотрим 2π-периодическую дробно-рациональную функцию

$$R(t) = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} w_j\,p_j\,b_n(t-t_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} w_j\,b_n(t-t_j)}\,. \tag{18}$$

Обозначим

$$r_j(t) = \frac{w_j\,b_n(t-t_j)}{\sum_{k=0}^{N-1} w_k\,b_n(t-t_k)}\,, \qquad j \in 0:N-1.$$

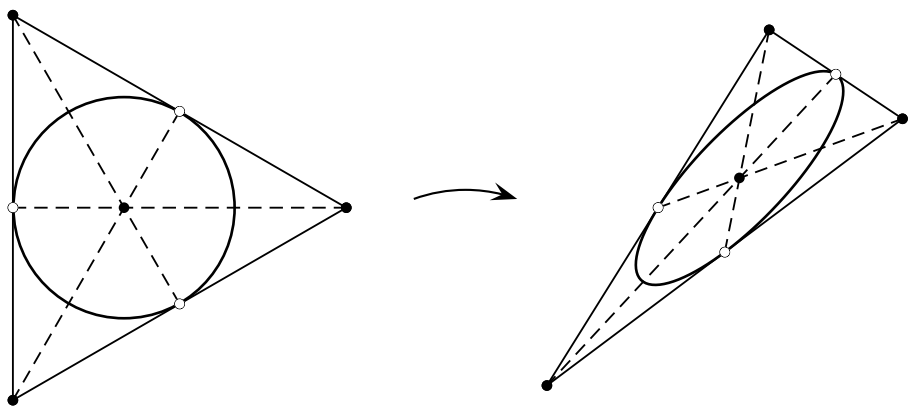


Рис. 10. Аффинное преобразование

Очевидно, что все функции $r_j(t)$ неотрицательны и $\sum_{j=0}^{N-1} r_j(t) \equiv 1$. Формулу (18) можно представить в виде

$$R(t) = \sum_{j=0}^{N-1} r_j(t)\, p_j.$$

Точка $R(t)$ при изменении t от 0 до 2π описывает на комплексной плоскости замкнутую кривую. Эту кривую назовем *проективной периодической кривой Безье*. В силу свойств функций $r_j(t)$ кривая $R(t)$ содержится в выпуклой оболочке своих полюсов p_j, $j \in 0 : N-1$.

На рис. 11 изображены проективные периодические кривые Безье при неизменных полюсах и различных весах.

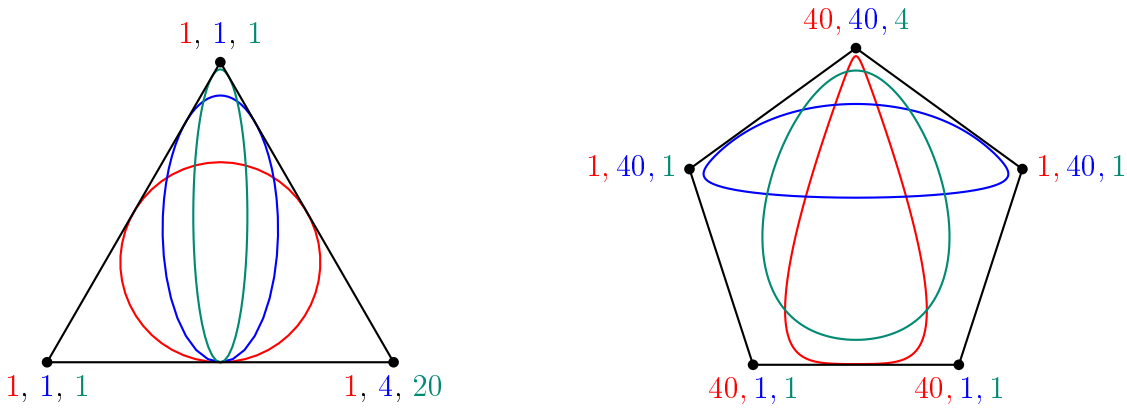


Рис. 11. Проективные периодические кривые Безье

9°. Рассмотрим задачу интерполяции, аналогичную (10):

$$R(t_s) = a_s, \qquad s \in 0 : N-1. \tag{19}$$

Веса w_j считаются фиксированными. Обозначим

$$q_j = w_j\, p_j, \qquad d_s = \sum_{j=0}^{N-1} w_j\, b_n(t_s - t_j).$$

Тогда задачу (19) можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{j=0}^{N-1} q_j\, b_n(t_s - t_j) = d_s\, a_s, \qquad s \in 0 : N-1.$$

Решение последней задачи нам известно (формула (12)):

$$q_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A(k)}{f_{k,n}}\, \omega_N^{kj},$$

где

$$A_k = \sum_{s=0}^{N-1} d_s\, a_s\, \omega_N^{-kj}.$$

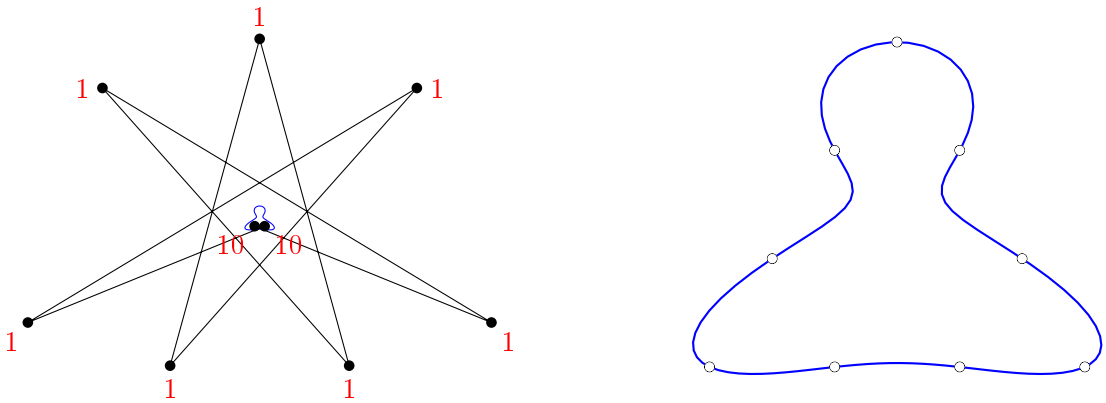
Учитывая определение q_j, получаем

$$p_j = \frac{1}{w_j\, N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A(k)}{f_{k,n}}\, \omega_N^{kj}, \qquad j \in 0 : N-1.$$

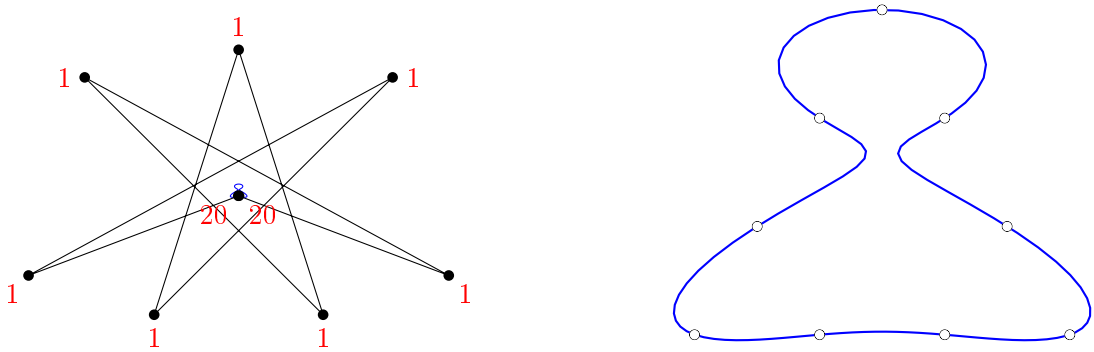
10°. Система уравнений (19) определяет параметирическое семейство интерполяционных кривых. Параметрами являются веса w_j, сопоставляемые неизвестным полюсам p_j. Когда все веса равны единице, проективная кривая Безье $R(t)$ в силу (2) совпадает с кривой Безье $p(t)$ вида (5). Этот случай — основной. По данной интерполяционной кривой Безье $p(t)$ путём варьирования весов можно построить интерполяционную кривую $R(t)$ с дополнительными свойствами.

В качестве примера возьмем интерполяционную кривую Безье, изображённую на рисунках 5b и 6. На рис. 12 – 14 представлены проективные кривые Безье, построенные по тем же интерполяционным условиям. На рис. 12 отличны от единицы два веса w_1 и w_2, на рис. 13 отличны от единицы три веса w_1, w_2, w_6. Наконец, на рис. 14 отличен от единицы один вес w_6.

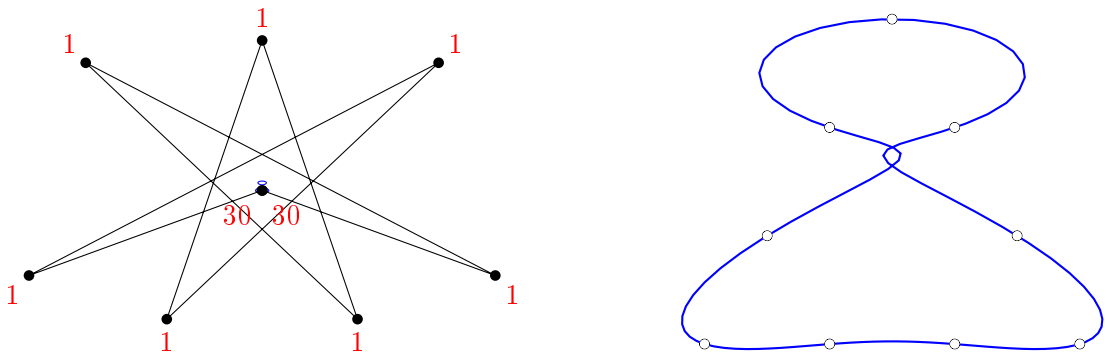
11°. Наряду с периодическими кривыми Безье в геометрическом моделировании можно использовать дискретные периодические сплайны [4, 5].



a) $w_1 = w_2 = 10$



b) $w_1 = w_2 = 20$



c) $w_1 = w_2 = 30$

Рис. 12. Итерполяция с помощью проективных периодических кривых Безье

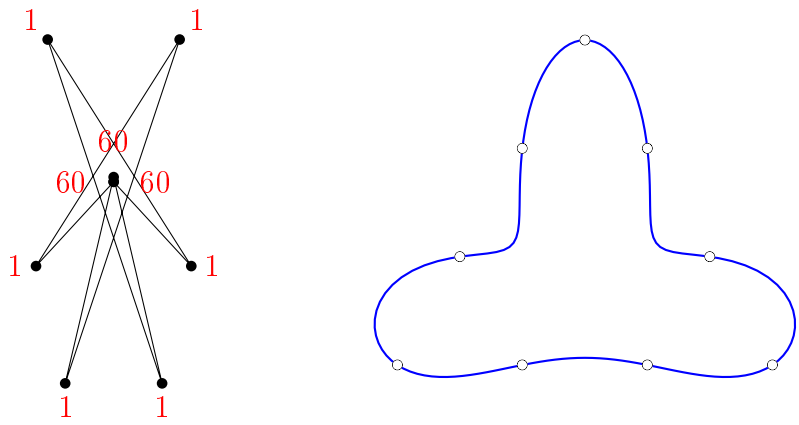


Рис. 13. Случай $w_1 = w_2 = w_6 = 60$

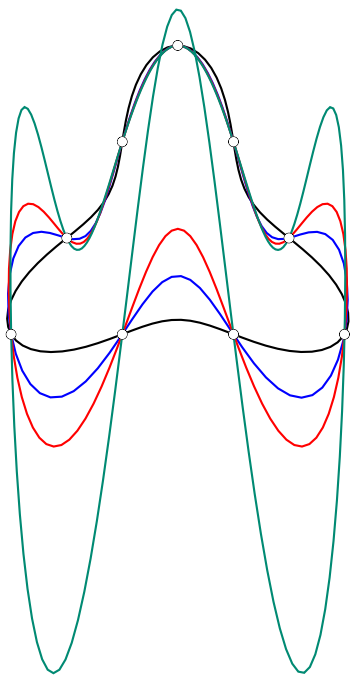


Рис. 14. Проективные кривые Безье, у которых $w_6 = 1, 15, 30, 100$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sánchez-Reyes J. *Periodic Bezier curves* // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26. P. 989–1005.

2. Малозёмов В. Н., Петухова Я. В. *Периодические кривые Безье* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 апреля 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0428`).

3. Привалов И. И. *Аналитическая геометрия* // Изд. 38-е. СПб: Лань, 2010. 300 с.

4. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Доклады РАН. 2009. Т. 429. № 1. С. 19-–21.

5. Чашников Н. В. *Проективные дискретные периодические сплайны* // Семинар «DHA&CAGD». Избранные доклады. 19 февраля 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0219`).

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША

В. Н. Малозёмов

23 апреля 2011 г.

Данный доклад примыкает к докладу [1]. Рассматриваются два варианта быстрого преобразования Уолша.

1°. Пусть $N = 2^s$, где s – натуральное число. В пространстве $\mathbb{C}_N$ построим рекуррентную последовательность базисов

$$w_\nu = \big\{w_\nu(k;j)\big\}_{k=0}^{N-1}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s.$$

Сигнал $w_\nu(k;j)$ как элемент пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $w_\nu(k)$. Положим [2, с. 53]

$$\begin{gathered} w_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ w_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + w_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ w_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - w_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$, $N_\nu = N/2^\nu$. Переход от базиса $w_{\nu-1}$ к базису w_ν можно записать одной строкой

$$\begin{gathered} w_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{2}$$

В частности, при $\nu = 1$ ($\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$)

$$\begin{gathered} w_1(\sigma + 2p) = w_0(2p) + (-1)^\sigma w_0(2p+1), \\ p \in 0 : N_1 - 1, \quad \sigma \in 0 : 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Ясно, что сигналы ν-го уровня w_ν являются линейными комбинациями сигналов нулевого уровня w_0, состоящего из сдвигов единичного импульса.

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива формула*

$$w_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, w_\nu(q+p\Delta_{\nu+1}), \tag{4}$$

$$p \in 0:N_\nu-1, \quad l \in 0:\Delta_{\nu+1}-1, \quad \nu = 1,\dots,s,$$

где $A_\nu[l,q]$ *— элементы матрицы Адамара*

$$A_\nu = A_\nu[0:\Delta_{\nu+1}-1,\ 0:\Delta_{\nu+1}-1],$$

определяемой с помощью рекуррентного соотношения

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix}, \quad \nu = 2,\ 3,\ \dots. \tag{5}$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (4) совпадает с (3), если в последней заменить σ на l. Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν.

Индекс $l \in 0:\Delta_{\nu+1}-1$ представим в виде $l = \sigma\Delta_\nu + l'$, где $l' \in 0:\Delta_\nu - 1$, $\sigma \in 0:1$. На основании (2) и индукционного предположения запишем

$$w_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = w_\nu(l'+\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) =$$
$$= w_{\nu-1}(l'+2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\big(l'+(2p+1)\Delta_\nu\big) =$$
$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_{\nu-1}[l',q]\, w_0(q+2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_{\nu-1}[l',q]\, w_0\big(q+(2p+1)\Delta_\nu\big).$$

Согласно (5) (см. [1])

$$A_\nu[l'+\sigma\Delta_\nu, q+\tau\Delta_\nu] = (-1)^{\sigma\tau} A_{\nu-1}[l',q],$$
$$l', q \in 0:\Delta_\nu-1, \quad \sigma,\tau \in 0:1.$$

В частности, при $\tau = 0$

$$A_{\nu-1}[l',q] = A_\nu[l'+\sigma\Delta_\nu, q] = A_\nu[l,q]$$

и при $\tau = 1$

$$(-1)^\sigma A_{\nu-1}[l',q] = A_\nu[l'+\sigma\Delta_\nu, q+\Delta_\nu] = A_\nu[l, q+\Delta_\nu].$$

Учитывая это, получаем

$$w_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_\nu[l,q]\, w_0(q+p\Delta_{\nu+1}) +$$
$$+ \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_\nu[l,q+\Delta_\nu]\, w_0(q+\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, w_0(q+p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. □

При $\nu = s$ ($N_s = 1$, $\Delta_{s+1} = N$) формула (4) принимает вид

$$w_s(l;j) = \sum_{q=0}^{N-1} A_s[l,q]\,\delta_N(j-q) = A_s[l,j], \quad l,j \in 0:N-1.$$

Вместе с тем, k-я строка матрицы Адамара $A_s[k,j]$ совпадает со значениями k-й функции Уолша $v_k(j)$ на множестве $0:N-1$ (см. [1]), то есть

$$A_s[k,j] = v_k(j), \quad k,j \in 0:N-1.$$

Значит,

$$w_s(k;j) = v_k(j), \quad k,j \in 0:N-1. \tag{6}$$

Приходим к следующему выводу: *рекурентные соотношения* (1) *преобразуют базис, состоящий из сдвигов единичного импульса, в базис Уолша.*

2°. Как известно [1], базис Уолша состоит из ортогональных сигналов. Покажем, что таким же свойтвом обладают и промежуточные базисы w_ν.

ТЕОРЕМА 2. *При каждом $\nu \in 0:s$ сигналы*

$$w_\nu(0),\ w_\nu(1), \ldots,\ w_\nu(N-1) \tag{7}$$

попарно ортогональны и $\left\|w_\nu(k)\right\|^2 = 2^\nu$ при всех $k \in 0:N-1$.

Доказательство основано на двух свойствах матриц Адамара, легко следующих из определения (5) (см. [1]): при всех натуральных ν

- матрицы Адамара A_ν симметричны;
- справедливо равенство $A_\nu A_\nu = 2^\nu E_{2^\nu}$.

Утверждение теоремы при $\nu = 0$ эквивалентно очевидному равенству

$$\left\langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - k') \right\rangle = \delta_N(k-k'), \quad k,k' \in 0:N-1. \tag{8}$$

Пусть $\nu \in 1:s$. Возьмём $k,k' \in 0:N-1$ и представим их в виде

$$k = l + p\Delta_{\nu+1}, \quad k' = l' + p'\Delta_{\nu+1},$$

где $l,l' \in 0:\Delta_{\nu+1}-1$, $p,p' \in 0:N_\nu - 1$. Согласно (4) и (8)

$$\left\langle w_\nu(k), w_\nu(k') \right\rangle = \sum_{q,\,q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\,A_\nu[l',q']\,\delta_N\big(q-q'+(p-p')\Delta_{\nu+1}\big).$$

При $p \neq p'$ аргумент у δ_N отличен от нуля при всех q, q', поскольку $|q - q'| \leqslant \leqslant \Delta_{\nu+1} - 1$. В этом случае $\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k')\big\rangle = 0$.

Пусть $p = p'$. Тогда в силу отмеченных выше свойств матриц Адамара

$$\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k')\big\rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, A_\nu[l',q] =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, A_\nu[q,l'] = (A_\nu, A_\nu)[l,l'] = 2^\nu E_{2^\nu}[l,l'].$$

Значит, скалярное произведение $\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k')\big\rangle$ отлично от нуля только при $p = p'$, $l = l'$, то есть только при $k = k'$. При этом

$$\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k)\big\rangle = 2^\nu, \quad k \in 0 : N-1.$$

Теорема доказана. □

По существу установлено, что при каждом $\nu \in 0 : s$ сигналы (7) образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$.

3°. Возьмём произвольный сигнал $x \in \mathbb{C}_N$. При любом $\nu \in 0 : s$ его можно разложить по ортогональному базису (7):

$$x = \tfrac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_\nu(k)\, w_\nu(k). \tag{9}$$

Здесь $\xi_\nu(k) = \big\langle x, w_\nu(k)\big\rangle$. В частности,

$$\xi_0(k) = \big\langle x, \delta_N(\cdot - k)\big\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j-k) = x(k).$$

На основании (2) получаем

$$\begin{gathered}\xi_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \big\langle x, w_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\big\rangle = \\ = \Big\langle x, w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big)\Big\rangle = \\ = \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma \xi_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big).\end{gathered}$$

Приходим к следующей схеме вычислений коэффициентов $\xi_\nu(k)$ разложений (9), аналогичной рекуррентным соотношениям (1) для сигналов:

$$\begin{gathered}\xi_0(k) = x(k), \quad k = 0 : N-1; \\ \xi_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \xi_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ \xi_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - \xi_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.\end{gathered} \tag{10}$$

При $\nu = s$ формула (9) согласно (6) принимает вид

$$x = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_s(k)\, v_k.$$

Таким образом, по схеме (10) вычисляются коэффициенты $\xi_s(k)$ разложения сигнала x по базису Уолша. Но не только. Попутно вычисляются коэффициенты разложения сигнала x по всем промежуточным ортогональным базисам w_ν.

Вычислительная схема (10) называется *быстрым преобразованием Уолша*. Она использует только сложения/вычитания в количестве

$$2\sum_{\nu=1}^{s} N_\nu \Delta_\nu = \sum_{\nu=1}^{s} N_\nu \Delta_{\nu+1} = sN = N \log_2 N$$

операций.

Соотношения (10) допускают обращение:

$$\begin{gathered} \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) = \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) + \xi_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\big], \\ \xi_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu) = \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) - \xi_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\big], \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Схема (11) позволяет по спектру Уолша $\big\{\xi_s(k)\big\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала x восстановить его отсчёты, а именно $x(k) = \xi_0(k)$, $k \in 0 : N-1$.

4°. С практической точки зрения интерес представляет разложение сигнала не столько по базису Уолша $\{v_k\}_{k=0}^{N-1}$, сколько по базису $\{\hat{v}_k\}_{k=0}^{N-1}$, состоящему из функций Уолша, упорядоченных по частоте (по базису Уолша-Пэли). Напомним [1], что

$$\hat{v}_k(j) = v_{\mathrm{rev}_s(k)}(j), \quad k, j \in 0 : N-1.$$

Здесь $\mathrm{rev}_s(k)$ — целое число, двоичный код которого равен перевёрнутому двоичному коду числа k. Операция rev_s является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Чтобы получить разложение сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ по базису Уолша-Пэли, нужно в вычислительную схему (10) внести единственное изменение: равенство $\xi_0(k) = x(k)$ заменить на $\xi_0(k) = \hat{x}(k)$, где

$$\hat{x}(k) = x(\mathrm{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N-1.$$

В результате найдём коэффициенты $\xi_s(k)$ разложения сигнала $\hat{x}$ по базису Уолша:

$$\hat{x}(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_s(k)\, v_k(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{12}$$

Как известно [1], $v_{\mathrm{rev}_s(k)}(\mathrm{rev}_s(j)) = v_k(j)$, так что

$$v_k(j) = \hat{v}_k(\mathrm{rev}_s(j)).$$

Подставив это в (12) и заменив $\mathrm{rev}_s(j)$ на j, придём к разложению сигнала x по базису Уолша-Пэли:

$$x(j) = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \xi_s(k)\,\hat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

5°. Возьмём две перестановки π и π' множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ и рассмотрим при $\nu \in 0 : s$ систему сигналов $\big\{w_\nu\big(\pi(k); \pi'(j)\big)\big\}_{k=0}^{N-1}$. Очевидно, что новая система, так же как и $\big\{w_\nu(k; j)\big\}_{k=0}^{N-1}$, будет ортогональной. Это соображение увеличивает количество ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$.

Обратимся к частному случаю

$$g_\nu(k; j) = w_\nu(\mathrm{rev}_s(k), \mathrm{rev}_s(j)), \quad k, j \in 0 : N-1.$$

Имеем

$$\begin{gathered} g_0(k; j) = w_0\big(\mathrm{rev}_s(k); \mathrm{rev}_s(j)\big) = \delta_N\big(\mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_s(k))\big) = \delta_N(j-k); \\ g_s(k; j) = w_s\big(\mathrm{rev}_s(k); \mathrm{rev}_s(j)\big) = v_{\mathrm{rev}_s(k)}\big(\mathrm{rev}_s(j)\big) = v_k(j). \end{gathered} \tag{13}$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо рекурентное соотношение*

$$\begin{gathered} g_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ g_\nu\big((2l+\sigma)N_\nu + p\big) = g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + (-1)^\sigma g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство. Предварительно установим, что

$$\mathrm{rev}_s\big((2l+\sigma)N_\nu + p\big) = \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + \sigma\Delta_\nu + \Delta_{\nu+1}\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p). \tag{15}$$

Границы индексов такие же, как в (14).

При $\nu = 1$ ($l = 0$, $\mathrm{rev}_0(0) = 0$ по определению) формула (15) принимает вид

$$\mathrm{rev}_s(\sigma N_1 + p) = \sigma + 2\,\mathrm{rev}_{s-1}(p), \quad p \in 0 : N_1 - 1,\ \sigma \in 0 : 1.$$

Это равенство проверяется легко. Пусть $p = (p_{s-2}, p_{s-3}, \ldots, p_o)_2$. Тогда

$$\begin{gathered} \mathrm{rev}_s(\sigma N_1 + p) = \mathrm{rev}_s(\sigma\, 2^{s-1} + p_{s-2}\, 2^{s-2} + p_{s-3}\, 2^{s-3} + \ldots + p_0) = \\ = p_0\, 2^{s-1} + p_1\, 2^{s-2} + \ldots + p_{s-2}\, 2 + \sigma = \sigma + 2\,\mathrm{rev}_{s-1}(p). \end{gathered}$$

При $\nu \geqslant 2$ воспользуемся представлениями

$$p = (p_{s-\nu-1}, p_{s-\nu-2}, \ldots, p_o)_2, \ l = (l_{\nu-2}, l_{\nu-3}, \ldots, l_o)_2.$$

Получим

$$\begin{gathered}\mathrm{rev}_s\big((2l+\sigma)N_\nu + p\big) = \mathrm{rev}_s(l_{\nu-2}\,2^{s-1} + l_{\nu-3}\,2^{s-2} + \ldots + l_0\,2^{s-\nu+1} + \sigma\,2^{s-\nu} + \\ + p_{s-\nu-1}\,2^{s-\nu-1} + p_{s-\nu-2}\,2^{s-\nu-2} + \ldots + p_0) = \\ = p_0\,2^{s-1} + p_1\,2^{s-2} + \ldots + p_{s-\nu-1}\,2^{\nu} + \sigma\,2^{\nu-1} + l_0\,2^{\nu-2} + l_1\,2^{\nu-3} + \ldots + l_{\nu-2} = \\ = \Delta_{\nu+1}\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) + \sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l),\end{gathered}$$

что равносильно (15).

Переходим к доказательству рекурентного соотношения (14). На основании (15) и (2) запишем

$$\begin{gathered}g_\nu\big((2l+\sigma)N_\nu + p; j\big) = w_\nu\Big(\mathrm{rev}_s\big((2l+\sigma)N_\nu + p\big); rev_s(j)\Big) = \\ = w_\nu\big(\mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + \sigma\Delta_\nu + \Delta_{\nu+1}\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p); \mathrm{rev}_s(j)\big) = \\ = w_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + 2\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_\nu; \mathrm{rev}_s(j)\big) + \\ + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\Big(\mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + \big(2\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) + 1\big)\Delta_\nu; \mathrm{rev}_s(j)\Big).\end{gathered}$$

Из (15) при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ следует, что

$$\begin{gathered}\mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + 2\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_\nu = \mathrm{rev}_s(lN_{\nu-1} + p), \\ \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + \big(2\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) + 1\big)\Delta_\nu = \mathrm{rev}_s(lN_{\nu-1} + N_\nu + p),\end{gathered}$$

поэтому

$$\begin{gathered}g_\nu\big((2l+\sigma)N_\nu + p; j\big) = w_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_s(lN_{\nu-1} + p); rev_s(j)\big) + \\ + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_s(lN_{\nu-1} + N_\nu + p); rev_s(j)\big) = \\ = g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p; j) + (-1)^\sigma g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p; j).\end{gathered}$$

Теорема доказана. □

6°. Наряду с сигналом $x \in \mathbb{C}_N$ рассмотрим сигнал

$$\hat{x}(j) = x\big(\mathrm{rev}_s(j)\big), \quad j \in 0 : N-1.$$

При любом $\nu \in 0 : s$ сигнал $\hat{x}$ можно разложить по ортогональному базису $\big\{g_\nu(k)\big\}_{k=0}^{N-1}$:

$$\hat{x} = \tfrac{1}{2^\nu}\sum_{k=0}^{N-1} \zeta_\nu(k)\, g_\nu(k). \tag{16}$$

Здесь $\zeta_\nu(k) = \langle \hat{x}\,, g_\nu(k)\rangle$, поскольку $\|g_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$. Рекурентное соотношение (14), используемое отдельно при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$, порождает следующую схему вычислений коэффициентов $\zeta_\nu(k)$ разложений (16) (аналогичная ситуация была в п. 3°):

$$\begin{gathered}\zeta_0(k) = \hat{x}(k) = x\big(\mathrm{rev}_s(k)\big), \quad k = 0 : N-1;\\ \zeta_\nu(2lN_\nu + p) = \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p),\\ \zeta_\nu\big((2l+1)N_\nu + p\big) = \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) - \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p),\\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.\end{gathered} \tag{17}$$

При $\nu = s$ формула (16) согласно (13) принимает вид

$$\hat{x}(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_s(k)\, v_k(j),$$

что, как показано в п. 4°, равносильно представлению

$$x(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_s(k)\, \hat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Таким образом, по схеме (17) вычисляются коэффициенты $\zeta_s(k)$ разложения сигнала x по базису Уолша-Пэли.

Схема (17) представляет собой второй вариант быстрого преобразования Уолша.

7°. Соотношения (17) допускают обращение:

$$\begin{gathered}\zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) = \tfrac{1}{2}\Big[\zeta_\nu(2lN_\nu + p) + \zeta_\nu\big((2l+1)N_\nu + p\big)\Big],\\ \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p) = \tfrac{1}{2}\Big[\zeta_\nu(2lN_\nu + p) - \zeta_\nu\big((2l+1)N_\nu + p\big)\Big],\\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.\end{gathered} \tag{18}$$

Схема (18) позволяет по спектру Уолша-Пэли $\big\{\zeta_s(k)\big\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала x восстановить его отсчёты, а именно $x(k) = \zeta_0\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)$, $k = 0 : N-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 2. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ В ДИСКРЕТНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Н. В. Чашников

7 мая 2011 г.

В докладе изложены некоторые результаты работы [1], относящиеся к дискретному гармоническому анализу.

1°. Введём обозначение для носителя сигнала x из пространства $\mathbb{C}_N$:

$$\operatorname{supp} x := \bigl\{ j \in 0 : N-1 \mid x(j) \neq 0 \bigr\}.$$

Пусть x — сигнал из $\mathbb{C}_N$, не равный тождественно нулю. Положим $X = \mathcal{F}_N(x)$ — дискретное преобразование Фурье сигнала x.

ЛЕММА. *Пусть $m = |\operatorname{supp} x|$. Для любого $q \in 0 : N-1$ в последовательности значений*

$$X(q+1),\, X(q+2), \ldots,\, X(q+m)$$

найдётся хотя бы один ненулевой элемент.

Доказательство. Обозначим элементы носителя x через j_k:

$$\operatorname{supp} x = \{ j_1,\, j_2, \ldots,\, j_m \}.$$

Зафиксируем произвольное $q \in 0 : N-1$. Значения сигнала x отличны от нуля только на аргументах j_k, поэтому

$$X(q+l) = \sum_{k=1}^{m} x(j_k)\, \omega_N^{-(q+l)j_k}, \quad l \in 1 : m. \tag{1}$$

Положим

$$a = \bigl(x(j_1),\, x(j_2), \ldots, x(j_m) \bigr)^T,$$

$$b = \big(X(q+1),\, X(q+2), \ldots, X(q+m)\big)^T,$$
$$Z = \big\{\omega_N^{-(q+l)j_k}\big\}_{l,k=1}^m.$$

Используя эти обозначения, равенство (1) можно переписать в матричной форме: $b = Za$.

Проверим, что определитель матрицы Z не равен нулю. Действительно,

$$Z = \begin{bmatrix} z_1^{q+1} & z_2^{q+1} & \cdots & z_m^{q+1} \\ z_1^{q+2} & z_2^{q+2} & \cdots & z_m^{q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{q+m} & z_2^{q+m} & \cdots & z_m^{q+m} \end{bmatrix},$$

где $z_k = \omega_N^{-j_k}$. Все числа z_k различны, так как числа j_k различны и принадлежат множеству $0 : N-1$. Поделив каждый столбец матрицы Z на его первый элемент, получим

$$\det Z = (z_1\, z_2 \cdots z_m)^{q+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{m-1} & z_2^{m-1} & \cdots & z_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Определитель в последнем выражении является определителем Вандермонда. Он не равен нулю, поэтому $\det Z$ также отличен от нуля.

Итак, матрица Z неособенна и $a \neq \mathbb{O}$. Поэтому $b \neq \mathbb{O}$, то есть среди значений $X(q+1)$, $X(q+2), \ldots,$ $X(q+m)$ найдётся ненулевой элемент.

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 1 (принцип неопределённости). *Для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$, не равного тождественно нулю, справедливо неравенство*

$$|\operatorname{supp} x| \cdot \big|\operatorname{supp} \mathcal{F}_N(x)\big| \geqslant N. \tag{2}$$

Доказательство. Положим $X = \mathcal{F}_N(x)$, $m = |\operatorname{supp} x|$, $n = |\operatorname{supp} X|$. Обозначим через k_l элементы носителя X:

$$\operatorname{supp} X = \{k_1,\, k_2, \ldots, k_n\}, \qquad 0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n < N.$$

Если $k_2 > k_1 + m$, то все элементы в последовательности

$$X(k_1+1),\, X(k_1+2),\, \ldots,\, X(k_1+m)$$

нулевые, что противоречит лемме. Поэтому $k_2 \leqslant k_1+m$. Аналогичным образом проверяется, что $k_3 \leqslant k_2 + m$, $k_4 \leqslant k_3 + m$ и так далее. Дойдя до k_n, получим

$$k_n \leqslant k_{n-1} + m \leqslant k_{n-2} + 2m \leqslant \cdots \leqslant k_1 + (n-1)m. \tag{3}$$

В силу N-периодичности функции X первым ненулевым элементом в последовательности

$$X(k_n+1),\ X(k_n+2),\ X(k_n+3),\ldots$$

будет элемент $X(k_1+N)$. Ещё раз воспользовавшись леммой, придём к неравенству $k_1+N \leqslant k_n+m$.

Итак,

$$k_1+N \leqslant k_n+m \leqslant k_1+nm. \tag{4}$$

Следовательно, справедливо неравенство $N \leqslant nm$, что эквивалентно (2).

Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в* (2) *достигается равенство, то есть* $N = mn$, *где* $m = |\operatorname{supp} x|$, $n = \bigl|\operatorname{supp} \mathcal{F}_N(x)\bigr|$. *Тогда сигнал* x *представим в виде*

$$x(j) = c\,\omega_N^{jq}\,\delta_n(j-p), \tag{5}$$

где $c \in \mathbb{C}$, $p \in 0:n-1$, $q \in 0:m-1$.

Доказательство. Как и в теореме 1, положим $X = \mathcal{F}_N(x)$ и обозначим элементы носителя X через k_l, $l \in 1:n$. Так как $N = nm$, то неравенства в (4) обращаются в равенства. В частности,

$$k_n = k_1 + (n-1)m.$$

Поэтому в равенства обращаются и все неравенства в (3):

$$k_n = k_{n-1}+m, \quad k_{n-1} = k_{n-2}+m, \ldots, \quad k_2 = k_1+m.$$

Положим $q = k_1$. Тогда для чисел k_l справедлива формула

$$k_l = q + (l-1)m, \quad l \in 1:n.$$

Из соотношения $q+(n-1)m = k_n < N$ следует, что q принадлежит множеству $0:m-1$.

Выразим исходный сигнал x через X:

$$x(j) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{n} X(k_l)\,\omega_N^{jk_l} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1} X(q+lm)\,\omega_N^{j(q+lm)} = \omega_N^{jq}\,\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{X(q+lm)}{m}\,\omega_n^{jl}.$$

Пусть $H(l) = X(q+lm)/m$, $l \in 0:n-1$. Введя обозначение $h = \mathcal{F}_n^{-1}(H)$, придём к формуле

$$x(j) = \omega_N^{jq}\,h(j). \tag{6}$$

Так как x не равен тождественно нулю, то найдётся $p \in 0 : n-1$ такое, что $h(p) = c \neq 0$. Следовательно,

$$x(p+ln) = \omega_N^{(p+ln)q}\, h(p) \neq 0, \quad l \in 0 : m-1.$$

Размер носителя x равен m, поэтому x обращается в ноль на всех остальных аргументах. В частности, при $l = 0$, $j \in 0 : n-1$, $j \neq p$ имеем

$$0 = x(j) = \omega_N^{jq}\, h(j).$$

Установлено, что $h(j)$ при $j \in 0 : n-1$ не равно нулю только для $j = p$, то есть $h(j) = c\,\delta_n(j-p)$. Подставляя это выражение в формулу (6), получаем, что x имеет вид (5).

Теорема доказана. □

Замечание. Нетрудно проверить, что верно и обратное утверждение: если сигнал x представим в виде (5) для некоторых натуральных n, m и при этом $N = mn$, то на x в неравенстве (2) достигается равенство. Действительно, $x(j)$ отличен от нуля только при $j = p + nl$, $l \in 0 : m-1$, так что $|\operatorname{supp} x| = m$. Вычислим ДПФ сигнала x:

$$X(k) = \sum_{l=0}^{m-1} x(p+nl)\,\omega_N^{-k(p+nl)} = \sum_{l=0}^{m-1} c\,\omega_N^{(p+nl)q}\,\omega_N^{-k(p+nl)} =$$
$$= c\,\omega_N^{p(q-k)} \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{l(q-k)} = m\,c\,\omega_N^{p(q-k)}\,\delta_m(q-k).$$

Видно, что $X(k)$ не равно нулю только при $k = q + lm$, $l \in 0 : n-1$, так что $|\operatorname{supp} X| = n$. Установлено, что $N = |\operatorname{supp} x| \cdot |\operatorname{supp} X|$.

2°. Определим норму в пространстве сигналов $\mathbb{C}_N$:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|.$$

Для множества $A \subset 0 : N-1$ будем обозначать через $\overline{A}$ его дополнение до основного периода:

$$\overline{A} := (0 : N-1) \setminus A.$$

ТЕОРЕМА 3 (обобщённый принцип неопределённости). *Пусть $A \subset 0 : N-1$, $\varepsilon \geqslant 0$. Если сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ не равен тождественно нулю и выполняется условие*

$$\sum_{j \in \overline{A}} \big|x(j)\big| \leqslant \varepsilon \|x\|_1, \tag{7}$$

то справедливо неравенство

$$|A| \cdot \big|\operatorname{supp} \mathcal{F}_N(x)\big| \geqslant (1-\varepsilon)N. \tag{8}$$

Доказательство. В силу условия (7) имеем

$$\|x\|_1(1-\varepsilon) \leqslant \|x\|_1 - \sum_{j\in\overline{A}}\big|x(j)\big| = \sum_{j\in A}\big|x(j)\big| \leqslant |A| \max_{j\in 0:N-1}\big|x(j)\big|. \tag{9}$$

Положим $X = \mathcal{F}_N(x)$. По определению прямого и обратного ДПФ для любого $j \in 0:N-1$

$$x(j) = \tfrac{1}{N}\sum_{k\in\operatorname{supp} X} X(k)\,\omega_N^{kj} = \tfrac{1}{N}\sum_{k\in\operatorname{supp} X}\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\omega_N^{-kl}\,\omega_N^{kj} = \tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\sum_{k\in\operatorname{supp} X}\omega_N^{k(l-j)}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\big|x(j)\big| \leqslant \tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\big|x(l)\big| \cdot |\operatorname{supp} X| = \tfrac{1}{N}\|x\|_1 \cdot |\operatorname{supp} X|.$$

Вместе с неравенством (9) получаем

$$\|x\|_1(1-\varepsilon) \leqslant |A| \max_{j\in 0:N-1}\big|x(j)\big| \leqslant \tfrac{1}{N}|A| \cdot \|x\|_1 \cdot |\operatorname{supp} X|.$$

Сокращая на $\|x\|_1$ и перенося N в левую часть, приходим к неравенству (8).

Теорема доказана. □

Замечание. Теорема 1 является частным случаем доказанной теоремы при $A = \operatorname{supp} x$, $\varepsilon = 0$.

3°. Принцип неопределённости можно использовать для восстановления сигналов. Опишем одно из таких приложений.

Пусть задано множество $B \subset 0:N-1$. Для произвольного сигнала x из $\mathbb{C}_N$ положим $X = \mathcal{F}_N(x)$ и определим N-периодическую функцию $Y(j)$ на основном периоде $0:N-1$ формулой

$$Y(j) = \begin{cases} X(j), & \text{при } j \in B, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сигнал $y = \mathcal{F}_N^{-1}(Y)$ будем обозначать $P_B(x)$. Ясно, что P_B является линейным оператором в пространстве $\mathbb{C}_N$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть сигнал $x_* \in \mathbb{C}_N$ удовлетворяет неравенству*

$$2\,|\operatorname{supp} x_*|\,\big(N - |B|\big) < N, \tag{10}$$

а $y_* = P_B(x_*)$. Тогда x_* является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \|x\|_1 \to \min \\ P_B(x) = y_*, \\ x \in \mathbb{C}_N\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный сигнал x, отличный от x_* и удовлетворяющий ограничениям задачи (11). Покажем, что $\|x\|_1 > \|x_*\|_1$.

Положим $h = x - x_*$, $H = \mathcal{F}_N(h)$. В силу линейности P_B имеем $P_B(h) = 0$, то есть $H(j) = 0$ для всех $j \in B$. Как следствие, справедливо неравенство

$$|\operatorname{supp} H| \leqslant N - |B|. \tag{12}$$

Пусть $A = \operatorname{supp} x_*$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Из неравенств (10) и (12) вытекает неравенство

$$|A| \cdot \big|\operatorname{supp} \mathcal{F}_N(h)\big| \leqslant |\operatorname{supp} x_*|\,\big(N - |B|\big) < \tfrac{1}{2}\,N.$$

Это означает, что условие (8) из заключения теоремы 3 для сигнала h не выполнено. Поэтому и предположение теоремы 3 об справедливости неравенства (7) ложно, то есть

$$\sum_{j \in \overline{A}} \big|h(j)\big| > \tfrac{1}{2}\,\|h\|_1, \tag{13}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{j=0}^{N-1} \big|x(j)\big| = \sum_{j=0}^{N-1} \big|x_*(j) + h(j)\big| = \sum_{j \in A} \big|x_*(j) + h(j)\big| + \sum_{j \in \overline{A}} \big|h(j)\big| \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j \in A} \big|x_*(j)\big| - \sum_{j \in A} \big|h(j)\big| + \sum_{j \in \overline{A}} \big|h(j)\big| = \|x_*\|_1 + 2\sum_{j \in \overline{A}} \big|h(j)\big| - \|h\|_1. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством (13), получаем $\|x\|_1 > \|x_*\|_1$. Итак, x_* действительно является единственным решением задачи (11).

Теорема доказана. □

Практический смысл теоремы 4 следующий. Предположим, что при передаче сигнала x_* сохранилась только часть спектра, задаваемая множеством B. Если известно, что сигнал x_* удовлетворяет условию (10), то по полученному сигналу y_* можно однозначно восстановить исходный сигнал, решив экстремальную задачу (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Donoho D. L., Stark P. B. *Uncertainty principles and signal recovery* // SIAM J. of Appl. Math. 1989. Vol. 49. No 3. P. 906–931.

ОДНА МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ

М. Н. Истомина А. Б. Певный

4 июня 2011 г.

1°. Введение. Контактным числом M_n пространства $\mathbb{R}^n$ называется максимальное число шаров радиуса $R = 1$ с непересекающимися внутренностями, касающимися одного такого же шара. Точные значения M_n известны только для размерностей $n = 2, 3, 4, 8$ и 24:

$$M_2 = 6,\ M_3 = 12,\ M_4 = 24,\ M_8 = 240,\ M_{24} = 196560.$$

Для остальных n известны только оценки чисел M_n, см., например, таблицу таких оценок в книге [3], с. 42.

Пусть $x \cdot y$ — обычное скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ — норма вектора x.

Нетрудно показать, что M_n равно максимальной мощности сферического $\frac{1}{2}$-кода. Множество $C = \{x_1, \ldots, x_M\}$ на единичной сфере S^{n-1} называется $\frac{1}{2}$-кодом, если $x_i \cdot x_j \leqslant \frac{1}{2}$ при $i \neq j$.

Итак, M_n равно максимальному M, для которого существует $\frac{1}{2}$-код из M векторов.

2°. Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_M\}$ — сферический $\frac{1}{2}$-код. Обозначим через $K(t)$ количество упорядоченных пар (x_i, x_j), для которых $x_i \cdot x_j = t$. Введём функцию

$$\alpha_C(t) = \frac{1}{M} K(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Она обладает свойствами

$$\alpha_C(t) = 0 \text{ при } t \in (\tfrac{1}{2},\ 1); \qquad \alpha_C(1) = 1; \tag{1}$$

$$\sum_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \alpha_C(t) = \frac{M^2}{M} = M. \tag{2}$$

Ещё одно свойство $\alpha_C(t)$ связано с полиномами Гегенбауэра. Полином Гегенбауэра $G_k^{(n)}(t)$ имеет степень k и нормирован условием $G_k^{(n)}(1) = 1$; система $\{G_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-t^2)^{(n-3)/2}$. Для любых точек $x_1, \ldots, x_M \in S^{n-1}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,\,j=1}^{M} G_k^{(n)}(x_i \cdot x_j) \geqslant 0, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что

$$M \sum_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \alpha_C(t)\, G_k^{(n)}(t) = \sum_{i,\,j=1}^{M} G_k^{(n)}(x_i \cdot x_j), \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots.$$

Использовав (1), получим неравенство

$$-\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t)\, G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots.$$

3°. Оценка Дельсарта для количества элементов $\frac{1}{2}$-кода. Через C будем обозначать произвольный $\frac{1}{2}$-код на сфере S^{n-1}, $|C|$ — количество элементов этого кода. Введём обозначение

$$L(\alpha_C) = \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t).$$

Согласно (1) и (2) справедливо равенство $|C| = 1 + L(\alpha_C)$. Мы хотим, чтобы $|C|$ было как можно больше. В связи с этим выберем натуральное число d и рассмотрим «экстремальную задачу»

$$\begin{gathered} L(\alpha_C) \to \sup \\ -\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t) G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k \in 1:d, \\ \alpha_C(t) \geqslant 0, \qquad t \in [-1, \tfrac{1}{2}]. \end{gathered} \tag{4}$$

Запишем теперь задачу, в некотором смысле двойственную к поставленной выше задаче:

$$S(f) := \sum_{k=1}^{d} f_k \to \inf,$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \geqslant 1, \qquad t \in [-1, \tfrac{1}{2}],$$
$$f_k \geqslant 0, \qquad k \in 1:d. \tag{5}$$

Для любого $\frac{1}{2}$-кода C и для любого вектора $f = (f_1, \ldots, f_d)$, удовлетворяющего (5), справделиво неравенство

$$L(\alpha_C) \leqslant S(f). \tag{6}$$

Действительно,

$$L(\alpha_C) \leqslant \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \Big[-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t)\, f_k \Big] \alpha_C(t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{d} f_k \Big[-\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} G_k^{(n)}(t)\, \alpha_C(t) \Big] \leqslant \sum_{k=1}^{d} f_k = S(f).$$

Для $|C|$ получаем оценку $|C| \leqslant 1 + S(f)$.

Ф. Дельсарт [2] формулировал полученную оценку в терминах алгебраических полиномов. Введём полином

$$P(t) = 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k\, G_k^{(n)}(t). \tag{7}$$

Ограничения (5) равносильны неравенствам

$$P(t) \leqslant 0,\ t \in [-1,\, \tfrac{1}{2}]; \quad f_k \geqslant 0,\ k \in 1:d. \tag{8}$$

Приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1 (Ф. Дельсарт). *Если алгебраический полином* (7) *удовлетворяет ограничениям* (8), *то для произвольного* $\frac{1}{2}$*-кода* C *справедлива оценка*

$$|C| \leqslant P(1) = 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k. \tag{9}$$

Замечание. Неравенство (9) справедливо при любом выборе степени d полинома $P(t)$. Указанный вывод теоремы Дельсарта получен в книге [3, гл. 13].

4°. Интересная модификация теоремы Дельсарта предложена в краткой заметке [1]. Идея состоит в том, чтобы к ограничениям (4) добавить дополнительные ограничения на $\alpha_C(t)$. Эти дополнительные ограничения установим в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_M\}$ — сферический $\frac{1}{2}$-код, m — натуральное число, $t_m = -\sqrt{(m+1)/(2m)}$. Тогда*

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_m} \alpha_C(t) \leqslant m - 1. \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in 1 : M$. Пусть $A_k(t)$ — количество векторов x_i таких, что $x_i \cdot x_k = t$. Тогда $\alpha_C(t) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} A_k(t)$. Достаточно для любого $k \in 1 : M$ доказать неравенство

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_m} A_k(t) \leqslant m - 1.$$

Допустим противное: при некотором $k \in 1 : M$ найдутся m векторов $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)} \in C$ таких, что

$$x^{(i)} \cdot x_k < t_m, \qquad i \in 1 : m. \tag{11}$$

Рассмотрим и оценим сумму

$$S := \sum_{i,j=1}^{m} x^{(i)} \cdot x^{(j)} \leqslant m + (m^2 - m) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} m(m+1). \tag{12}$$

С другой стороны, $S = X \cdot X$, где $X = \sum_{i=1}^{m} x^{(i)}$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\|X\|^2 \geqslant (X \cdot x_k)^2.$$

Отсюда

$$S \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} \cdot x_k\Big)^2.$$

В силу (11) $\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} \cdot x_k < m t_m < 0$. Следовательно,

$$S > (m t_m)^2 = m^2 \frac{m+1}{2m} = \tfrac{1}{2} m(m+1).$$

Получили противоречие с неравенством (12). □

Замечание. $t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$, $t_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \approx -0.816$.

Следующая теорема приведена в [1] без доказательства и только для $m = 3$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_M\}$ — сферический $\frac{1}{2}$-код, а $r_m = -t_m - \sqrt{3}$. Тогда при любом $m \geqslant 3$ выполнено неравенство*

$$(m-1)\sum_{-1\leqslant t\leqslant r_m}\alpha_C(t) + \sum_{r_m<t<t_m}\alpha_C(t) \leqslant m-1.$$

Замечание. Неравенство $r_m < t_m$ выполнено при всех $m \geqslant 3$, а неравенство $-1 \leqslant r_m$ выполнено при $m \in 3:13$.

Доказательство. В предыдущей теореме получены неравенства

$$\sum_{-1\leqslant t<t_m} A_k(t) \leqslant m-1, \qquad k \in 1:M.$$

Зафиксируем $k \in 1:M$. Нам нужно доказать неравенство

$$(m-1)\sum_{-1\leqslant t\leqslant r_m} A_k(t) + \sum_{r_m<t<t_m} A_k(t) \leqslant m-1.$$

Оно равносильно утверждению: если $x^{(1)} \in C$, $x^{(1)}\cdot x_k \leqslant r_m$, то не существует $x^{(2)} \in C$, $x^{(2)} \neq x^{(1)}$, такого, что $r_m < x^{(2)}\cdot x_k < t_m$.

Допустим противное: такой вектор $x^{(2)}$ существует. Тогда

$$\|x^{(1)} + x^{(2)}\|^2 = \|x^{(1)}\|^2 + 2x^{(1)}\cdot x^{(2)} + \|x^{(2)}\|^2 \leqslant 3.$$

В то же время справедлива оценка снизу

$$\|x^{(1)} + x^{(2)}\|^2 \geqslant \big((x^{(1)} + x^{(2)})\cdot x_k\big)^2 > (r_m + t_m)^2 = (-\sqrt{3})^2 = 3.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Замечание. Приведём численное значение, используемое в дальнейшем:

$$r_3 = -0.915.$$

5°. Выберем натуральное число d.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$L(\alpha_C) := \sum_{-1\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t) \to \sup,$$

$$\alpha_C(t) \geqslant 0, \qquad t \in \left[-1, \tfrac{1}{2}\right];$$

$$-\sum_{-1\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}} \alpha_C(t)\, G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k \in 1:d;$$

$$\sum_{-1\leqslant t\leqslant r_3} \alpha_C(t) + \sum_{r_3<t\leqslant t_2} \alpha_C(t) \leqslant 1;$$

$$2\sum_{-1\leqslant t\leqslant r_3} \alpha_C(t) + \sum_{r_3<t\leqslant t_2} \alpha_C(t) + \sum_{t_2<t<t_3} \alpha_C(t) \leqslant 2.$$

Последние два ограничения получены из теоремы 2 при $m = 2$ и теоремы 3 при $m = 3$. Поставленной экстремальной задаче соответствует «двойственная задача»:

$$S(f) := \sum_{k=1}^{d} f_k + f_{d+1} + 2f_{d+2} \to \inf,$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k + f_{d+1} + 2f_{d+2} \geqslant 1, \quad t \in [-1, r_3], \tag{13}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k + f_{d+1} + f_{d+2} \geqslant 1, \quad t \in (r_3, t_2], \tag{14}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \qquad\qquad + f_{d+2} \geqslant 1, \quad t \in (t_2, t_3), \tag{15}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \qquad\qquad\qquad \geqslant 1, \quad t \in \left[t_3, \tfrac{1}{2}\right], \tag{16}$$

$$f_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, d+2. \tag{17}$$

Для любого $\frac{1}{2}$-кода C и любого вектора f, удовлетворяющего (13)–(17) справедливо неравенство $L(\alpha_C) \leqslant S(f)$ (аналогичное неравенство доказано в п. 2). Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Если вектор $f = (f_1, \ldots, f_{d+2})$ удовлетворяет ограничениям* (13)–(17), *то для произвольного $\frac{1}{2}$-кода C справедливо неравенство*

$$|C| \leqslant 1 + S(f).$$

Как следствие получаем оценку для контактного числа: $M_n \leqslant 1 + S(f)$.

6°. Заменив непрерывный параметр t в ограничениях (13)–(17) на точки сетки, получим задачу линейного программирования, которую можно решать на компьютере. При $d = 11$ можно получить оценку $M_9 \leqslant 379$ (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Всемирнов, М. Г. Ржевский. *Верхняя оценка контактного числа в размерности 9* // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. Вып. 5. С. 149–150.

2. Ph. Delsarte. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Repts. Suppl. 1973. N 10. P. 1–97.

3. Дж. Конвей, Н. Слоэн. *Упаковки шаров, решётки и группы.* Т. 1. М.: Мир, 1990. 416 с.

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

В. Н. Малозёмов

17 июня 2011 г.

1°. Нормы сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ и его спектра Фурье $X = \mathcal{F}_N(x)$ связаны равенством Парсеваля [1, с. 31]

$$\|x\|^2 = \tfrac{1}{N}\|X\|^2. \tag{1}$$

Это равенство приводит к нетривиальным формулам для тригонометрических сумм в случае, когда удаётся явно вычислить компоненты спектра X.

ПРИМЕР 1. Пусть $N = 2n$ и

$$x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ -1 & \text{при } j \in n : N-1. \end{cases}$$

Ясно, что $\|x\|^2 = N$. Как известно [1, с. 32],

$$X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при чётных } k, \\ 2\bigl(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}\bigr) & \text{при нечётных } k, \end{cases}$$

так что

$$\|X\|^2 = 4\sum_{k=0}^{n-1}\bigl|1 - i \operatorname{ctg} \tfrac{\pi(2k+1)}{N}\bigr|^2 = 4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{N}}.$$

На основании (1) приходим к формуле

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{2n}} = n^2.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $N = 2n+1$ и

$$x(j) = (-1)^j, \quad j \in 0 : N-1.$$

Ясно, что $\|x\|^2 = N$. Покажем, что

$$X(k) = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\tfrac{\pi k}{N}, \quad k \in 0 : N-1. \tag{2}$$

По определению ДПФ имеем

$$X(k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{2j}\,\omega_N^{-2kj} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j+1}\,\omega_N^{-k(2j+1)} =$$
$$= \omega_N^{-2kn} + (1-\omega_N^{-k}) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-2kj}.$$

В частности, $X(0) = 1$. При $k \in 1 : N-1$ получим

$$X(k) = \omega_N^{-2kn} + (1-\omega_N^{-k})\frac{1-\omega_N^{-2kn}}{1-\omega_N^{-2k}} = \omega_N^{-2kn} + \frac{1-\omega_N^{-2kn}}{1+\omega_N^{-k}} =$$
$$= \frac{\omega_N^{-k(2n+1)}+1}{1+\omega_N^{-k}} = \frac{2}{1+\omega_N^{-k}}.$$

Вместе с тем,

$$\frac{1}{1+\omega_N^{-k}} = \frac{1+\omega_N^{k}}{(1+\omega_N^{-k})(1+\omega_N^{k})} = \frac{1+\cos\frac{2\pi k}{N} + i\sin\frac{2\pi k}{N}}{2\bigl(1+\cos\frac{2\pi k}{N}\bigr)} = \tfrac{1}{2}\bigl(1 + i\,\mathrm{tg}\,\tfrac{\pi k}{N}\bigr),$$

поэтому $X(k) = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi k}{N}$ при $k \in 1 : N-1$. Равенство (2) установлено.

Из него следует, что

$$\|X\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \bigl|1 + i\,\mathrm{tg}\,\tfrac{\pi k}{N}\bigr|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\cos^2\frac{\pi k}{N}}\ .$$

На основании (1) приходим к формуле

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{\cos^2\frac{\pi k}{2n+1}} = (2n+1)^2.$$

ПРИМЕР 3. Пусть $x(j) = j$, $j \in 0 : N-1$. Покажем, что

$$X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}N(N-1) & \text{при } k = 0, \\ -\frac{1}{2}N\bigl(1 - i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi k}{N}\bigr) & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{3}$$

Имеем

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} j\,\omega_N^{-kj}.$$

В частности, $X(0) = \frac{1}{2}N(N-1)$. При $k \in 1 : N-1$

$$\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\,\omega_N^{-kj} = X(k) + N\delta_N(k) = X(k).$$

Вместе с тем,

$$\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\,\omega_N^{-kj} = \omega_N^k \sum_{j=1}^{N} j\,\omega_N^{-kj} = \omega_N^k\big(X(k)+N\big).$$

Приходим к уравнению $X(k) = \omega_N^k\big(X(k)+N\big)$, из которого следует, что

$$X(k) = \frac{N\omega_N^k}{1-\omega_N^k} = -\frac{N}{1-\omega_N^{-k}} = -\tfrac{1}{2}N\big(1 - i\operatorname{ctg}\tfrac{\pi k}{N}\big), \quad k \in 1 : N-1.$$

Равенство (3) установлено.

Вычислим квадраты норм сигнала x и его спектра X. Имеем

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} j^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6},$$

$$\|X\|^2 = \tfrac{1}{4}N^2(N-1)^2 + \tfrac{1}{4}N^2\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{N}}.$$

На основании (1) получаем

$$\frac{(N-1)(2N-1)}{6} = \tfrac{1}{4}(N-1)^2 + \tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{N}}.$$

После несложных преобразований приходим к замечательной формуле

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{N}} = \frac{N^2-1}{3}. \tag{4}$$

2°. Пусть r — целое неотрицательное число. Напомним, что дискретная периодическая функция Бернулли порядка r определяется так [2, с. 5]:

$$b_r(j) = \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-r}\,\omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

В частности,

$$b_0(j) = \delta_N(j) - \tfrac{1}{N}.$$

Из (5) следует, что

$$\big[\mathcal{F}_N(b_r)\big](k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (\omega_N^k - 1)^{-r} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Условие $\big[\mathcal{F}_N(b_r)\big](0) = 0$ равносильно тому, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(j) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

Далее

$$\big\|\mathcal{F}_N(b_r)\big\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{|\omega_N^k - 1|^{2r}}.$$

Учитывая, что

$$|\omega_N^k - 1|^2 = (\omega_N^k - 1)(\omega_N^{-k} - 1) = 2(1 - \cos\tfrac{2\pi k}{N}) = 4\sin^2\tfrac{\pi k}{N},$$

получаем

$$\big\|\mathcal{F}_N(b_r)\big\|^2 = \frac{1}{4^r} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2r}\frac{\pi k}{N}}.$$

На основании (1) приходим к формуле

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2r}\frac{\pi k}{N}} = 4^r N \|b_r\|^2, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

В частности, при $r = 1$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2}\frac{\pi k}{N}} = 4N \|b_1\|^2. \tag{8}$$

Проверим, что правые части в (4) и (8) равны, т.е. что

$$\|b_1\|^2 = \frac{N^2 - 1}{12N}. \tag{9}$$

Как известно [2, с. 6], дискретные периодические функции Бернулли удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$b_{r+1}(j+1) - b_{r+1}(j) = b_r(j).$$

Вычислим с его помощью значения $b_1(j)$ при $j \in 1:N$. При $j \in 1:N-1$ имеем

$$b_1(j+1) - b_1(1) = \sum_{k=1}^{j} \bigl[b_1(k+1) - b_1(k)\bigr] = \sum_{k=1}^{j} b_0(k) = -j/N.$$

Обозначив $c = b_1(1)$, получим

$$b_1(j) = c - (j-1)/N, \quad j \in 2:N.$$

Это равенство верно и при $j = 1$. Константу c определим из условия (6),

$$\sum_{j=1}^{N} \bigl(c - (j-1)/N\bigr) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$c = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} (j-1) = \frac{N-1}{2N}.$$

Приходим к формуле

$$b_1(j) = \frac{N-1}{2N} - \frac{j-1}{N} = \frac{1}{N}\Bigl(\frac{N+1}{2} - j\Bigr), \quad j \in 1:N.$$

Теперь легко проверить равенство (9). Действительно,

$$\begin{aligned}
\|b_1\|^2 = \tfrac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \bigl(\tfrac{N+1}{2} - j\bigr)^2 &= \tfrac{1}{N^2}\Bigl\{\tfrac{1}{4}N(N+1)^2 - (N+1)\sum_{j=1}^{N} j + \sum_{j=1}^{N} j^2\Bigr\} = \\
&= \tfrac{1}{N^2}\bigl\{-\tfrac{1}{4}N(N+1)^2 + \tfrac{1}{6}N(N+1)(2N+1)\bigr\} = \\
&= \tfrac{N+1}{N}\bigl\{-\tfrac{1}{4}(N+1) + \tfrac{1}{6}(2N+1)\bigr\} = \tfrac{N^2-1}{12N}.
\end{aligned}$$

По существу установлено, что формула (7) является обобщением формулы (4).

3°. Обозначим левую часть (7) через $S_r(N)$. В работе [3] показано, что $S_r(N)$ при натуральных r, N есть алгебраический полином степени r от N^2, делящийся на N^2-1 (см. (4)). Этот факт используется в [3] при выводе явных формул для $S_r(N)$.

Проверим, например, что

$$S_2(N) = \tfrac{1}{45}(N^2-1)(N^2+11). \tag{10}$$

Запишем

$$S_2(N) = (N^2-1)(AN^2+B). \tag{11}$$

Непосредственно вычислим значения $S_2(2) = 1$, $S_2(3) = \frac{32}{9}$. Придём к системе линейных уравнений относительно A и B:

$$\begin{aligned} 3(4A + B) &= 1, \\ 8(9A + B) &= \tfrac{32}{9}. \end{aligned}$$

Найдём её решение: $A = \frac{1}{45}$, $B = \frac{11}{45}$. Подставив это в (11), получим (10).

4°. Напомним формулу для конечной разности r-го порядка сигнала x из $\mathbb{C}_N$:

$$\big[\Delta^r(x)\big](j) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s\, x(j+s).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *При всех натуральных r справедлива формула*

$$\tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\sin^{2r} \tfrac{\pi k}{N}) \big|X(k)\big|^2 = \tfrac{1}{4^r} \big\|\Delta^r(x)\big\|^2. \tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \big[\Delta^r(x)\big](j) &= \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s \Big\{ \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, \delta_N(j+s-l) \Big\} = \\ &= \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s \Big\{ \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(j+s-l)} \Big\} = \\ &= \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, \omega_N^{-kl} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s\, \omega_N^{ks} = \\ &= \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj}\, X(k) (\omega_N^k - 1)^r = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^r\, X(k)\, \omega_N^{kj}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\big[\mathcal{F}_N\big(\Delta^r(x)\big)\big](k) = (\omega_N^k - 1)^r\, X(k).$$

В силу равенства Парсеваля (1)

$$\tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\omega_N^k - 1|^{2r} \big|X(k)\big|^2 = \big\|\Delta^r(x)\big\|^2.$$

Остаётся учесть, что (см. п. 2°)

$$|\omega_N^k - 1|^{2r} = \big|2\big(1 - \cos \tfrac{2\pi k}{N}\big)\big|^r = 4^r \sin^{2r} \tfrac{\pi k}{N}.$$

Предложение доказано. □

Подставим в (12) $x = \delta_N$. Учитывая, что $\big[\mathcal{F}_N(\delta_N)\big](k) \equiv 1$, получаем

$$\tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2r} \tfrac{\pi k}{N} = \tfrac{1}{4^r}\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2. \tag{13}$$

Покажем, что

$$\frac{1}{4^r}\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2 = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}, \quad r \in 1 : N-1. \tag{14}$$

При $r \in 1 : N-1$ имеем

$$\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2 = \Big\langle \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\, C_r^s\, \delta_N(\cdot + s), \sum_{s'=0}^{r}(-1)^{r-s'}\, C_r^{s'}\, \delta_N(\cdot + s')\Big\rangle =$$
$$= \sum_{s,\, s'=0}^{r} (-1)^{s+s'}\, C_r^s\, C_r^{s'}\, \delta_N(s-s') = \sum_{s=0}^{r}(C_r^s)^2.$$

В тождестве $(1+x)^{2r} = (1+x)^r(1+x^r)$ сравним коэффициенты при x^r. Придём к равенству

$$C_{2r}^r = \sum_{s=0}^{r} C_r^{r-s}\, C_r^s = \sum_{s=0}^{r}(C_r^s)^2.$$

Таким образом,

$$\tfrac{1}{4^r}\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2 = \tfrac{1}{4^r}\sum_{s=0}^{r}(C_r^s)^2 = \tfrac{1}{4^r}C_r^{2r} =$$
$$= \frac{(2r)!}{4^r(r!)^2} = \frac{(2r)!}{\big[(2r)!!\big]^2} = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}.$$

Равенство (14) установлено.

Из (13) и (14) следует, что

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2r} \frac{\pi k}{N} = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}, \quad r \in 1 : N-1. \tag{15}$$

В частности,

$$\tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \tfrac{\pi k}{N} = \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \sin^4 \tfrac{\pi k}{N} = \tfrac{3}{8}.$$

По условию $r \leqslant N-1$, так что первая формула верна при $N \geqslant 2$, а вторая — при $N \geqslant 3$.

5°. Как известно [4, с. 312],

$$\int_0^\pi \sin^{2r} x\,dx = \pi\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}.$$

На основании (15) при $N \geqslant r+1$ получаем

$$\tfrac{\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \sin^{2r}\tfrac{\pi k}{N} = \int_0^\pi \sin^{2r} x\,dx.$$

Это значит, что при интегрировании функции $\sin^{2r} x$ по отрезку $[0,\pi]$ формула левых прямоугольников при $N \geqslant r+1$ точна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 1. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 3. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 88 с.

3. Беспалов М. С. *Представление для сумм чётных отрицательных степеней синусов в равностоящих узлах* // Известия вузов. Математика. 1996. Т.8 (441). С. 6–12.

4. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 864 с.

B_φ-СПЛАЙНЫ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Ю. К. Демьянович

25 июня 2011 г.

Аннотация

В работе даны необходимые и достаточные условия существования и гладкости пространств $\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}, \varphi)$ (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов второго порядка. Установлено, что во множестве этих пространств (при фиксированной сетке X и функции φ) существует лишь одно пространство из класса C^1. Доказана вложенность упомянутых пространств для вложенных сеток. Установлены калибровочные соотношения и приведены примеры.

Сплайновые аппроксимации получили широкое применение в теории и на практике (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]). Существенным моментом при построении сплайнов стало использование аппроксимационных соотношений, появившихся первоначально в методе конечных элементов и названных С. Г. Михлиным фундаментальными соотношениями (см. [5, 6, 7]). На использовании упомянутых соотношений базируются не только свойства аппроксимации, гладкости и интерполяции сплайнами, но также и вэйвлетные разложения.

1°. B_φ-сплайны

Рассмотрим минимальные сплайны на конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ с сеткой $X := \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X: \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots.$$

Считаем, что

$$\alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j, \quad \beta = \lim_{j\to+\infty} x_j.$$

Пусть $\varphi(t)$ — трёхкомпонентная вектор-функция (вектор-столбец) с компонентами из $C^2(\alpha,\beta)$, такая, что вронскиан её компонент отделён от нуля:

$$|\det(\varphi,\varphi',\varphi'')(t)| \geqslant c > 0 \quad \forall t \in (\alpha,\beta). \tag{1}$$

Рассмотрим множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}$ трёхмерных векторов $\mathbf{a}_j$ пространства $\mathbb{R}^3$ со свойством

$$\det(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j) \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Такое множество называем полной цепочкой $\mathbf{A}$ векторов $\mathbf{a}_j$. Множество всех полных цепочек обозначим $\mathcal{A}$.

Если $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, то функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$, однозначно определяются из условий

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k,x_{k+1})\ \forall k \in \mathbb{Z}; \qquad \operatorname{supp}\omega_j = [x_j,x_{j+3}]\ \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k,x_{k+1})$ соотношения (2) содержат не более трёх ненулевых слагаемых,

$$\mathbf{a}_{k-2}\,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k\,\omega_k(t) \equiv \varphi(t). \tag{3}$$

При указанном t соотношения (3) будем рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. По теореме Крамера найдём

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\det\bigl(\varphi(t),\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}, \tag{4}$$

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\varphi(t),\mathbf{a}_k\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}, \tag{5}$$

$$\omega_k(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\varphi(t)\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}. \tag{6}$$

Произвольно фиксируя $j \in \mathbb{Z}$ и последовательно полагая $k = j$, $k = j+1$, $k = j+2$ в (6), в (5) и в (4) соответственно, получаем соотношения

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t)\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j\bigr)} \qquad \text{при} \quad t \in (x_j,x_{j+1}), \tag{7}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1}\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1}\bigr)} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+1},x_{j+2}), \tag{8}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2}\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2}\bigr)} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+2},x_{j+3}), \tag{9}$$

которые (см. (2)) следует дополнить включением

$$\operatorname{supp}\omega_j \subset [x_j, x_{j+3}].$$

Благодаря предположению (1) функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, образуют линейно независимую систему. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}, \varphi) := \{u \mid u(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\, \omega_j(t)\ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Оно называется *пространством минимальных* $(X, \mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов второго порядка.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$. Для того, чтобы производную s-го порядка можно было продолжить непрерывным образом на интервал (α, β) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi^{(s)})(x_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Введём обозначения $\varphi_j := \varphi(x_j)$, $\varphi'_j := \varphi'(x_j)$, и рассмотрим частный случай соотношений (2):

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}^*_{j'}\, \omega^*_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1})\ \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{supp}\omega^*_j = [x_j, x_{j+3}]\ \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

где векторы $\mathbf{a}^*_j$ получаются раскрытием символического определителя (вычеркиванием первой строки)

$$\mathbf{a}^*_j := \det\begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Заметим, что благодаря условию (1) при достаточно мелкой сетке X цепочка $\mathbf{A}^* := \{\mathbf{a}^*_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная. Легко проверить, что

$$\det(\mathbf{a}^*_{j-2}, \mathbf{a}^*_{j-1}, \varphi_j) = 0, \qquad \det(\mathbf{a}^*_{j-2}, \mathbf{a}^*_{j-1}, \varphi'_j) = 0.$$

Согласно теореме 1 находим $\omega^*_j \in C^1(\alpha, \beta)$. Рассматривая линейное пространство

$$\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi) := \{u \mid u(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\, \omega^*_j(t)\ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\},$$

получаем

$$\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi) \subset C^1(\alpha, \beta).$$

ТЕОРЕМА 2. *Во множестве* $\{\mathbb{S}_2(X,\mathbf{A},\varphi)\}_{\mathbf{A}\in\mathcal{A}}$ *пространств* $\mathbb{S}_2(X,\mathbf{A},\varphi)$ *существует единственное пространство класса* $C^1(\alpha,\beta)$. *Таким пространством является пространство* $\mathbb{S}_2(X,\mathbf{A}^*,\varphi)$.

ТЕОРЕМА 3. *Каждая функция* $\omega_j^*(t)$ *определяется значениями вектор-функции* $\varphi(t)$ *на множестве* $\operatorname{supp}\omega_j^*$.

Функции $\omega_j^*(t)$ называются B_φ-сплайнами. Рассмотрим два примера B_φ--сплайнов, выбирая вектор-функцию φ по-разному. В первом случае в качестве компонент вектор-функции $\varphi(t)$ берём 1, t, t^2 и в результате получаем известный полиномиальный базисный сплайн второй степени, обозначаемый здесь ω_j^B. Во втором случае компонентами упомянутой вектор-функции служат 1, $\sin t$, $\cos t$; в результате получается тригонометрический базисный сплайн "второго порядка" (обозначаемый ω_j^T, см. [10]).

1) *Полиномиальный базисный сплайн второй степени.* Пусть

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}1\\ t\\ t^2\end{pmatrix}.$$

По формулам (11) находим полную цепочку векторов

$$\mathbf{a}_j^\star=2(x_{j+2}-x_{j+1})\begin{pmatrix}1\\ \frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}\\ x_{j+1}\,x_{j+2}\end{pmatrix}.$$

Положим $c_j=\frac{1}{2}(x_{j+2}-x_{j+1})^{-1}$. После подстановки $\mathbf{a}_j=c_j\,\mathbf{a}_j^\star$ в равенства (7)–(9) получаем известный полиномиальный B-сплайн ω_j^B второй степени:

$$\operatorname{supp}\omega_j^B=[x_j,x_{j+3}],$$

$$\omega_j^B(t)=\frac{(t-x_j)^2}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)}\quad\text{при}\quad t\in[x_j,x_{j+1}),$$

$$\omega_j^B(t)=(x_{j+2}-x_j)^{-1}(x_{j+2}-x_{j+1})^{-1}(x_{j+3}-x_{j+1})^{-1}\times$$
$$\times\Big[(x_j-x_{j+2}-x_{j+3}+x_{j+1})\,t^2-2(x_{j+1}x_j-x_{j+2}x_{j+3})\,t+x_jx_{j+1}x_{j+3}-$$
$$-x_jx_{j+2}x_{j+3}+x_jx_{j+1}x_{j+2}-x_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}\Big]\quad\text{при}\quad t\in[x_{j+1},x_{j+2}),$$

$$\omega_j^B(t)=\frac{(t-x_{j+3})^2}{(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+1})}\quad\text{при}\quad t\in[x_{j+2},x_{j+3}].$$

2) *Тригонометрический базисный сплайн второго порядка.* Возьмем теперь

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ \cos\ t \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что

$$x_{j+1} - x_j < \pi \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

по формулам (11) получаем полную цепочку векторов

$$\mathbf{a}_j^\star = -2\sin\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \\ \sin\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} \\ \cos\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $c_j = -\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\right)$. После подстановки $\mathbf{a}_j = c_j\,\mathbf{a}_j^\star$ в равенства (7)–(9) находим тригонометрический сплайн ω_j^T второго порядка:

$$\operatorname{supp}\omega_j^T = [x_j, x_{j+3}], \tag{12}$$

$$\omega_j^T(t) = \sin^2\left(\frac{t-x_j}{2}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right) \quad \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\omega_j^T(t) = \frac{1}{2}\Bigg[&\sin\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+3}}{2} - t\right)\cos\frac{x_{j+1}-x_j}{2} + \\ &+ \sin\left(t - \frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)\cos\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2} + \\ &+ \sin\frac{x_{j+1}+x_j-x_{j+2}-x_{j+3}}{2}\Bigg] \times \\ &\times \sin^{-1}\left(\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\right) \\ &\text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\omega_j^T(t) = \sin^2\left(\frac{t-x_{j+3}}{2}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}\right) \quad \text{при} \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}]. \tag{15}$$

Аналогично B-сплайну второй степени функция $\omega_j^T(t)$, задаваемая формулами (12)–(15), непрерывно дифференцируема на вещественной оси, вогнута на интервалах (x_j, x_{j+1}) и (x_{j+2}, x_{j+3}), выпукла на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}), положительна на интервале (x_j, x_{j+3}), а её вторая производная имеет неустранимые разрывы первого рода в точках x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}.

2°. Калибровочные соотношения

Укрупним исходную сетку X выбрасыванием узла x_{k+1}, а именно, положим

$$\widetilde{x}_j = x_j \quad \text{при } j \le k, \qquad \widetilde{x}_j = x_{j+1} \quad \text{при } j \ge k+1,$$

и рассмотрим новую сетку $\widetilde{X} := \{\widetilde{x}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$\widetilde{X}: \ \ldots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots.$$

Используя новую сетку и полагая $\widetilde{\varphi}_j := \varphi'(\widetilde{x}_j)$, $\widetilde{\varphi}'_j := \varphi'(\widetilde{x}_j)$, рассмотрим аппроксимационные соотношения

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}^*_{j'}\, \widetilde{\omega}^*_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1})\ \forall k \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{supp} \widetilde{\omega}_j = [\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+3}]\ \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

при

$$\widetilde{\mathbf{a}}^*_j := \det \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{j+1} & \widetilde{\varphi}'_{j+1} \\ \det(\widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}, \widetilde{\varphi}_{j+1}) & \det(\widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Пространство B_φ-сплайнов на новой сетке обозначим

$$\mathbb{S}_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathbf{A}}^*, \varphi) := \{u \mid u(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\, \widetilde{\omega}^*_j(t) \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\},$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}^* := \{\widetilde{\mathbf{a}}^*_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство B_φ-сплайнов на сетке X содержит пространство B_φ-сплайнов на укрупнённой сетке $\widetilde{X}$:*

$$\mathbb{S}_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathbf{A}}^*, \varphi) \subset \mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi). \tag{17}$$

Доказательство. Из определения укрупнённой сетки следует, что

$$\widetilde{\omega}^*_j(t) \equiv \omega^*_j(t), \quad \widetilde{\mathbf{a}}^*_j = \mathbf{a}^*_j \quad \text{при } j \leqslant k-3, \tag{18}$$

$$\widetilde{\omega}^*_{j+1}(t) \equiv \omega^*_j(t), \quad \widetilde{\mathbf{a}}^*_j = \mathbf{a}^*_{j+1} \quad \text{при } j \geqslant k+1. \tag{19}$$

На основании (10) и (16) имеем

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}^*_{j'}\, \widetilde{\omega}^*_{j'}(t) \equiv \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}^*_j\, \omega^*_j(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta),$$

откуда после уничтожения одинаковых слагаемых, определяемых соотношениями (18) и (19), получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-2}\, \widetilde{\omega}^*_{k-2}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1}\, \widetilde{\omega}^*_{k-1}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}^*_k\, \widetilde{\omega}^*_k(t) \equiv \mathbf{a}^*_{k-2}\, \omega^*_{k-2}(t) + \\ + \mathbf{a}^*_{k-1}\, \omega^*_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\, \omega^*_k(t) + \mathbf{a}^*_{k+1}\, \omega^*_{k+1}(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Из (20) видно, что функции $\widetilde{\omega}^*_{k-2}(t)$, $\widetilde{\omega}^*_{k-1}(t)$, $\widetilde{\omega}^*_k(t)$ выражаются через базисные функции пространства $\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi)$. Принимая также во внимание соотношения (18) и (19), приходим к формуле (17). □

Соотношения, выражающие сплайны на укрупнённой сетке через сплайны на исходной сетке, принято называть *калибровочными соотношениями*(см. [9]).

Введём обозначение $\mathbf{n}_j := \varphi_j \times \varphi'_j$, где знак $\times$ означает векторное произведение.

ТЕОРЕМА 5. *Справедливы следующие калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}^\star_{k-2}(t) = \omega^\star_{k-2}(t) + \frac{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+2})}{\det(\mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2})}\,\omega^\star_k(t), \tag{21}$$

$$\widetilde{\omega}^\star_{k-1}(t) = \frac{\det(\mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1})}{\det(\mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2})}\omega^\star_k(t) + \frac{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2}, \mathbf{n}_{k+3})}{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2}, \mathbf{n}_{k+3})}\,\omega^\star_{k+1}(t), \tag{22}$$

$$\widetilde{\omega}^\star_k(t) = \frac{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+2})}{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2}, \mathbf{n}_{k+3})}\,\omega^\star_{k+1}(t) + \omega^\star_{k+1}(t). \tag{23}$$

Если $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, то из (21)–(23) выводим

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}^\star_{k-2}(t) = \omega^\star_{k-2}(t) &+ \\ &+ \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \cdot \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_{k-1}} \cdot \omega^\star_{k-1}(t),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}^\star_{k-1}(t) = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{x_{k+2} - x_{k-1}} \cdot \omega^\star_{k-1}(t) &+ \\ &+ \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot \frac{x_{k+3} - x_{k+1}}{x_{k+3} - x_k} \cdot \omega^\star_k(t),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}^\star_k(t) = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+3} - x_k} \cdot \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+3} - x_{k+2}} \cdot \omega^\star_k(t) &+ \\ + \omega^\star_{k+1}(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).\end{aligned} \tag{26}$$

Если же в рассматриваемом примере исходная сетка X задана на всей вещественной оси (то есть $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$) и является равномерной (то есть при некоторых $a, h \in \mathbb{R}^1$, $h > 0$, узлы сетки задаются формулой $x_j := jh + a$), то соотношения (24)–(26) принимают вид

$$\widetilde{\omega}^\star_{k-2}(t) = \omega^\star_{k-2}(t) + \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_{k-1}(t), \quad \widetilde{\omega}^\star_{k-1}(t) = \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_{k-1}(t) + \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_k(t),$$

$$\widetilde{\omega}^\star_k(t) = \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_k(t) + \omega^\star_{k+1}(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике.* М., 1976. 248 с.

2. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Полиномиальные сплайны.* Л., 1986. 120 с.

3. L. L. Schumaker. *On super splines and finite elements* // SIAM J. Numer. Anal., 1989. Vol. 26. P. 997–1005.

4. M. D. Buhmann. *Multiquadratic Prewavelets on Nonequally Spaced Knots in One Dimension* // Math. of Comput., 1995. Vol. 64, № 212. P. 1611–1625.

5. Goel J. J. *Construction of basis functions for numerical utilization of Ritz's method* // Numer. Math. 1968. Vol. 12. P. 435–447.

6. Михлин С. Г. *Вариационно-сеточная аппроксимация* //Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1974. Т. 48. С. 32–188.

7. Демьянович Ю. К., Михлин С. Г. *О сеточной аппроксимации функций соболевских пространств* // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1973. Т. 35. С. 6–11.

8. Бурова И. Г., Демьянович Ю. К. *Теория минимальных сплайнов.* Издательство СПбГУ. 2000. 316 с.

9. Демьянович Ю.К. *Всплесковые разложения на неравномерной сетке* // Труды СПбМО, 2007. Т. 13. С. 27–51.

10. Демьянович Ю.К. *Вложеннные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение* // Ж. Математические Заметки, 2005. Т. 78, вып. 5. С. 22–26.

КАЛИБРОВОЧНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ B-СПЛАЙНОВ

В. Н. Малозёмов

25 июня 2011 г.

1°. Пусть $N = mn$. Будем считать, что $m = 2^t$, где t — натуральное число. Положим

$$m_\nu = m/2^\nu, \quad n_\nu = 2^\nu n, \quad \nu \in 0 : t.$$

Ясно, что $m_\nu n_\nu = N$ при всех ν.

Обозначим через $Q_r^\nu(j)$ дискретный периодический B-сплайн порядка r, соответствующий параметрам m_ν, n_ν. Как известно [1, 2],

$$Q_r^\nu(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, \omega_N^{kj},$$

где

$$y_\nu(k) = \begin{cases} n_\nu^{2r} & \text{при } k = 0, \\ \left(\dfrac{\sin(\pi k/m_\nu)}{\sin(\pi k/N)}\right)^{2r} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо калибровочное соотношение*

$$Q_r^{\nu+1}(j) = \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, Q_r^\nu(j - pn_\nu), \quad \nu \in 0 : t-1. \tag{1}$$

Доказательство соотношения (1) в “разобранном” виде (разбитое на серию задач) представлено в [2, с. 62–63]. В данном докладе мы приведём каноническое доказательство.

2°. Начнём с двух вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Имеет место формула*

$$y_{\nu+1}(k) = c_\nu(k)\, y_\nu(k), \quad k \in 0 : N-1, \tag{2}$$

где

$$c_\nu(k) = \big(2\cos(\pi k/m_\nu)\big)^{2r}. \tag{3}$$

Доказательство. Равенство (2) очевидно при $k = 0$. Действительно,

$$y_{\nu+1}(0) = n_{\nu+1}^{2r} = (2n_\nu)^{2r} = c_\nu(0)\, y_\nu(0).$$

Пусть $k \in 1 : N-1$. Учитывая, что

$$\sin(\pi k/m_{\nu+1}) = \sin(2\pi k/m_\nu) = 2\cos(\pi k/m_\nu)\sin(\pi k/m_\nu),$$

на основании определения $y_\nu(k)$ получаем (2). □

ЛЕММА 2. *Коэффициенты $c_\nu(k)$ допускают представление*

$$c_\nu(k) = \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, \omega_{m_\nu}^{-kp}. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$\omega_{m_\nu}^{-k}(\omega_{m_\nu}^{k}+1)^2 = \omega_{m_\nu}^{k} + 2 + \omega_{m_\nu}^{-k} = 2(1+\cos\tfrac{2\pi k}{m_\nu}) = (2\cos\tfrac{\pi k}{m_\nu})^2,$$

поэтому согласно (3)

$$c_\nu(k) = \omega_{m_\nu}^{-kr}(\omega_{m_\nu}^{k}+1)^{2r} = \sum_{p=0}^{2r} C_{2r}^{2r-p}\, \omega_{m_\nu}^{-k(r-p)} =$$

$$= \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, \omega_{m_\nu}^{-kp}.$$

Лемма доказана. □

3°. Обратимся к доказательству теоремы 1.

На основании (2) и (4) запишем

$$Q_r^{\nu+1}(j) = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_{\nu+1}(k)\,\omega_N^{kj} = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_\nu(k)\, y_\nu(k)\,\omega_N^{kj} =$$

$$= \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\,\omega_N^{kj} \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\,\omega_N^{-kpn_\nu} =$$

$$= \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\Big[\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\,\omega_N^{k(j-pn_\nu)}\Big] = \sum_{p=-r}^{r} C_{2r}^{r+p}\, Q_r^\nu(j-pn_\nu).$$

Теорема доказана. □

4°. Калибровочное соотношение существует и для дискретных ортогональных сплайнов, которые применительно к параметрам m_ν, n_ν определяются так ([3], [2, с. 38]):

$$\mu_k^\nu(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu - 1} y_\nu(qm_\nu + k)\, \omega_N^{(qm_\nu + k)j}, \quad k \in 0 : m_\nu - 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *При $k \in 0 : m_{\nu+1} - 1$ справедливо калибровочное соотношение*

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = c_\nu(k)\, \mu_k^\nu(j) + c_\nu(m_{\nu+1} + k)\, \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j), \quad \nu \in 0 : t - 1, \tag{5}$$

где $c_\nu(k)$ имеют вид (3).

Доказательство. Воспользуемся формулой (2) и m_ν-периодичностью коэффициентов $c_\nu(k)$. Получим

$$\begin{aligned}
\mu_k^{\nu+1}(j) &= \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{2n_\nu - 1} y_{\nu+1}(qm_{\nu+1} + k)\, \omega_N^{(qm_{\nu+1}+k)j} = \\
&= \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu - 1} y_{\nu+1}(2qm_{\nu+1} + k)\, \omega_N^{(2qm_{\nu+1}+k)j} + \\
&+ \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu - 1} y_{\nu+1}\big((2q+1)m_{\nu+1} + k\big)\, \omega_N^{((2q+1)m_{\nu+1}+k)j} = \\
&= c_\nu(k) \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu - 1} y_\nu(qm_\nu + k)\, \omega_N^{(qm_\nu + k)j} + \\
&+ c_\nu(m_{\nu+1} + k) \tfrac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu - 1} y_\nu(qm_\nu + m_{\nu+1} + k)\, \omega_N^{(qm_\nu + m_{\nu+1} + k)j} = \\
&= c_\nu(k)\, \mu_k^\nu(j) + c_\nu(m_{\nu+1} + k)\, \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

5°. Калибровочные соотношения (1) и (5) служат основой для построения вейвлетных разложений пространства дискретных периодических сплайнов (см., например, [3], [2, с. 47–52]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 3. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 88 с.

3. Кирушев В. А., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Вейвлетное разложение пространства дискретных периодических сплайнов* // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 5. С. 712–720.

ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ МЕТОДОМ SUBDIVISION

Н. В. Чашников

1 октября 2011 г.

В докладе рассматриваются математические основы метода subdivision [1]. Описан вариант метода subdivision, позволяющий строить кривые, которые аналитически определяются сплайнами с равномерно распределёнными узлами.

1°. Введём последовательность нормализованных B-сплайнов с целочисленными узлами. B-сплайн нулевого порядка $N_0(t)$ задаётся формулой

$$N_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0,1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки:

$$N_{\nu+1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} N_\nu(t-s) N_0(s)\, ds = \int_0^1 N_\nu(t-s)\, ds.$$

В частности,

$$N_1(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0,1], \\ 2-t, & \text{если } t \in (1,2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рис. 1 представлены графики сплайнов N_0, N_1 и N_2.

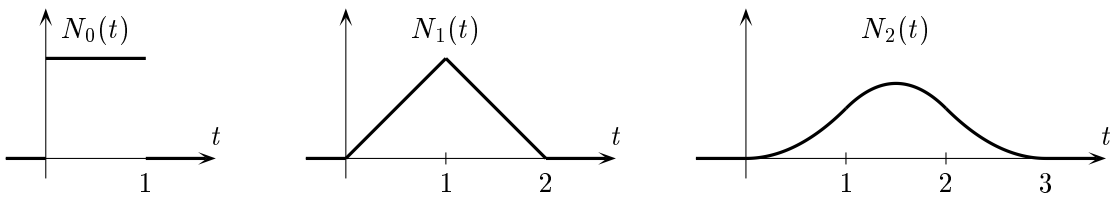


Рис. 1. B-сплайны малых порядков

ЛЕММА 1. *При всех натуральных r сплайн N_r обладает следующими свойствами:*

1) *функция N_r принадлежит классу C^{r-1};*

2) *на каждом отрезке $[k, k+1]$, где k — целое, $N_r(t)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше r.*

Доказательство. Применим метод математической индукции. База индукции при $r = 1$, очевидно, выполняется. Предположим, что свойства 1 и 2 справедливы для некоторого натурального r. Перепишем рекуррентное соотношение в виде

$$N_{r+1}(t) = \int_0^1 N_r(t-s)\,ds = \int_{t-1}^t N_r(s)\,ds. \tag{1}$$

Дифференцируя последнее выражение, получаем

$$N'_{r+1}(t) = N_r(t) - N_r(t-1).$$

По индукционному предположению $N_r \in C^{r-1}$. Следовательно, $N_{r+1} \in C^r$. Если t принадлежит отрезку $[k, k+1]$, где k — целое, то $t-1 \in [k-1, k]$, поэтому $N'_{r+1}(t)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше r. Значит, N_{r+1} на этом отрезке является полиномом степени не выше $r+1$.

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *При всех $r \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\operatorname{supp} N_r \subset [0, r+1], \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_r(t)\,dt = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_r(t-j) = 1 \quad \textit{при всех } t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Доказательство. При $r = 0$ справедливость соотношений (2)–(4) проверяется непосредственно. Предположим, что они выполняются для N_r. Сделаем индукционный переход от r к $r+1$.

Если $N_{r+1}(t)$ отлично от нуля при некотором t, то в силу (1) и индукционного предположения пересечение $[t-1, t] \cap [0, r+1]$ должно быть непусто, то есть $t \in [0, r+2]$. Следовательно, $\operatorname{supp} N_{r+1} \subset [0, r+2]$.

Воспользуемся равенством (1) и доказанными ограничениями на носители сплайнов N_{r+1} и N_r. Запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{r+1}(t)\,dt = \int_0^{r+2} N_{r+1}(t)\,dt = \int_0^{r+2} dt \int_{t-1}^t N_r(s)\,ds =$$

$$= \int_{-1}^{r+2} ds \int_{s}^{s+1} N_r(s)\,dt = \int_{-1}^{r+2} N_r(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} N_r(s)\,ds = 1.$$

Проверим справедливость тождества (4) для сплайна N_{r+1}. Имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{r+1}(t-j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{t-j-1}^{t-j} N_r(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} N_r(s)\,ds = 1.$$

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 1. *При всех $r \geqslant 0$ справедливо соотношение*

$$N_r(t) = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r+1} C_{r+1}^k\, N_r(2t-k). \tag{5}$$

Доказательство. При $r = 0$ тождество (5) очевидно:

$$N_0(t) = N_0(2t) + N_0(2t-1).$$

Сделаем индукционный переход от $r-1$ к r. Имеем

$$N_r(t) = \frac{1}{2^{r-1}} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \int_0^1 N_{r-1}(2t-2s-k)\,ds = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \int_0^2 N_{r-1}(2t-\sigma-k)\,d\sigma.$$

Поскольку

$$\int_1^2 N_{r-1}(2t-k-\sigma)\,d\sigma = \int_0^1 N_{r-1}(2t-(k+1)-s)\,ds,$$

то

$$\begin{aligned} N_r(t) &= \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \big[N_r(2t-k) + N_r(2t-k-1)\big] = \\ &= \frac{1}{2^r} \left[N_r(2t) + N_r(2t-r-1) + \sum_{k=1}^{r} (C_r^k + C_r^{k+1}) N_r(2t-k)\right] = \\ &= \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r+1} C_{r+1}^k\, N_r(2t-k). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

2°. Пусть $\{\mathbf{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность векторов из пространства $\mathbb{R}^n$, в которой лишь конечное число членов отлично от нуля. *Производящей функцией* последовательности $\mathbf{f}_k$ называется функция

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{f}_k\, z^k.$$

В дальнейшем будем опускать множества суммирования, если суммирование ведётся по всем целым числам. Заметим, что фактически в сумме конечное количество слагаемых, так что вопросы сходимости не возникают.

Приведём некоторые свойства производящих функций.

1) Пусть $\mathbf{f}(z)$ и $\mathbf{g}(z)$ — производящие функции последовательностей $\{\mathbf{f}_k\}$ и $\{\mathbf{g}_k\}$ соответственно. Тогда $\mathbf{f}(z)+\mathbf{g}(z)$ — производящая функция последовательности $\{\mathbf{f}_k+\mathbf{g}_k\}$, а $\mathbf{f}(z)-\mathbf{g}(z)$ — производящая функция последовательности $\{\mathbf{f}_k-\mathbf{g}_k\}$.

2) Если $\mathbf{f}(z)$ — производящая функция последовательности $\{\mathbf{f}_k\}$, то для последовательности $\{\mathbf{f}_k-\mathbf{f}_{k-1}\}$ производящей функцией будет $(1-z)\mathbf{f}(z)$.

3) Для любой последовательности $\{\mathbf{f}_k\}$ и её производящей функции $\mathbf{f}(z)$ справедливы равенства

$$\sum_k \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(1), \qquad \sum_k (-1)^k\, \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(-1),$$
$$\sum_k \mathbf{f}_{2k} = \frac{\mathbf{f}(1)+\mathbf{f}(-1)}{2}, \qquad \sum_k \mathbf{f}_{2k+1} = \frac{\mathbf{f}(1)-\mathbf{f}(-1)}{2}.$$

В случае $\mathbb{R}^1$ получаем, что указанные свойства справедливы и для последовательностей вещественных чисел.

3°. Пусть задано натуральное число r и последовательность векторных коэффициентов $\{\mathbf{p}_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из пространства $\mathbb{R}^n$, в которой только конечное количество членов отлично от нуля. Обозначим через $\mathbf{p}^0(z)$ производящую функцию последовательности $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Рассмотрим сплайн

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^0\, N_r(t-k), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Из леммы 1 следует, что функция $\mathbf{f}(t)$ принадлежит классу C^{r-1} и на каждом отрезке вида $[j, j+1]$, где j — целое, совпадает с некоторым полиномом степени не выше r.

Перепишем масштабирующее уравнение (5) в виде

$$N_r(t) = \sum_k s_k\, N_r(2t - k), \tag{6}$$

где

$$s_k = \begin{cases} \frac{C_{r+1}^k}{2^r}, & \text{если } k \in 0 : r+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Укажем производящую функцию последовательности $\{s_k\}$:

$$s(z) = \sum_k s_k\, z^k = \sum_{k=0}^{r+1} \frac{C_{r+1}^k}{2^r}\, z^k = \frac{(1+z)^{r+1}}{2^r}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $m \geqslant 0$ сплайн $\mathbf{f}(t)$ можно разложить по сдвигам B-сплайнов кратного аргумента:*

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\, N_r(2^m\, t - k), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где в последовательности коэффициентов $\{\mathbf{p}_k^m\}_{k\in\mathbb{Z}}$ лишь конечное число членов отлично от нуля. При этом производящие функции $\mathbf{p}^m(z)$ последовательностей коэффициентов определяются рекуррентным соотношением

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\, \mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Доказательство проведём методом математической индукции. База индукции при $m = 0$ справедлива по определению сплайна $\mathbf{f}(t)$. Сделаем индукционный переход от $m-1$ к m для $m \geqslant 1$. Пользуясь индукционным предположением и мастшабирующим уравнением (6), записываем

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1} N_r(2^{m-1}\, t - k) = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1} \sum_j s_j\, N_r(2^m\, t - 2k - j).$$

Заменим во внутренней сумме переменную j на $l = 2k + j$:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1} \sum_l s_{l-2k}\, N_r(2^m\, t - l) = \sum_l N_r(2^m\, t - l) \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, s_{l-2k}.$$

Положив

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, s_{l-2k},$$

получим разложение (7).

Проверим справедливость рекуррентной формулы (8) для производящей функции $\mathbf{p}^m(z)$. Имеем

$$\mathbf{p}^m(z) = \sum_l \mathbf{p}_l^m\, z^l = \sum_l \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, s_{l-2k}\, z^{2k}\, z^{l-2k} = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, z^{2k} \sum_j s_j\, z^j = \\ = \mathbf{p}^{m-1}(z^2)\, s(z).$$

Теорема доказана. □

Опишем алгоритм Лейна-Ризенфельда (Lane-Riesenfeld algorithm), позволяющий быстро вычислить набор коэффициентов $\mathbf{p}_k^m$ по предыдущему набору $\mathbf{p}_k^{m-1}$. Подставим в формулу (8) значение функции $s(z)$ и запишем

$$\mathbf{p}^m(z) = \big(\mathbf{p}^{m-1}(z^2)(1+z)\big) \underbrace{\frac{1+z}{2} \cdot \frac{1+z}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1+z}{2}}_{r \text{ сомножителей}}.$$

Выражение в правой части даёт пошаговое преобразование функции $\mathbf{p}^{m-1}(z)$ в $\mathbf{p}^m(z)$: сначала от $\mathbf{p}^{m-1}(z)$ переходим к $\mathbf{p}^{m-1}(z^2)(1+z)$, а потом r раз умножаем на $\frac{1+z}{2}$. Рассмотрим преобразования последовательности коэффициентов, соответствующие этим операциям над производящей функцией. На первом шаге последовательность

$$\ldots, \mathbf{p}_0^{m-1}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \ldots$$

преобразуется в последовательность

$$\ldots, \mathbf{p}_0^{m-1}, \mathbf{p}_0^{m-1}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \ldots.$$

Умножение производящей функции на $\frac{1+z}{2}$ соответствует замене каждого члена последовательности на половину его суммы с предыдущим членом. После второго шага получаем последовательность

$$\ldots, \mathbf{p}_0^{m-1}, \frac{\mathbf{p}_0^{m-1} + \mathbf{p}_1^{m-1}}{2}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \frac{\mathbf{p}_1^{m-1} + \mathbf{p}_2^{m-1}}{2}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \ldots, \tag{9}$$

после третьего — последовательность

$$\ldots, \frac{3\mathbf{p}_0^{m-1} + \mathbf{p}_1^{m-1}}{4}, \frac{\mathbf{p}_0^{m-1} + 3\mathbf{p}_1^{m-1}}{4}, \frac{3\mathbf{p}_1^{m-1} + \mathbf{p}_2^{m-1}}{4}, \frac{\mathbf{p}_1^{m-1} + 3\mathbf{p}_2^{m-1}}{4}, \ldots, \tag{10}$$

и так далее. Если порядок r равен единице, то процесс останавливается после второго шага, и последовательность (9) и есть $\{\mathbf{p}_k^m\}$. Если $r = 2$, то в качестве $\{\mathbf{p}_k^m\}$ берётся последовательность (10).

4°. Исследуем поведение последовательностей $\{\mathbf{p}_k^m\}$ при неограниченном увеличении m.

Положим $\Delta\mathbf{p}_k^m = \mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_{k-1}^m$ при $m \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Производящая функция $\Delta\mathbf{p}^m$ последовательности $\{\Delta\mathbf{p}_k^m\}$ определяется формулой $\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z)$.

В качестве нормы векторов пространства $\mathbb{R}^n$ будем использовать евклидову норму.

ЛЕММА 3. *При всех $m \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\| \leqslant \frac{1}{2^m} \max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^0\|. \tag{11}$$

Доказательство проведём методом математической индукции. База индукции при $m = 0$ очевидно. Сделаем индукционный переход от $m-1$ к m для $m \geqslant 1$.

Воспользуемся рекуррентным соотношением (8). Запишем

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z) = (1-z)s(z)\,\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \frac{(1-z)(1+z)^{r+1}}{2^r}\,\mathbf{p}^{m-1}(z^2) =$$
$$= \left(\frac{1+z}{2}\right)^r (1-z^2)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^r \Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2).$$

Введя обозначение $d(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^r$, придём к рекуррентному соотношению для производящей функции $\Delta\mathbf{p}^m(z)$:

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\,\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2). \tag{12}$$

Пусть d_k — коэффициент при z^k у полинома $d(z)$. Ясно, что

$$d_k = \begin{cases} \frac{C_r^k}{2^r}, & \text{если } k \in 0:r, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

но нам достаточно того, что все d_k неотрицательны. Перепишем равенство (12) в виде

$$\sum_k \Delta\mathbf{p}_k^m\, z^k = \sum_j d_j\, z^j \sum_l \Delta\mathbf{p}_l^{m-1} z^{2l} = \sum_l \sum_j d_j\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-1} z^{j+2l}.$$

Заменяя переменную j на $k = j + 2l$, получаем

$$\sum_k \Delta\mathbf{p}_k^m\, z^k = \sum_k \sum_l d_{k-2l}\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-1}\, z^k.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z. Придём к равенству

$$\Delta\mathbf{p}_k^m = \sum_l d_{k-2l}\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-1}.$$

Далее,

$$\max_k \|\Delta \mathbf{p}_k^m\| = \max_k \Big\| \sum_l d_{k-2l}\, \Delta \mathbf{p}_l^{m-1} \Big\| \leqslant \max_l \|\Delta \mathbf{p}_l^{m-1}\| \max_k \sum_l |d_{k-2l}|.$$

В силу неотрицательности d_{k-2l} имеем

$$\max_k \sum_l |d_{k-2l}| = \max_k \sum_l d_{k-2l} = \max\Big\{ \sum_l d_{2l},\ \sum_l d_{2l+1} \Big\} =$$
$$= \max\Big\{ \frac{d(1)+d(-1)}{2},\ \frac{d(1)-d(-1)}{2} \Big\} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\max_k \|\Delta \mathbf{p}_k^m\| \leqslant \frac{1}{2} \max_l \|\Delta \mathbf{p}_l^{m-1}\|.$$

Принимая во внимание индукционное предположение, приходим к неравенству (11).

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 3. *Для всех $m \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\max_j \Big\| \mathbf{f}\big(\tfrac{j}{2^m}\big) - \mathbf{p}_j^m \Big\| \leqslant \frac{c}{2^m}, \tag{13}$$

где $c = (r+1) \max_l \|\Delta \mathbf{p}_l^0\|$.

Доказательство. В силу (7) имеем

$$\max_j \Big\| \mathbf{f}\big(\tfrac{j}{2^m}\big) - \mathbf{p}_j^m \Big\| = \max_j \Big\| \sum_k \mathbf{p}_k^m\, N_r(j-k) - \mathbf{p}_j^m \Big\|.$$

Воспользуемся тождеством (4) и перепишем последнюю сумму в виде

$$\sum_k \mathbf{p}_k^m\, N_r(j-k) - \sum_k \mathbf{p}_j^m\, N_r(j-k) = \sum_k (\mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_j^m) N_r(j-k).$$

Из соотношения (2) следует, что слагаемые последней суммы могут быть отличны от нуля только если $j-k \in 0:r+1$. Но для таких слагаемых справедливо неравенство

$$\|\mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_j^m\| \leqslant (r+1) \max_l \|\Delta \mathbf{p}_l^m\| \leqslant \frac{r+1}{2^m} \max_l \|\Delta \mathbf{p}_l^0\| = \frac{c}{2^m}.$$

Приходим к оценке

$$\max_j \Big\| \mathbf{f}\big(\tfrac{j}{2^m}\big) - \mathbf{p}_j^m \Big\| \leqslant \max_j \sum_k \frac{c}{2^m} |N_r(j-k)|.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться неотрицательностью B-сплайна N_r и тождеством (4). □

5°. Покажем, как изложенные выше результаты применяются в геометрическом моделировании для построения кривых.

Пусть задана некоторая ломаная на плоскости или в трёхмерном пространстве и фиксировано натуральное число r. Возьмём вершины ломаной в качестве начальной последовательности $\{\mathbf{p}_k^0\}$, полагая все остальные члены нулевыми. Пользуясь алгоритмом Лейна-Ризенфельда, по последовательности $\{\mathbf{p}_k^0\}$ найдём последовательность $\{\mathbf{p}_k^1\}$, по ней — последовательность $\{\mathbf{p}_k^2\}$ и так далее. Если отбросить лишние нулевые члены, каждая из построенных последовательностей задаёт ломаную. Согласно неравенству (13), при неограниченном возрастании m полученные таким способом ломаные с экспоненциальной скоростью сходятся к кривой, определяемой сплайном $\mathbf{f}(t)$. Поэтому при сравнительно небольших m ломаные, задаваемые последовательностями $\{\mathbf{p}_k^m\}$, дают достаточно хорошее приближение предельной кривой. Описанный процесс построения кривых является одним из вариантом метода, называемого *subdivision*. Более подробные описания этого и других методов subdivision, используемых для построения кривых и поверхностей, даны в книге [1].

ПРИМЕР 1. Пусть $r = 2$. В таком случае алгоритм Лейна-Ризенфельда заканчивается после третьего шага, преобразуя последовательность $\{\mathbf{p}_k^{m-1}\}$ в последовательность $\{\mathbf{p}_k^m\}$ вида (10). Геометрически это означает, что для перехода от ломаной $\{\mathbf{p}_k^{m-1}\}$ к $\{\mathbf{p}_k^m\}$ надо взять на каждом отрезке ломаной две точки, делящие отрезок в отношении $1:2:1$, после чего отбросить вершины исходной ломаной и взять полученные точки в качестве вершин новой ломаной. Данный метод последовательного преобразования ломаных называется алгоритмом Чайкина.

Приведём пример работы алгоритма Чайкина в случае, когда начальная ломаная образует квадрат (рис. 2). На рис. 3 показан переход от ломаной $\{\mathbf{p}_k^0\}$ к $\{\mathbf{p}_k^1\}$, на рис. 4 — от $\{\mathbf{p}_k^1\}$ к $\{\mathbf{p}_k^2\}$. При этом исходная ломаная изображена штриховой линией, а преобразованная ломаная — сплошной линией и её вершины отмечены кружками. На рис. 5 представлена ломаная, задаваемая последовательностью $\{\mathbf{p}_k^3\}$.

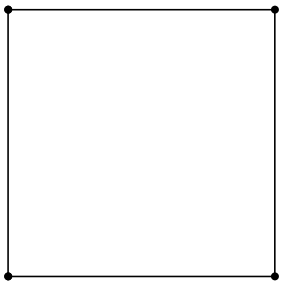


Рис. 2. $\{\mathbf{p}_k^0\}$

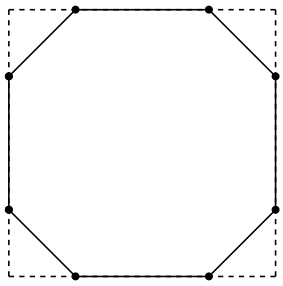


Рис. 3. $\{\mathbf{p}_k^1\}$

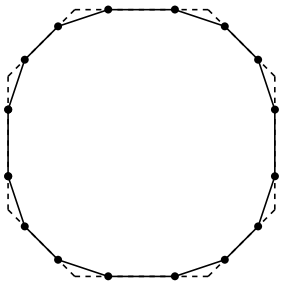


Рис. 4. $\{\mathbf{p}_k^2\}$

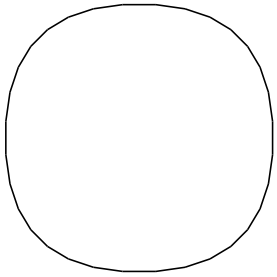


Рис. 5. $\{\mathbf{p}_k^3\}$

ПРИМЕР 2. Пусть $r = 3$. Рассмотрим первые шаги метода subdivision для ломаной, изображённой на рис. 6. На рис. 7 показан переход от ломаной $\{\mathbf{p}_k^0\}$ к $\{\mathbf{p}_k^1\}$, на рис. 8 — от $\{\mathbf{p}_k^1\}$ к $\{\mathbf{p}_k^2\}$. На рис. 9 представлена ломаная, задаваемая последовательностью $\{\mathbf{p}_k^3\}$.

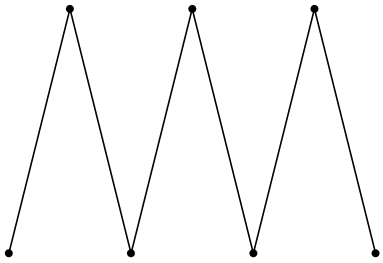


Рис. 6. $\{\mathbf{p}_k^0\}$

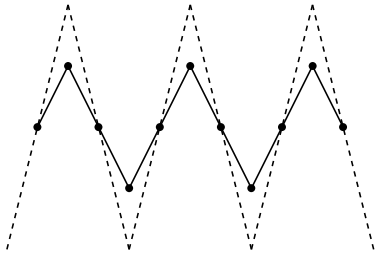


Рис. 7. $\{\mathbf{p}_k^1\}$

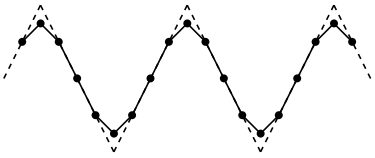


Рис. 8. $\{\mathbf{p}_k^2\}$

Рис. 9. $\{\mathbf{p}_k^3\}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersson L. E., Stewart N. F. *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces.* SIAM, 2010.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША

М. С. Беспалов

8 октября 2011 г.

Доклад существенно опирается на доклад В. Н. Малозёмова [1], где приведены базовые сведения. Чтобы не повторять определения и формулы из этого доклада, ссылки на пронумерованные формулы доклада [1] оформим двойным индексом: укажем (1.2) при ссылке на формулу (2) из доклада [1].

1°. Формула (1.1) служит определением *дискретной функции Уолша в нумерации Адамара* уровня s, обозначенной v_k. Вектор значений $v_k(j)$ (где $j \in 0 : N-1$, $N = 2^s$) дискретной функции Уолша в нумерации Адамара уровня s будем обозначать тем же символом v_k или подробнее символом $v_k\{s\}$ (с указанием уровня) и называть *вектором дфу* или вектором дфу-Адамара.

Основной нумерацией дискретных функций Уолша считается нумерация, предложенная Пэли [2]. В пунктах 8–10 доклада [1] эта нумерация вводится через перестановку reverse двоичного кода по формуле (1.17). Вектор значений дискретной функции Уолша в нумерации Пэли уровня s будем обозначать w_k или $w_k\{s\}$ (с указанием уровня), называть *вектор дфу-Пэли* и определять через вектор дфу-Адамара $w_k = v_{\mathrm{rev}_s(k)}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При любом фиксированном s всего различных векторов дфу уровня s ровно 2^s.

Различные векторы дфу фиксированного уровня s имеют разное число перемен знака.

Если взять за основу определение (1.1) или (1.2), то доказательство данного утверждения заняло бы лишнюю страницу доклада. Ниже вводится определение 1, из которого вытекает данное утверждение.

Третьей традиционной нумерацией дискретных функций Уолша служит *нумерация Уолша*, при которой функции упорядочены по числу перемен знака векторов дфу. Будем обозначать *векторы дфу-Уолша* символом u_k.

В статье [3] вводится ещё одна нумерация векторов-дфу. Соответствующие векторы обозначим b_k.

2°. Предложим определение векторов дфу, не привязанное к нумерации.

Напомним [4, с. 331], что *кронекерово произведение матриц* $C = (c_{ij})_{i,j=0}^{n-1,m-1}$ и B есть блочная матрица вида

$$C \otimes B = (c_{ij} \cdot B)_{i,j=0}^{n-1,m-1}.$$

Введём матрицы $S = (1\ 1)$, $A = (1\ -1)$ (смысловая нагрузка символов: S — симметричный, A — антисимметричный).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектором значений дискретной функции Уолша уровня s (вектором дфу уровня s) назовём любое кронекерово произведение векторов S и A в количестве s сомножителей.

ПРИМЕР 1. Построим по определению 1 векторы дфу уровня 2 и приведём их обозначение в нумерациях Пэли, Адамара, Уолша и в новой [3]:

$$\begin{aligned}
S \otimes S &= (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) = w_0 = v_0 = u_0 = b_0,\\
A \otimes S &= (1 \quad 1 \quad -1 \quad -1) = w_1 = v_2 = u_1 = b_3,\\
S \otimes A &= (1 \quad -1 \quad 1 \quad -1) = w_2 = v_1 = u_3 = b_2,\\
A \otimes A &= (1 \quad -1 \quad -1 \quad 1) = w_3 = v_3 = u_2 = b_1.
\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Векторы дфу в нумерации Адамара упорядочены в лексикографическом порядке в алфавите* $\{S, A\}$, *где символ* $\otimes$ *считаем разделительным знаком.*

Доказательство. В примере 1 построена база индукции. Сделаем индуктивный переход. Согласно формуле (1.2) при $0 \leqslant k < 2^{\nu-1}$ имеем

$$v_k\{\nu\} = S \otimes v_k\{\nu - 1\}, \qquad v_{k+2^{\nu-1}}\{\nu\} = A \otimes v_k\{\nu - 1\}. \qquad \square$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Векторы дфу в нумерации Пэли упорядочены в лексикографическом обратном порядке в алфавите* $\{S, A\}$.

Доказательство проводится аналогично.

Если мы каждый символ S заменим на 0, а символ A заменим на 1, опустив символы $\otimes$, то по определению 1 получим номер вектора дфу-Адамара в двоичной системе счисления. При прочтении этого выражения в обратном порядке получим номер дискретной функции Уолша в нумерации Пэли.

3°. С помощью векторов дфу фиксированного уровня можно строить дискретные преобразования Уолша (DWT — Discrete Walsh Transform) различных нумераций. Формула (1.2) служит определением матрицы DWT в нумерации Адамара, которую будем обозначать (в отличии от [1]) символом H_ν (от написания Hadamard), так как символ A занят.

Матрицу DWT в нумерации Пэли будем обозначать W_ν. Обычно [5] её определяют как матрицу, соответствующие строки которой есть вектор значений функции Уолша в нумерации Пэли на последовательных по $k \in 0 : 2^\nu - 1$ интервалах ν-го ранга $\Delta_\nu^k = [\frac{k}{2^\nu}, \frac{k+1}{2^\nu})$.

Матрицу DWT-Уолша U_ν определим как матрицу, в которой строки упорядочены по числу перемен знака.

Пусть матрица R есть перестановочная матрица с единицами на побочной диагонали, у которой все остальные элементы 0. С помощью этой матрицы легко задать перестановку строк произвольной матрицы C в обратном порядке $C_{\text{rev}} = R \cdot C$ (реверс строк) и перестановку столбцов в обратном порядке $C^{\text{rev}} = C \cdot R$ (реверс столбцов). В [3] предложена нумерация матриц DWT по аналогии с (1.2):

$$B_\nu = \begin{bmatrix} B_{\nu-1} & RB_{\nu-1} \\ B_{\nu-1}R & -RB_{\nu-1}R \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Перечисленные матрицы DWT: H_ν, W_ν, U_ν, B_ν — принадлежат также классу нормализованных матриц Адамара, которым посвящена глава 14 в книге [6]. Все эти матрицы, а также и другие матрицы этого класса, получаются перестановкой строк матрицы W_ν, не затрагивающей начальной строки. Этим методом кроме матриц H_2, W_2, U_2, B_2 можно построить ещё две матрицы DWT уровня 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

В отличии от матриц H_2, W_2, U_2, B_2 матрицы (2) несимметричные. Но матрицы (2) связаны друг с другом операцией транспонирования, поэтому и столбцы этих матриц тоже суть векторы дфу.

4°. Для матриц DWT более высокого уровня метод построения новых матриц DWT перестановкой строк нормализованной матрицы Адамара H_ν нельзя считать удачным.

ПРИМЕР 2. Если переставить местами две последние строки любой из матриц H_3, W_3, U_3, B_3, то не все столбцы преобразованной матрицы являются векторами дфу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть V есть матрица, полученная перестановкой строк матрицы DWT уровня s. Тогда*

$$V^T \cdot V = V \cdot V^T = 2^s\, E^{(s)},$$

где E — единичная матрица второго порядка, $E^{(s)}$ — её кронекерова степень, а потому есть единичная матрица порядка 2^s.

Доказательство. Так как столбцы транспонированной матрицы совпадают со строками исходной, то согласно ортогональности векторов дфу, установленной в предложении 2 доклада [1], приходим к утверждению $V \cdot V^T = 2^s\, E^{(s)}$. Учитывая совпадающий порядок трёх матриц, выводим $V^T \cdot V = V \cdot V^T$. □

Принцип цифровой обработки сигнала (ЦОС) на примере дискретного преобразования Уолша произвольной нумерации следующий. Исходный дискретный сигнал x длины $N = 2^s$ преобразуем в сигнал $y = Vx$ и передаем его по каналу связи. Получатель точно восстанавливает исходный сигнал по формуле $x = \frac{1}{N} V^T y$.

Для того чтобы вычисления при реализации *оператора синтеза* V и *оператора анализа* V^T осуществлялись в классе дискретных функций Уолша, введём следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовём W-матрицей такую матрицу, все строки и столбцы которой есть различные векторы дфу.

В книге [7] была поставлена задача описания класса возможных дискретных преобразований Уолша, решением которой служат W-матрицы. Ранее считалось [7], что удобным для ЦОС оператором дискретного преобразования Уолша является оператор с симметричной матрицей DWT. Поэтому в [7] решается (параграф 2.8), но к сожалению неверно, задача вычисления количества симметричных матриц дискретных преобразований Уолша. Ошибка была вызвана, в частности, тем, что не было выработано правильное определение множества матриц дискретных преобразований Уолша.

Пример 2 показывает, что не все перестановки строк матрицы DWT приводят к W-матрице. Будем считать, что лишь W-матрицы задают оператор дискретного преобразования Уолша произвольной нумерации.

5°. Сформулируем принцип построения W-матриц, который эквивалентен предложенному в статье [8], но по-другому изложен.

ЛЕММА 1. *Произвольный вектор дфу уровня s однозначно определяется своими координатами с номерами, указанными в выборке $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$.*

Доказательство. Как отмечено в [4], кронекерово произведение ассоциативно. Поэтому любой вектор дфу $w\{s\} = (a_0\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{N-1})$ представляется в виде $w\{s\} = u\{k\} \otimes v\{s-k\}$, отделением первых k сомножителей от последних $s-k$. (Применяем обозначения w, u, v для векторов дфу без уточнения их вида.) Опираемся на то, что первая координата любого вектора дфу равна 1.

Если $s-k=1$, то $w\{s\} = u\{s-1\} \otimes S$, и в этом случае $a_1 = 1$; или же $w\{s\} = u\{s-1\} \otimes A$ и в этом случае $a_1 = -1$.

Имеем $w\{s\} = u\{s-j-1\} \otimes S \otimes v\{j\}$ или $w\{s\} = u\{s-j-1\} \otimes A \otimes v\{j\}$ в общем случае. Первые 2^{j+1} координат представляют вектор $S \otimes v\{j\}$ или $A \otimes v\{j\}$ соответственно. В первом варианте $a_{2^j} = 1$, а во втором варианте $a_{2^j} = -1$. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *В результате перекодировки по правилу* $1 \to 0$, $-1 \to 1$ *координат подвектора, выделенного выборкой* $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$ *из вектора дфу* $w\{s\}$, *получаем двоичный код номера этого вектора дфу* $w\{s\}$ *в нумерации Пэли.*

Доказательство. Вектор $(a_{2^{s-1}} \ldots a_4\ \ a_2\ \ a_1)$ из записи вектора дфу по определению 1 получается заменой $S \to 1$, $A \to -1$ и удалением разделительных значков $\otimes$. Для получения подвектора $(a_1\ a_2\ a_4 \ldots a_{2^{s-1}})$ вектора дфу дополнительно применяем операцию обращения координат (reverse). Сравнивая с предложениями 1 и 2, получаем следствие 1. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём кодирующей матрицей для W-матрицы её подматрицу K, строчки и столбцы которой выделены выборкой $\{1, 2, \ldots, 2^{s-1}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Каждая* W*-матрица однозначно опредеяется своей кодирующей матрицей.*

Доказательство. Восстановим все строчки предложенной W-матрицы V с номерами, указанными в выборке $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$.

По j-й строке ($j \in 0 : s-1$) кодирующей матрицы K согласно лемме 1 восстанавливается строка с номером 2^j матрицы V перекодировкой $1 \to S$, $-1 \to A$ и расстановкой разделительных значков $\otimes$. Далее вычисляем кратное кронекерово произведение.

В результате этого окажутся вычисленными координаты с номерами $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$ всех столбцов матрицы V. Повторяем метод восстановления, применённый для строк с номерами $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$, для всех столбцов матрицы V. □

Итак, в строках кодирующей матрицы K указаны закодированные (раскодировка $1 \to 0$, $-1 \to 1$) номера в нумерации Пэли *образующих строк* W-матрицы.

Аналогично, в столбцах кодирующей матрицы K указаны закодированные номера *образующих столбцов* W-матрицы.

ПРИМЕР 3. Четыре строки примера 1 в указанном порядке составляют матрицу W_2. Кодирующей для неё служит средняя часть (матрица второго порядка), у которой на главной диагонали стоят 1, а на побочной стоят -1. После перекодировки получим булеву матрицу с единицами только на побочной диагонали, в которой записаны номера в последовательности 1,2 (сверху вниз и слева направо в двоичной системе счисления). Поэтому *код матрицы* W_2 есть (1 2), что обозначим $W_2 \sim (1\ 2)$.

Аналогично получаем $H_2 \sim (2\ 1)$, $U_2 \sim (1\ 3)$, $B_2 \sim (3\ 2)$.

6°. Рассмотрим симметричные W-матрицы V. Легко устанавливается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *W-матрица симметрична тогда и только тогда, когда симметрична её кодирующая матрица.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Собственными числами симметричной W-матрицы уровня s являются $\lambda_1 = \sqrt{N}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{N}$, где $N = 2^s$.*

Собственными векторами, отвечающими числу λ_1, являются все столбцы матрицы $(V+\sqrt{N}E^{(s)})$, а собственными векторами, отвечающими числу λ_2, являются все столбцы матрицы $(V - \sqrt{N}E^{(s)})$.

Доказательство. По предложению 3 имеем $V^2 = N\,E^{(s)}$, что перепишем в виде

$$(V - \sqrt{N}E^{(s)})(V + \sqrt{N}E^{(s)}) = 0. \tag{3}$$

□

ТЕОРЕМА 1. *Размерность собственных подпространств R_+ (отвечает собственному числу $\lambda_1 > 0$) и R_- (отвечает собственному числу λ_2) W-матрицы V уровня s совпадает и равна $\frac{N}{2}$, если на главной диагонали её кодирующей матрицы K встречается -1.*

Если же все элементы главной диагонали кодирующей матрицы K есть 1, то $\dim R_+ = \frac{1}{2}(N + \sqrt{N})$, $\dim R_- = \frac{1}{2}(N - \sqrt{N})$.

Доказательство теоремы приведено в [8]. Частный случай для традиционных нумераций установил Буа [9]: в случае нумераций Адамара и Уолша, а также в случае нечётного уровня для нумерации Пэли, $\dim R_+ = \dim R_-$; для матрицы DWT в нумерации Пэли чётного уровня $\dim R_+ = \frac{1}{2}(N + \sqrt{N})$, $\dim R_- = \frac{1}{2}(N - \sqrt{N})$.

В пункте 10 будет приведена другая форма записи сомножителей формулы (3), приводящая к проекторам на собственные подпространства.

7°. Интерес представляют не просто собственные векторы, а базисы собственных подпространств R_+ и R_-.

ТЕОРЕМА 2. *Если в качестве матрицы V возьмём H_s или B_s, то начальные $\frac{N}{2} = 2^{s-1}$ столбцов матриц $(V+\sqrt{N}E^{(s)})$ и $(V-\sqrt{N}E^{(s)})$ образуют базис пространства, состоящий из собственных векторов.*

Доказательство. Рассмотрим случай нумерации Адамара. Воспользовавшись представлением матрицы H_s по формуле (1.2), представим

$$H_s - \lambda\, E^{(s)} = \begin{bmatrix} H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)} & H_{s-1} \\ H_{s-1} & -H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)} \end{bmatrix},$$

где в качестве λ берём $\lambda_1 = \sqrt{N}$ или $\lambda_2 = -\sqrt{N}$.

Вычислим обратную матрицу к начальному блоку. Заметим, что

$$(H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)})(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)}) = H_{s-1}^2 - \lambda^2\, E^{(s-1)} = (2^{s-1} - 2^s)E^{(s-1)}.$$

Значит,

$$(H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)})^{-1} = -2^{1-s}(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)}).$$

Представлением Шура для отдельного блока блочной матрицы $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ называется $S = D - CA^{-1}B$. В [10, с. 61] отмечено, что блок A служит базисным минором блочной матрицы тогда и только тогда, когда $S = 0$.

В нашем случае

$$CA^{-1}B = H_{s-1}\big(-2^{1-s}(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)})\big)H_{s-1} = -(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)}).$$

Значит $\frac{N}{2}$ столбцов левой половины матрицы $H_s - \lambda\, E^{(s)}$ составляют базис пространства R_+ или R_- соответственно.

Для случая нумерации, предложенной Беспаловым [3], доказательство аналогично (опирается на формулу (1) вместо формулы (1.2)). Оно приведено в [8]. □

В случае нумераций Пэли и Уолша базисные столбцы по-другому располагаются в матрицах $(V+\sqrt{N}E^{(s)})$ и $(V-\sqrt{N}E^{(s)})$. Даже формулировка результата в этих случаях довольно громоздкая. Базисы из собственных векторов можно выделить, применяя представление Шура, что и продемонстрировано в статье [11]. Например, для матрицы DWT-Пэли чётного уровня $s = 2m$ столбцы матриц сомножителей формулы (3) разобьём на 2^m последовательных групп по 2^m столбцов в группе. Из каждой очередной группы в базис включаем на один столбец меньше, чем из предыдущей группы. Для матрицы $W + \sqrt{N}E$ начинаем с выбора всех столбцов группы, а для $W - \sqrt{N}E$

начинаем с выбора всех столбцов без последнего. Внутри группы организуется реверсный порядок столбцов.

В случае нечётного s избавиться от радикалов в записи собственных векторов нельзя, а потому этот случай менее интересен для практики.

8°. Изучим наиболее интересный случай нумерации Пэли чётного уровня.

Термин "уровень s" для векторов длины 2^s перенесём с векторов дфу на другие векторы. В частности, будем применять обозначение $e_k\{s\}$ для k-го вектора стандартного базиса (одна единица в качестве k-й координаты, остальные нули) пространства $\mathbb{R}^N$, где $N = 2^s$, $k \in 0 : N-1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Ортогональный базис пространства* $\mathbb{R}^N$ *при* $N = 2^s$, *где* s *чётное,* $s = 2m$, *составляет система векторов*

$$\big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\}\big\}_{k,l=0}^{2^m-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Система векторов $\{e_k\{m\}\}_{k=0}^{2^m-1}$ составляет ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{N_1}$, где $N_1 = 2^m$. По предложению 2 из [1] система векторов $\{w_l\{m\}\}_{l=0}^{2^m-1}$ составляет ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^{N_1}$. Для векторов фиксированной длины скалярное произведение кронекеровых произведений равно произведению скалярных произведений

$$\langle u \otimes v, w \otimes t\rangle = \langle u, w\rangle \cdot \langle v, t\rangle, \tag{5}$$

что и доказывает предложение. □

В случае чётного уровня $s = 2m$ *дискретное преобразование Уолша* вектора $x \in \mathbb{R}^N$ (в виде столбца) и формулу (1.13) его обращения можно записать в симметричном виде без радикалов:

$$X = \frac{1}{N_1} W_s \cdot x, \qquad x = \frac{1}{N_1} W_s \cdot X.$$

В этом виде матрица $\frac{1}{N_1} W_s$ относится к классу *унитарных матриц*, которые в действительном случае (как у нас) называют *ортогональными матрицами*.

Векторы базиса (4) будем считать записанными в виде столбцов, чтобы действие оператора выражалось в виде обычного произведения матриц (как и в выносных формулах выше).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Ортогональное дискретное преобразоввание Уолша в нумерации Пэли уровня* $s = 2m$ *преобразует векторы базиса* (4) *по правилу*

$$\frac{1}{N_1} W_s\Big(e_k\{m\} \otimes w_l\{m\}\Big) = e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу W_s порядка N_1^2 в виде блочной квадратной матрицы порядка N_1 с квадратными блоками порядка N_1. Строка с номером $r = lN_1 + k$, где $k, l \in 0 : N_1 - 1$, согласно предложению 2 имеет вид

$$w_r\{s\} = w_k\{m\} \otimes w_l\{m\}$$

и располагается в l-й блочной строке блочной матрицы под k-м номером в блоке. Будем применять оператор W_s к столбцу $e_{k_1}\{m\} \otimes w_{l_1}\{m\}$ построчно, вычисляя координаты (спектральные характеристики) сигнала на выходе. На основании формулы (5)

$$\langle w_k\{m\} \otimes w_l\{m\}, e_{k_1}\{m\} \otimes w_{l_1}\{m\}\rangle = \langle w_k\{m\}, e_{k_1}\{m\}\rangle \cdot \langle w_l\{m\}, w_{l_1}\{m\}\rangle.$$

Согласно ортогональности (предложение 2 из [1]) $\langle w_l\{m\}, w_{l_1}\{m\}\rangle = 2^m$, если $l = l_1$, и $\langle w_l\{m\}, w_{l_1}\{m\}\rangle = 0$, если $l \neq l_1$. Поэтому сигнал на выходе преобразования $\frac{1}{N_1} W_s\Big(e_{k_1}\{m\} \otimes w_{l_1}\{m\}\Big)$ будет иметь вид $e_{l_1}\{m\} \otimes a\{m\}$ (только строки l_1-й блочной строки при умножении дадут ± 1).

Вид вектора $a\{m\}$ далее ищем без указания уровня m (его зафиксируем). Координаты вектора $a = (a_0\ a_1 \ldots a_{N_1-1})^T$ согласно формуле $\langle w_k\{m\}, e_{k_1}\{m\}\rangle$, вычисляются как k_1-е координаты векторов w_k (а это и есть значение k-й дискретной функции Уолша в нумерации Пэли на аргументе k_1; как следствие симметричности дискретного преобразования Уолша-Пэли, номер функции и значение аргумента можно поменять местами):

$$a_k = w_k(k_1) = w_{k_1}(k).$$

Доказали, что $a = w_{k_1}$. □

Приведено новое, отличное от данного в [8], доказательство предложения.

ТЕОРЕМА 3. *Ортогональным базисом из собственных векторов дискретного преобразования Уолша-Пэли чётного уровня $s = 2m$ является:*

$$\big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} - e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\big\}_{0 \leqslant k < l \leqslant 2^m - 1}$$

для собственного подпространства R_-;

$$\big\{e_k\{m\} \otimes w_k\{m\}\big\}_{k=0}^{2^m-1} \cup \big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} + e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\big\}_{0 \leqslant k < l \leqslant 2^m - 1}$$

для собственного подпространства R_+.

Доказательство. Все векторы базиса (4) имеют одинаковую норму. Поэтому замена любых двух из них на сумму и разность сохраняет свойство базисности. По предложению 8 проверяем, что полученные векторы будут собственными, и вычисляем собственные числа:

$$W_s\Big(e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} \pm e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\Big) = \lambda_1(e_l\{m\} \otimes w_k\{m\} \pm e_k\{m\} \otimes w_l\{m\}).$$

□

9°. Получим принцип выделения собственных подпространств дискретных преобразований Уолша произвольной нумерации.

ТЕОРЕМА 4 (о спектральном разложении оператора). *Для унитарного* ($J^{-1} = J^*$) *периодического* ($J^m = Id$) *оператора* $J : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ (*или в другом евклидовом пространстве*) *ортопроекторы на собственные подпространства* R_k, *где* $k \in 0 : m-1$, *вычисляются по формуле дискретного преобразования Фурье* (*ДПФ*) *от степеней оператора*

$$Q_k = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{kl}\, J^l, \qquad \text{где } \omega_m = \exp\Big(\frac{2\pi i}{m}\Big). \tag{6}$$

Посредством обратного ДПФ восстанавливаются степени оператора

$$J^l = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{-kl}\, Q_k. \tag{7}$$

Доказательство. Проверим ортогональность операторов (6) (при обозначении $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{m})$). Суммируя по диагоналям квадрата, получаем

$$Q_k\, Q_r = \frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1} \omega^{kl}\, J^l \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{jr}\, J^j = \frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} \omega^{kl+jr}\, J^{l+j} =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{s} \omega^{sr+kj-jr} J^s + \sum_{t=m}^{2m-2}\ \sum_{j=t-m+1}^{m-1} \omega^{rt+kj-jr} J^t\Big) =$$

$$(\text{замена } \ t-m=s) \qquad = \frac{1}{m^2}\sum_{s=0}^{m-1} \omega^{sr} J^s \Big(\sum_{j=0}^{s} \omega^{(k-r)j} + \sum_{j=s+1}^{m-1} \omega^{(k-r)j}\Big).$$

Выражение в последних скобках равно 0, если $k \neq r$ (полагаем $k, r \in 0 : m-1$), и равно m, если $k = r$.

Итак, доказали *идемпотентность* операторов $Q_k^2 = \frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1} \omega^{ks} J^s = Q_k$ и их взаимную ортогональность $Q_k\, Q_r = 0$, если $k \neq r$.

Операция сопряжения K^* оператора K для матрицы оператора есть транспонирование плюс комплексное сопряжение. С помощью соотношений $\omega^m = 1$, $J^m = E = J^0$ (в терминах матриц), домножив на $\omega^{ml} J^m$ соответствующие слагаемые, проверим самосопряженность операторов

$$Q_k{}^* = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{-kl} (J^*)^l = \frac{1}{m}(\omega^{mk} J^m + \sum_{l=1}^{m-1} \omega_m^{(m-k)l} J^{(m-l)}) = Q_k.$$

В книге [12] доказано, что идемпотентный самосопряженный оператор является ортопроектором. Проверим, что проектирование осуществляется на собственное подпространство $R_k = \mathrm{Im}(Q_k)$, и вычислим собственные числа:

$$JQ_k = Q_k J = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\omega_m^{kl}J^{l+1} = \omega_m^{-k}\cdot\frac{1}{m}(J^0 + \sum_{s=1}^{m-1}\omega_m^{ks}J^s) = \omega_m^{-k}\cdot Q_k.$$

Так как формула (6) есть формула ДПФ, то восстановление производится по формуле (7) обратного к (6) ДПФ. □

Проверим свойство симметрии для ортопроекторов

$$\overline{Q_k} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\omega_m^{-kl}J^l = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\omega_m^{k(m-l)}J^l = Q_{m-k}. \tag{8}$$

Формула (7) содержит (при $l = 0$) сокращенное *разложение единицы* и (при $l = 1$) *спектральное разложение оператора.*

10°. В результате нормировки (деление на λ_1) любой оператор дискретного преобразования Уолша с симметричной матрицей (к этому классу относятся операторы DWT четырёх рассмотренных нумераций) превращается в оператор *инволюции* — унитарный действительный оператор периода 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для ортогонального симметричного дискретного преобразования Уолша любой нумерации с ортогональной матрицей $J = \frac{1}{\lambda_1}V_s$ проекторы на собственные подпространства R_+ и R_-, отвечающие собственным числам ± 1, имеют вид $Q_+ = \frac{1}{2}(E + J)$ и $Q_- = \frac{1}{2}(E - J)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Квадрат любой ортогональной (действительной унитарной) несимметричной W-матрицы есть перестановочная матрица.*

Доказательство. Требование ортогональности означает нормировку матрицы DWT, то есть деление её на $\lambda_1 = \sqrt{N}$, $N = 2^s$.

Согласно определению W-матриц и предложению 2 из [1] каждая строка ортогональна какому-то одному столбцу, что и доказывает предложение. □

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любая ортогональная несимметричная W-матрица есть периодическая с чётным $m = 2n$ показателем периода и для неё верна теорема 4. Все нечётные степени этой матрицы есть ортогональные W-матрицы.*

ПРИМЕР 4. Для W-матриц четвёртого порядка ортогональные матрицы $\frac{1}{2}H_2$, $\frac{1}{2}W_2$, $\frac{1}{2}U_2$, $\frac{1}{2}B_2$ имеют спектральное разложение на проекторы согласно следствию 2. Базисы собственных подпространств находим по теоремам 2 и 3.

Пронормируем (поделим на 2) первую из матриц формулы (2), код строк которой (2 3). Если вычислим поочерёдно её степени J^2, J^3, J^4, J^5, $J^6 = E$, то найдем её период 6. При этом увидим, что $J^3 = \frac{1}{2}W_2$, а J^5 есть нормированная правая матрица формулы (2) с кодом строк (3 1).

Проведём вычисление по формулам (6). Заметим, что $Q_0 = \frac{1}{6}(E + J + J^2 + J^3 + J^4 + J^5)$ и $Q_3 = \frac{1}{6}(E - J + J^2 - J^3 + J^4 - J^5)$ есть одномерные действительные проекторы, $Q_2 = \overline{Q_4}$ (см. (8)) есть одномерные комплексные, а $Q_1 = Q_5 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312`)

2. Paley R. E. A. C. *A Remarkable Series of Orthogonal Functions.* I, II // Proc. Lond. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.

3. Беспалов М. С. *Новая нумерация матриц Уолша* // Проблемы передачи инф. 2009. Т. 45. Вып. 4. С. 43–53.

4. Математическая энциклопедия. Т. 5. М., 1984.

5. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* М.: Наука, 1987.

6. Холл М. *Комбинаторика.* М.: Мир, 1970.

7. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975.

8. Беспалов М. С. *Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша* // Проблемы передачи инф. 2010. Т. 46. Вып. 3. С. 60–79.

9. Bois P. *Determination des valeurs propres des matrices de Walsh, Hadamard et Walsh-Fourier* // Rev. CETHEDEC. 1973. V. 37. P. 65–71.

10. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1966.

11. Беспалов М. С. *Алгоритмы вычислений, основанные на представлении Шура* // Современная математика и её приложения. Труды межд. конф. по дифф. уравнениям и динамич. системам. 2006. Т. 38. Ч. 3. Ин-т матем. АН Грузии, Тбилиси. С. 28–36.

12. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1966.

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ И ОРТОПРОЕКТОРЫ

М. С. Беспалов

21 октября 2011 г.

Жёстким фреймам посвящён цикл избранных докладов данного семинара в 2006–2009 г., которые подготовили Малозёмов В. Н., Певный А. Б., Соловьева Н. А., Истомина М. Н. и Сабаев А. Н. В эти же годы в обиход вошёл термин “фрейм Парсеваля” для наиболее простого случая жёсткого фрейма. Любой жёсткий фрейм нормировкой (умножением всех элементов фрейма на одно число) переводится во фрейм Парсеваля. Поэтому свойства и принципы построения жёстких фреймов и их частных случаев (в виде системы типа Мерседес-Бенц) удобнее формулировать в терминах фреймов Парсеваля.

В докладе рассмотрим свойства фреймов Парсеваля в конечномерном евклидовом пространстве. Эти свойства с отдельными изменениями можно перенести в гильбертово пространство.

1°. Три эквивалентных способа определения жёсткого фрейма в $\mathbb{R}^n$ приведены в докладе [1]. Изучим общий случай фрейма Парсеваля, рассматривая в качестве H пространство $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Обозначим Λ одно из множеств $\{1, 2, \dots, m\}$ или $\mathbb{N}$, чтобы учесть и вариант фрейма бесконечного объема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Фреймом Парсеваля в H* называется набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из H такой, что для любого $x \in H$ выполняется равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\Lambda} |\langle x, \varphi_k\rangle|^2. \tag{1}$$

В основном случае $\Lambda = \{1, 2, \dots, m\}$ имеем фрейм Парсеваля *объёма m*. В книге [2] фрейм Парсеваля назван *ортоподобной системой*.

ПРИМЕР 1. Следующий бесконечный набор векторов составляет фрейм Парсеваля в двумерном пространстве

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 3/4 \end{pmatrix},\ \varphi_4 = \frac{1}{2}\,\varphi_3, \dots, \varphi_k = \frac{1}{2}\,\varphi_{k-1}, \dots.$$

Действительно, для произвольного $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ коэффициенты разложения равны

$$c_1 = -\frac{a}{2},\ c_2 = \frac{3}{4}a - \frac{b}{2},\ c_3 = \frac{3}{8}(a+2b),\ c_4 = \frac{1}{2}c_3, \ldots, c_k = \frac{1}{2}c_{k-1}, \ldots.$$

Вычислим сумму их квадратов:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16} - \frac{3}{4}ab + \frac{b^2}{4} + (a^2 + 4ab + 4b^2)\,\frac{9}{64}\big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\big) = a^2 + b^2 = |x|^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из H составляет фрейм Парсеваля в H тогда и только тогда, когда для любого $x \in H$ справедливо*

$$x = \sum_{k\in\Lambda} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k. \tag{2}$$

Доказательство для более общего случая гильбертова пространства приведено в книге [2, с. 74], а для $\mathbb{R}^n$ в [1], где также дано доказательство предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если набор векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ линейно независим и составляет фрейм Парсеваля в H, то Φ — ортонормированный базис H.*

Доказательство. Линейная независимость гарантирует единственность представления (2): $x = \sum_{k\in\Lambda} c_k\varphi_k$. Подставляя в (2) по очереди все элементы фрейма Φ, проверяем ортонормированность. □

Обозначим через: Φ матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ в случае $|\Lambda| = m$ или со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ в случае $\Lambda = \mathbb{N}$; Φ^* сопряжённую к ней матрицу, которая получается применением транспонирования матрицы и комплексного сопряжения всех элементов; I_n единичную матрицу порядка n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из $\mathbb{R}^n$ составляет фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда*

$$\Phi\Phi^* = I_n. \tag{3}$$

Возможен случай, когда столбцы $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из $\mathbb{R}^s$ лежат и составляют фрейм Парсеваля только в n-мерном подпространстве H ($n < s$). Тогда $\Phi\Phi^*$ есть матрица ортопроектора на это подпространство H (см. пример 5).

2°. Основным методом построения фреймов Парсеваля можно считать метод ортогонального проектирования.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $\{f_k\}_{k\in\Lambda}$ — ортонормированный базис в евклидовом (конечномерном или бесконечномерном) пространстве H_1, а $P : H_1 \to H$ ортогональный проектор на его подпространство H, то система $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$, где $\varphi_k = Pf_k$, есть фрейм Парсеваля в H.*

Доказательство. Для любого $x \in H_1$ справедливо равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\Lambda} |\langle x, f_k\rangle|^2.$$

Если же взять $x \in H$, то по свойству ортогональности проектирования $f_k - \varphi_k \in H^\perp$ и

$$\langle x, f_k\rangle = \langle x, \varphi_k\rangle + \langle x, f_k - \varphi_k\rangle = \langle x, \varphi_k\rangle,$$

а равенство Парсеваля превращается в (1). □

В статье [3] следующее обратное утверждение сформулировано для жёсткого фрейма со ссылкой на теорему Наймарка [4, гл. IX]. Более общая формулировка принципа проектирования доказана в статье [5].

ТЕОРЕМА 1. *Для любого фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ в H существует объемлющее пространство $H_1 \supset H$ с ортонормированным базисом $\{f_k\}_{k\in\Lambda}$, который при ортогональном проектировании на H переходит в Φ.*

Доказательство этой теоремы в пространстве с базисом дано в [6], а аналогичного утверждения для базисов Рисса приведено в книге [2, с. 76].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Длины всех векторов фрейма Парсеваля находятся в пределах от* 0 *до* 1.

ПРИМЕР 2. В теореме 1 фразу *для любого фрейма Парсеваля* нельзя заменить (ср. с [3]) на фразу *для любого жёсткого фрейма*, что подтверждается известным примером системы Мерседес-Бенц [7, с. 100]:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как у любого (ненулевого), не являющегося собственным для ортопроектора, вектора при проектировании уменьшается его длина, то данные векторы не могут быть ортопроекцией ортонормированного базиса.

Данный жёсткий фрейм становится фреймом Парсеваля после нормировки в виде умножения всех элементов на $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3°. Формально ортонормированный базис является тоже фреймом Парсеваля. При добавлении нулевых элементов фрейм Парсеваля переходит во фрейм Парсеваля, но большего объема. Эти случаи считаем неинтересными и называем вырожденными фреймами Парсеваля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Вырожденным* назовём такой фрейм Парсеваля, который содержит векторы нулевой или единичной длины.

Любой *невырожденный фрейм Парсеваля* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) характеризуется тем, что $0 < |\varphi_k| < 1$ для всех k и фрейм избыточен: $m > n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Ко-рангом* фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в пространстве размерности n назовём величину $\mathrm{cr}(\Phi) = m - n$.

Поэтому, ортонормированный базис служит фреймом Парсеваля нулевого ко-ранга. Любой невырожденный фрейм Парсеваля имеет положительный ко-ранг. Ко-ранг равен бесконечности, если во фрейме Парсеваля счётное число векторов. Невырожденный фрейм Парсеваля называют избыточной системой и вместо термина "ко-ранг" часто употребляют [8] термин "избыточность".

Замечание 1.1. Обращаем внимание на то, что ко-ранг вычисляется не по отношению к размерности пространства, в котором заданы векторы, а по отношению к РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРОМ ДЕЙСТВУЕТ ФРЕЙМ.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Любой конечный набор векторов $\{\varphi_k\}$ составляет фрейм в линейной оболочке $\mathrm{span}\{\varphi_k\}$, но не в объемлющем пространстве.

Это есть простой частный случай первой по порядку теоремы из книги [2], в которой говорится, что *система Рисса является базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки.* Приведём общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ евклидова пространства H_1 составляет *фрейм Парсеваля в* $H \subset H_1$, где в качестве H берём $\overline{\mathrm{span}\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}}$, если для любого $x \in H$ выполняется условие (1) (или эквивалентное ему (2)).

В докладе в качестве H берём конечномерное пространство, поэтому необходимость переходить к замыканию линейной оболочки отпадает. Формально фрейм Парсеваля в H можно было бы трактовать как фрейм Парсеваля в любом подпространстве H, что влекло бы некорректность определения ко-ранга.

ПРИМЕР 3. Столбцы матрицы

$$\Phi = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

образуют фрейм Парсеваля в двумерном подпространстве, ортогональном одномерному подпространству, образованному вектором $f = (1\ 1\ 1)^T$.

Более того, это и есть нормированный фрейм Мерседес-Бенц из примера 2.

4°. Метод проектирования просто реализуется при построении новых фреймов Парсеваля. Если из произвольной унитарной ($U^{-1} = U^*$) матрицы U удалим несколько строк, то столбцы оставшейся матрицы Φ составят фрейм Парсеваля. Столбцы удалённой матрицы Ψ тоже составляют фрейм Парсеваля, который называется [6] *дополнительным* к фрейму Φ. Отметим, что фрейм рассматриваем как упорядоченный набор элементов.

Применением принципа проектирования получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если фрейм Парсеваля невырожденный, то и его дополнительный фрейм Парсеваля тоже невырожденный.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Столбцы матриц Φ и Ψ составляют пару взаимно дополнительных фреймов Парсеваля объёма m в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{m-n}$ соответственно тогда и только тогда, когда*

$$\Phi\Phi^* = I_n, \quad \Psi\Psi^* = I_{m-n}, \quad \Phi\Psi^* = 0 \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Если Φ и Ψ дополнительные фреймы Парсеваля, то по определению блочная матрица $\begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix}$ унитарна. То есть

$$I_m = \begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix} \cdot (\Phi \quad \Psi)^* = \begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix} \cdot (\Phi^* \quad \Psi^*) = \begin{pmatrix} \Phi\Phi^* & \Phi\Psi^* \\ \Psi\Phi^* & \Psi\Psi^* \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает (5) и $\Psi\Phi^* = 0$.
Достаточность. Равенство $\Phi\Psi^* = 0$ влечёт $\Psi\Phi^* = 0$. Столбцы матриц Φ и Ψ являются фреймами Парсеваля согласно предложению 2. Аналогично проверяем унитарность блочной матрицы $\begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix}$. □

ПРИМЕР 4. Столбцы любой из двух матриц

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

образуют фрейм Парсеваля в трёхмерном пространстве (Φ_2 в $\mathbb{C}^3$). Дополнительный фрейм Парсеваля к каждому из этих фреймов состоит из четырёх одинаковых элементов (1/2) одномерного пространства.

Элементы фрейма не обязаны быть векторами, заданными в координатах. Конечномерное пространство H может, например, возникнуть как подпространство ступенчатых функций в пространстве L^2. Но и в координатах возможно представление $\mathbf{H}$ в виде $\mathbb{R}^s$ с условием $s > m$ (см. пример 5). Отметим, что в примере 1 дополнительный фрейм Парсеваля действует в l^2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для невырожденного фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ в $H \subset \mathbf{H}$ *дополнительным* называется такой невырожденный фрейм Парсеваля $\Psi = \{\psi_k\}_{k\in\Lambda}$ в некотором $H_1 \subset \mathbf{H}$, что $\Phi + \Psi = \{\varphi_k + \psi_k\}_{k\in\Lambda}$ есть ортонормированный базис в $H \oplus H_1 \subset \mathbf{H}$, где $H_1 \perp H$.

5°. Исчерпывающую характеристику о внутреннем устройстве фрейма Парсеваля дает *матрица Грама.* Матрицей Грама G набора векторов $\{\varphi_k\}$ служит [4, с. 25] матрица скалярных произведений $\langle\varphi_k, \varphi_l\rangle$. В координатном пространстве имеем

$$G = \Phi^* \cdot \Phi \tag{6}$$

На главной диагонали матрицы Грама квадраты длин векторов (норм элементов). Поэтому, если каждую строку и каждый столбец матрицы Грама поделим на длину соответствующего элемента, то получим матрицу косинусов углов между элементами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Фреймы Парсеваля с одинаковыми матрицами Грама назовём *изоморфными.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Матрица Грама фрейма Парсеваля* ***идемпотентна*** *(то есть $G^2 = G$) и* ***эрмитова*** *(то есть $G^* = G$).*

Доказательство. Если столбцы Φ из $\mathbb{R}^n$, то по формуле (3) трактуем Id как I_n. Если же столбцы Φ из $\mathbb{R}^s$ $(s > n)$, то $\Phi\Phi^*$ (как вытекает из доказательства в [1]) тождественный оператор по отношению к столбцам Φ:

$$G^2 = \Phi^*\Phi \cdot \Phi^*\Phi = \Phi^* Id(\Phi) = \Phi^*\Phi = G.$$

По правилу сопряжения произведения $G^* = (\Phi^* \cdot \Phi)^* = \Phi^*\Phi = G$. □

СЛЕДСТВИЕ 3. *Столбцы матрицы Грама фрейма Парсеваля составляют фрейм Парсеваля изоморфный исходному.*

В (4) приведена матрица Грама нормированного фрейма Мерседес-Бенц.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. [4, с. 111] Оператор с матрицей P является ортопроектором тогда и только тогда, когда он идемпотентный и эрмитов.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Матрица Грама G фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}$ задает ортопроектор на $H = \mathrm{span}\{\varphi_k\}$.*

Матрица ортопроектора есть матрица Грама некого фрейма Парсеваля.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если Ψ есть дополнительный фрейм Парсеваля к невырожденному фрейму Парсеваля Φ на H объёма m с матрицей Грама G, то матрица Грама для Ψ есть ортопроектор $I_m - G$ на $H^\perp$, где $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^m$.*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Для оператора с матрицей Грама G от фрейма Парсеваля: столбцы матриц Φ^* и G являются собственными векторами, отвечающими собственному числу* 1, *а столбцы матриц Ψ^* и $I_m - G$ являются собственными векторами, отвечающими собственному числу* 0.

Матрица Грама фрейма Парсеваля является неотрицательно определённой.

6°. В книге [9] приводится *разложение единицы* — разложение тождественного оператора на сумму одномерных ортопроекторов, что в матричной записи соответствует разложению единичной матрицы на сумму матриц одномерных ортопроекторов. Если в пространстве есть ортонормированный базис в виде столбцов $\{f_k\}_{k\in\Lambda}$, то одномерные ортопроекторы вычисляются через векторы базиса как произведение матриц (матрица-столбец на матрицу-строку):

$$I = \sum_{k\in\Lambda} P_k = \sum_{k\in\Lambda} f_k \cdot f_k^*.$$

Существует процедура разложения произвольного ортопроектора P на сумму одномерных. Одномерные проекторы потому называются ортогональными, что

$$P_k \cdot P_j = P_j \cdot P_k = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Евклидовой нормой* матрицы A размера $n \times m$ называется [10, с. 353]

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} |a_{ij}|^2}.$$

В других книгах для неё применяют названия *норма Фробениуса*, или *Гильберта-Шмидта*, или *Шура*.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого фрейма Парсеваля в H с матрицей Грама G выполнено (а если элементы фрейма представлены в координатном пространстве столбцами матрицы Φ, то верны и последние два равенства цепочки)*

$$\dim H = \operatorname{rank} G = \|G\|_E^2 = \operatorname{Tr} G = \operatorname{rank} \Phi = \|\Phi\|_E^2.$$

Если исходный фрейм невырожденный и конечного объёма m, а в столбцах матрцы Ψ указан его дополнительный фрейм Парсеваля в некотором H_1, то

$$\operatorname{cr}(\Phi) = \dim H_1 = \operatorname{rank}(I_m - G) = \|I_m - G\|_E^2 = \operatorname{Tr}(I_m - G) = \operatorname{rank} \Psi = \|\Psi\|_E^2.$$

Доказательство. Пусть $\dim H = n$. По следствию 4 имеем $\operatorname{Im} G = \dim H$. А образ оператора G равен рангу его матрицы. Произвольный ортопроектор раскладывается на сумму одномерных $G = \sum_{k=1}^{n} P_k$, след каждого из которых равен 1. Поэтому $\operatorname{Tr} G = n$. Очевидно, что $\|G\|_E^2 = \operatorname{Tr} GG^*$. По предложению 5 имеем $GG^* = G$.

Для матрицы Φ евклидову норму вычислим также, как для матрицы G: $\|\Phi\|_E^2 = \operatorname{Tr} \Phi^*\Phi$, где $\Phi^*\Phi = G$ согласно (6). Столбы матриц Φ и G изоморфные фреймы Парсеваля. Поэтому $\operatorname{rank} \Phi = \operatorname{rank} G$.

Чтобы повторить эти рассуждения для дополнительного фрейма Парсеваля, нужно на исходный фрейм наложить условие невырожденности и конечности объема. Тогда размерность пространства H_1, для которого Ψ суть фрейм Парсеваля, будет равна $m-n$, что служит ко-рангом исходного фрейма. Из разложения единицы для пространства $H \oplus H_1$ вытекает то, что матрица Грама (проектор на пространство H_1) для Ψ имеет вид $I_m - G$. □

ПРИМЕР 5. Столбцы матрицы Φ составляют нормированный фрейм Мерседес-Бенц в двумерном подпространстве с матрицей Грама (4). В качестве Ψ можно взять матрицу из четырёх одинаковых столбцов $\frac{\sqrt{2}}{6}(-1\ 0\ 2\ 1)^T$.

$$\Phi = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ -2 & -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Малоземов, А. Б. Певный. *Системы Мерседес-Бенц и жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`)

2. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. *Теория всплесков.* М.: Физматлит, 2005.

3. Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова. *Замечание об описании фреймов общего вида* // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 941–945.

4. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* // М.: Наука, 1966.

5. Т. П. Лукашенко. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 12. С. 57–72.

6. М. Н. Истомина, В. В. Максименко, А. Б. Певный. *Дополнительные жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0401`)

7. И. Добеши. *Десять лекций по вейвлетам.* М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.

8. R. Balan, P. G. Casazza, C. Heil, Z. Landau. *Deficits and Excesses of Frames* // Adv. in Comp. Math. 2003. V. 18. P. 93–116.

9. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. *Линейная алгебра.* М.: Наука, 1984.

10. Р. Хорн, Ч. Джонсон. *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.

СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТНОЕ СЖАТИЕ НА ОТРЕЗКЕ

А. А. Макаров

12 ноября 2011 г.

В работе изучается вейвлетное сжатие сплайновых пространств лагранжева типа первого порядка на отрезке (с конечной неравномерной сеткой). Выведены соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции.

1°. Сплайны, матрицы реконструкции и декомпозиции

На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X: \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha = \lim\limits_{j\to-\infty} x_j$, $\beta = \lim\limits_{j\to+\infty} x_j$ (случаи $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ не исключаются).

Будем рассматривать класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности*

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0 \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z},\ K_0 \geqslant 1,\ K_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Упорядоченное множество $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2$ будем называть *цепочкой векторов*. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются цифрами; например, $\mathbf{a}_j = ([\mathbf{a}_j]_0, [\mathbf{a}_j]_1)^T$. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Введём обозначения $M = \cup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j, x_{j+1})$, $S_j = [x_j, x_{j+2}]$, $J_k = \{k-1, k\}$, где $k, j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^2$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$.

Если цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}$ полная, то из условий

$$\begin{gathered} \sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\ \forall\, k \in \mathbb{Z}, \\ \omega_j(t) \equiv 0 \qquad \forall\, t \notin S_j \cap M, \end{gathered} \tag{2}$$

однозначно определяются функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $\operatorname{supp} \omega_j(t) \subset \subset S_j$. По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (2) находим

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *пространством минимальных* $(\mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов* первого порядка. Условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями.*

Рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^2$, задаваемые тождеством $\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $j \in \mathbb{Z}$ и определим векторы $\mathbf{a}_j^* \in \mathbb{R}^2$ формулой $\mathbf{a}_j^* = \boldsymbol{\varphi}_{j+1}$. Представим векторы $\mathbf{a}_j^*$ и $\mathbf{d}_j$ в покомпонентном виде

$$\mathbf{a}_j^* = \big([\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_0, [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1\big)^T, \quad \mathbf{d}_j = \big(-[\boldsymbol{\varphi}_j]_1, [\boldsymbol{\varphi}_j]_0\big)^T.$$

Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1(\alpha, \beta)$ и $W(t) := |\det(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}\,')(t)| \geqslant const > 0$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$, то $\omega_j \in C(\alpha, \beta)$ и справедливы формулы [1]

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^*} & \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+2}^T \mathbf{a}_j^*} & \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{3}$$

Пространство

$$\mathbb{S}(X) = \big\{ u \mid u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j\, \omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1 \big\}$$

называется *пространством минимальных* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнов первого порядка* на сетке X.

Если $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$, то справедливо тождество

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall\, t \in (\alpha, \beta),$$

при этом формулы (3) принимают вид

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{[\boldsymbol{\varphi}(t)]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_j]_1}{[\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_j]_1} & \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{[\boldsymbol{\varphi}_{j+2}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}(t)]_1}{[\boldsymbol{\varphi}_{j+2}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1} & \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

Более того, если функция $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_1$ строго монотонна на множестве M, то сплайны $\omega_j(t)$ положительны при всех $t \in (x_j, x_{j+2})$.

Рассмотрим некоторые варианты сплайнов. Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t^\lambda)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Тогда вронскиан $W(t) = \lambda t^{\lambda-1}$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$ не содержащем 0. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Будем называть эти сплайны *степенны́ми $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами* и обозначать через $\omega_{j,1}^{pow}(t)$. Из формул (3) вытекает представление (см. рис. 1)

$$\omega_{j,1}^{pow}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^\lambda - x_j^\lambda}{x_{j+1}^\lambda - x_j^\lambda}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2}^\lambda - t^\lambda}{x_{j+2}^\lambda - x_{j+1}^\lambda}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

При $\lambda = 1$ вронскиан $W(t)$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$, на котором сплайны $\omega_{j,1}^{pow}(t)$ совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени, то есть с одномерными функциями Куранта.

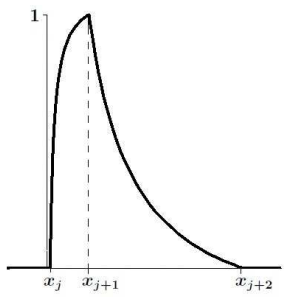


Рис. 1. Сплайн $\omega_{j,1}^{pow}$ при $\lambda = -1$.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \sin \lambda t)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Тогда вронскиан $W(t) = \lambda \cos \lambda t$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$ не содержащем точек $\frac{\pi}{2\lambda} + \frac{\pi}{\lambda}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Будем называть эти сплайны *тригонометрическими $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами* и обозначать через $\omega_{j,1}^{trig}(t)$. Из формул (3) вытекает представление (см. рис. 2)

$$\omega_{j,1}^{trig}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \lambda t - \sin \lambda x_j}{\sin \lambda x_{j+1} - \sin \lambda x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\sin \lambda x_{j+2} - \sin \lambda t}{\sin \lambda x_{j+2} - \sin \lambda x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin t, \cos t)^T$ сплайны $\omega_j(t)$ совпадают с *NUAT-B*-сплайнами [2]. При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2})^T$ сплайны $\omega_j(t)$ рассмотрены в работе [3].

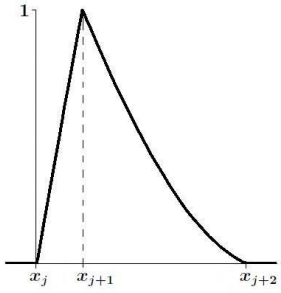


Рис. 2. Сплайн $\omega_{j,1}^{trig}$ при $\lambda = 1$.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \operatorname{sh} \lambda t)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Тогда вронскиан $W(t) = \lambda \operatorname{ch} \lambda t$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Будем называть эти сплайны *гиперболическими* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнами* и обозначать через $\omega_{j,1}^{hyp}(t)$. Из формул (3) вытекает представление (см. рис. 3)

$$\omega_{j,1}^{hyp}(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} \lambda t - \operatorname{sh} \lambda x_j}{\operatorname{sh} \lambda x_{j+1} - \operatorname{sh} \lambda x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\operatorname{sh} \lambda x_{j+2} - \operatorname{sh} \lambda t}{\operatorname{sh} \lambda x_{j+2} - \operatorname{sh} \lambda x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

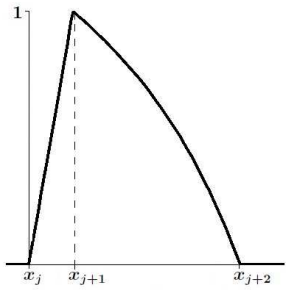


Рис. 3. Сплайн $\omega_{j,1}^{hyp}$ при $\lambda = 1$.

Рассмотрим конечномерные пространства сплайнов. Введём обозначения

$$a = x_0, \quad b = x_n, \quad J_{1,n} = \{-1, 0, \ldots, n-1, n\}.$$

Из бесконечной сетки X выделим конечную сетку $X_n, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$X_n : x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1},$$

из полной бесконечной цепочки $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{a}_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ выделим конечную цепочку $\mathbf{A}_n^* = \{\mathbf{a}_{-1}^*, \dots, \mathbf{a}_n^*\}$.

Для измеримого (по Лебегу) множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^1$ обозначим через $\operatorname{mes}(\mathcal{M})$ его лебегову меру. Пусть система $\{g_j\}$ состоит из функций $g_j(t)$, заданных почти везде на интервале (α, β), и $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Система функций $\{g_j \mid \operatorname{mes}\,(\operatorname{supp} g_j \cap (a, b)) > 0\}$ называется *сужением* системы $\{g_j\}$ на отрезок $[a, b]$.

Сузим все функции пространства $\mathbb{S}(X)$ на отрезок $[a, b]$. Совокупность этих сужений представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}(X_n) = \{u \mid u = \sum_{j\in J_{1,n-1}} c_j\,\omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\} \subset C[a, b].$$

Из исходной сетки X при фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ удалим один узел x_{k+1}, и на полученной таким образом *разреженной сетке* $\widetilde{X}$ рассмотрим сплайны $\widetilde{\omega}_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\xi = x_{k+1}$, а $\widetilde{x}_j$ — узлы вновь полученной сетки $\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$:

$$\widetilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{при } j \leqslant k, \\ x_{j+1} & \text{при } j \geqslant k+1. \end{cases} \tag{4}$$

Условимся ставить волну сверху над обозначениями всех ранее введённых объектов, определяемых новой сеткой $\widetilde{X}$. Функции $\widetilde{\omega}_j(t)$ можно построить по формуле (3), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\widetilde{x}_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [4]). *Для $j, k \in \mathbb{Z}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_i(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\,\omega_j(t) \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

где элементы $\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}$ задаются равенствами

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \textit{при } i \leqslant k-2,\ \forall j, \\ \delta_{k-1,j} & \textit{при } i = k-1,\ j \neq k, \\ \delta_{k+1,j} & \textit{при } i = k,\ j \neq k, \\ \delta_{i,j-1} & \textit{при } i \geqslant k+1,\ \forall j, \end{cases} \tag{6}$$

а также формулами

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \frac{1}{\mathbf{d}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*} \left(\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* - \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}^* \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*} \right), \tag{7}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*}. \tag{8}$$

Предполагая, что $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, удалим узел x_{k+1} из сетки X_n; в результате получим разреженную сетку

$$\widetilde{X}_n : \quad \widetilde{x}_{-1} < a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_{n-1} = b < \widetilde{x}_n,$$

где узлы $\widetilde{x}_i$, $i = -1, \ldots, n$, по-прежнему определяются формулами (4).

Введём конечномерные вектор-функции

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) = \big(\omega_{-1}(t), \omega_0(t), \ldots, \omega_{n-1}(t)\big)^T,$$
$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) = \big(\widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \ldots, \widetilde{\omega}_{n-2}(t)\big)^T.$$

Ввиду равенства (5) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $t \in [a, b]$ могут быть записаны в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) = \widetilde{\mathfrak{P}}_n \, \boldsymbol{\omega}_{(n)}(t), \tag{9}$$

где $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ — прямоугольная числовая матрица размера $n \times (n+1)$. Матрица $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей разрежающей реконструкции* на отрезке $[a, b]$, и имеет следующий вид

$$\widetilde{\mathfrak{P}}_n = \begin{array}{c} \\ -1 \\ \ldots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \ldots \\ n-2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -1 & \ldots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \ldots & n-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u \rangle$.

Рассмотрим линейные функционалы $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, заданные на пространстве $C(\alpha, \beta)$ формулой

$$\langle f_j, u \rangle = u(x_{j+1}), \quad u \in C(\alpha, \beta),\ j \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Ясно, что система линейных функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, то есть

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}, \quad \forall j, j' \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где $\delta_{j,j'}$ — символ Кронекера.

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, биортогональную системе функций $\{\widetilde{\omega}_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$. Пусть $\mathfrak{q}_{j,j'} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'}\rangle$ $\forall j, j' \in \mathbb{Z}$. Тогда (см. [4]) для $j, j', k \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \begin{cases} \delta_{j,j'} & \text{при } j' \leqslant k-1, \\ 0 & \text{при } j' = k, \\ \delta_{j,j'-1} & \text{при } j' \geqslant k+1. \end{cases} \tag{12}$$

Выделим из множества функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из $n+1$ функционала, из множества функционалов $\{\widetilde{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из n функционалов. Для систем функционалов $\{f_j\}_{j\in J_{1,n-1}}$, $\{\widetilde{f}_i\}_{i\in J_{1,n-2}}$ справедливы равенства

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}, \quad j, j' \in J_{1,n-1}, \quad \langle \widetilde{f}_i, \widetilde{\omega}_{i'}\rangle = \delta_{i,i'}, \quad i, i' \in J_{1,n-2},$$

причём $\operatorname{supp} f_j \subset [a,b]$, $\operatorname{supp} \widetilde{f}_i \subset [a,b]$.

Прямоугольная матрица $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n = (\mathfrak{q}_{i,j})$, $i \in J_{1,n-2}$, $j \in J_{1,n-1}$, размера $n \times \times (n+1)$ называется *матрицей разрежающей декомпозиции* на отрезке $[a,b]$, и имеет следующий вид

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_n = \begin{array}{c} \\ -1 \\ \dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \dots \\ n-2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -1 & \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для матриц $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ и $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n$ справедливо соотношение

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_n \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T = I_n, \tag{13}$$

где I_n — единичная квадратная матрица порядка n.

2°. Сплайн-вейвлетное сжатие на отрезке

Согласно калибровочным соотношениям (9) справедливо включение пространств

$$\mathbb{S}(\widetilde{X}_n) \subset \mathbb{S}(X_n).$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{P}_n$ проектирования пространства $\mathbb{S}(X_n)$ на подпространство $\mathbb{S}(\widetilde{X}_n)$, задаваемый формулой

$$\widetilde{P}_n\, u = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i\, \widetilde{\omega}_i, \quad \text{где } \widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u \rangle \quad \forall\, u \in \mathbb{S}(X_n),$$

и введём оператор $\widetilde{Q}_n = I - \widetilde{P}_n$, где I — тождественный в $\mathbb{S}(X_n)$ оператор.

Пространство $\widetilde{W}_n = \widetilde{Q}_n\, \mathbb{S}(X_n)$ называется *пространством вейвлетов* в конечномерном случае, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(X_n) = \mathbb{S}(\widetilde{X}_n) \dotplus \widetilde{W}_n, \tag{14}$$

порождает *сплайн-вейвлетное сжатие* пространства $\mathbb{S}(X_n)$.

В соответствии с равенством (14) для $u \in \mathbb{S}(X_n)$ имеем

$$u = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i\, \widetilde{\omega}_i + \sum_{i' \in J_{1,n-1}} \widetilde{b}_{i'}\, \omega_{i'} = \sum_{i' \in J_{1,n-1}} \left(\sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i\, \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,i'} + \widetilde{b}_{i'} \right) \omega_{i'},$$

так что для чисел $\widetilde{c}_j = \langle f_j, u \rangle$ получаем

$$\widetilde{c}_j = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i\, \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + \widetilde{b}_j \quad \forall\, j \in J_{1,n-1}. \tag{15}$$

Пусть известны коэффициенты $\widetilde{c}_{i'}$ в разложении элемента $u \in \mathbb{S}(X)$ по элементам базиса $\omega_{i'}$, а именно,

$$u = \sum_{i' \in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'}\, \omega_{i'}.$$

Из соотношений (15) имеем

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \widetilde{a}_i \quad \forall\, j \in J_{1,n-1}.$$

Используя равенство $\widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u \rangle$, для всех $j \in J_{1,n-1}$ получаем

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \langle \widetilde{f}_i, \sum_{i' \in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'}\, \omega_{i'} \rangle =$$

$$= \widetilde{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'} \langle \widetilde{f}_i, \omega_{i'} \rangle = \widetilde{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'}\, \mathfrak{q}_{i,i'}. \tag{16}$$

Формулы

$$\widetilde{a}_i = \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \mathfrak{q}_{i,i'}\, \widetilde{c}_{i'} \quad \forall\, i \in J_{1,n-2}, \tag{17}$$

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \left(\sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \mathfrak{q}_{i,i'} \right) \widetilde{c}_{i'} \quad \forall\, j \in J_{1,n-1}, \tag{18}$$

называются *формулами декомпозиции.*

ТЕОРЕМА 2. *Если* $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, *то для сплайн-вейвлетного разложения* (14) *формулы декомпозиции* (17)–(18) *при* $i \in J_{1,n-2}$, $j \in J_{1,n-1}$ *имеют вид*

$$\widetilde{a}_i = \begin{cases} \widetilde{c}_i & \text{при } i \leqslant k-1, \\ \widetilde{c}_{i+1} & \text{при } i \geqslant k, \end{cases} \tag{19}$$

$$\widetilde{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ \widetilde{c}_k - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \widetilde{c}_{k-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \widetilde{c}_{k+1} & \text{при } j = k. \end{cases} \tag{20}$$

Доказательство. Подставляя равенства (12) в выражение (17), находим

$$\widetilde{a}_i = \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'}\, \mathfrak{q}_{i,i'} = \sum_{i'=-1}^{k-1} \widetilde{c}_{i'} \delta_{i,i'} + \sum_{i'=k+1}^{n-1} \widetilde{c}_{i'} \delta_{i,i'-1},$$

откуда вытекает формула (19).

Из соотношения (16), применяя равенство (12), выводим

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i=-1}^{k-1} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \widetilde{c}_i - \sum_{i=k}^{n-2} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \widetilde{c}_{i+1}.$$

Из формул (6)–(8) следует, что

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i=-1}^{k-2} \delta_{i,j}\, \widetilde{c}_i - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,j}\, \widetilde{c}_{k-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,j}\, \widetilde{c}_{k+1} - \sum_{i=k+1}^{n-2} \delta_{i,j-1}\, \widetilde{c}_{i+1}. \tag{21}$$

При подстановке различных $j \neq k$ в равенство (21) получаем $\widetilde{b}_j = 0$. При $j = k$ имеем $\widetilde{b}_{k+1} = \widetilde{c}_k - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \widetilde{c}_{k-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \widetilde{c}_{k+1}$. Теорема доказана. □

Согласно формуле (20) базисом вейвлетного пространства $\widetilde{W}_n$ служит сплайн ω_k, то есть $\widetilde{W}_n = \{\widetilde{b}_k\,\omega_k \mid \widetilde{b}_k \in \mathbb{R}^1\}$.

Пусть теперь известны коэффициенты $\widetilde{a}_i$, $i \in J_{1,n-2}$ и $\widetilde{b}_k$ в разложениях проекций элемента $u \in \mathbb{S}(X_n)$ на пространства $\mathbb{S}(\widetilde{X}_n)$ и $\widetilde{W}_n$:

$$\widetilde{P}_n u = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i\,\widetilde{\omega}_i, \qquad \widetilde{Q}_n u = \widetilde{b}_k\,\omega_k.$$

Найдём формулы для определения коэффициентов в представлении $u = \sum\limits_{j \in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_j\,\omega_j$. Такие формулы называются *формулами реконструкции.*

ТЕОРЕМА 3. *Если $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ и $i \in J_{1,n-1}$, то для сплайн-вейвлетного разложения* (14) *формулы реконструкции имеют вид*

$$\widetilde{c}_i = \begin{cases} \widetilde{a}_i & \text{при } i \leqslant k-1, \\ \widetilde{b}_k + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\,\widetilde{a}_{k-1} + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\,\widetilde{a}_k & \text{при } i = k, \\ \widetilde{a}_{i-1} & \text{при } i \geqslant k+1. \end{cases}$$

Это следует непосредственно из равенств (19) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Макаров. *О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка* // Проблемы матем. анализа. Вып. 38. 2008. С. 47–60.

2. G. Wang, Q. Chen, M. Zhou. *NUAT-B-spline curves* // Computer Aided Geometric Design. 2004. Vol. 21, No 2. P. 193–205.

3. М. В. С. О. Габр. *Сплайн-вейвлетные разложения для тригонометрических сплайнов первого порядка* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 сентября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0918`)

4. А. А. Макаров. *Матрицы реконструкции и декомпозиции для линейных сплайнов* // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 18. С. 215–236.

ВЗВЕШЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО СФЕРЕ

Н. О. Котелина А. Б. Певный

19 ноября 2011 г.

В докладе рассматриваются взвешенные сферические полудизайны и связанные с ними кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере.

1°. Зафиксируем натуральные числа $n \geqslant 2$ и чётное t. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$. Пусть

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара $(\Phi,\, W)$, где $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, называется взвешенным сферическим t-полудизайном, если выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^m W_i[\langle \varphi_i, x\rangle]^t = c_t\|x\|^t \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где

$$c_t = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}. \tag{2}$$

Числа W_i называются весами.

Тождество (1) будем называть тождеством Варинга, в честь английского математика Э. Варинга (1734–1798), который интересовался представлением формы $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{t}{2}}$ в виде суммы t-х степеней линейных форм (см. [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть* $(\Phi,\, W)$ *— взвешенный сферический* t*-полудизайн. Тогда* $(\Phi,\, W)$ *— взвешенный сферический* p*-полудизайн для* $p = 2, 4, \ldots, t$.

Доказательство. Введём обозначения:

$$S_p(x) = \sum_{i=1}^{m} W_i[\langle \varphi_i,\, x\rangle]^p, \quad \omega_p(x) = \|x\|^p, \qquad p = 2, 4, \ldots, t.$$

Применим к обеим частям тождества (1) оператор Лапласа Δ. После первого применения оператора Лапласа получим равенство

$$t(t-1)S_{t-2}(x) = c_t\, t(t+n-2)\, \omega_{t-2}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что $(\Phi,\, W)$ является взвешенным сферическим полудизайном порядка $(t-2)$ с константой

$$c_{t-2} = c_t\, \frac{t+n-2}{t-1} = \frac{(t-3)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-4)}.$$

Применяя далее оператор Лапласа, получаем, что $(\Phi,\, W)$ является взвешенным сферическим полудизайном порядков $t-4,\ t-6, \ldots, 2$. □

2°. В работе [2] приведено определение сферического t-дизайна с помощью системы тождеств. Дадим аналогичное определение взвешенного сферического t-дизайна. Пусть теперь t — положительное целое число, условие чётности не требуется.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара $(\Phi,\, W)$, где $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, называется взвешенным сферическим t-дизайном, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^{m} W_i[\langle \varphi_i, x\rangle]^p = \begin{cases} 0, & p \text{ нечётное, } p \leqslant t, \\ c_p\|x\|^p, & p \text{ чётное, } p \leqslant t. \end{cases} \tag{3}$$

3°. Приведём пример взвешенного сферического полудизайна. В [1] упоминается тождество Лукаса (1877):

$$8\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \sum^{4}(x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = 12\|x\|^4, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Здесь запись $\sum^4(x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4$ означает, что суммирование ведётся по всевозможным комбинациям знаков $+$, $-$. Всего таких комбинаций будет 4. Из

тождества (4) получим тождество Варинга и взвешенный сферический 4-полудизайн. Для этого в правой части должно стоять выражение $c_4\|x\|^4$. Заметим, что при $n=3$ константа c_4 равна $\frac{1}{5}$, и тогда тождество Варинга будет иметь вид

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \frac{1}{60}\sum^{4}(x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4.$$

Рассмотрим орты e_i, $i \in 1:3$, и векторы $\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \pm 1, \pm 1)$, $i \in 1:4$. Перепишем последнее тождество с использованием введённых обозначений:

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^{3}[\langle e_i, x\rangle]^4 + \frac{3}{20}\sum_{i=1}^{4}[\langle \varphi_i, x\rangle]^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4. \tag{5}$$

Осюда следует, что $(\Phi,\, W)$, где

$$\Phi = \{e_i, \quad i \in 1:3; \quad \varphi_i, \quad i \in 1:4\},$$
$$W = \left(\tfrac{2}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}\right),$$

является взвешенным сферическим 4-полудизайном. Рассмотрим пару $(\Phi_0,\, W_0)$, где

$$\Phi_0 = \{\pm e_i, \quad i \in 1:3; \quad \pm\varphi_i, \quad i \in 1:4\},$$
$$W_0 = \left(\tfrac{1}{15}, \ldots, \tfrac{1}{15}, \tfrac{3}{40}, \ldots, \tfrac{3}{40}\right)$$

(в W_0 число $\frac{1}{15}$ входит 6 раз, $\frac{3}{40}$ — 8 раз). Тогда $(\Phi_0,\, W_0)$ будет взвешенным сферическим 5-дизайном. В системе (3) тождества для чётных $p \leqslant 5$ выполняются в силу (5) и предложения 1, а тождества для нечётных $p \leqslant 5$ выполняются в силу симметричности $(\Phi_0,\, W_0)$.

Существует простая геометрическая интерпретация векторов из системы Φ_0: $\pm e_i$ — вершины октаэдра, $\pm\varphi_i$ — проекции середин граней октаэдра на сферу S^2 (см. книгу И. П. Мысовских [3]).

4°. Пусть t чётное, $t \geqslant 2$. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы пара* $(\Phi,\, W)$, *где* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, *была взвешенным сферическим* t*-полудизайном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \sum_{i=1}^{m} W_i\, Q(\varphi_i) \tag{6}$$

для любого однородного полинома $Q(x)$ *степени* t. *Здесь* σ_n *— площадь сферы* S^{n-1}, $\sigma_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2})$.

Напомним, что однородный полином степени t записывается в виде

$$Q(x) = \sum_{|k|=t} a(k)x^k, \tag{7}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами (мультииндекс), $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $x^k = x^{k_1} \cdots x^{k_n}$.

Замечание. Для сферических дизайнов с равными весами эту теорему доказал В. А. Юдин [2]. Ниже приводится доказательство, основанное на другой идее. Теорема 1 открывает новые пути для построения кубатурных формул для вычисления интегралов по сфере S^{n-1}.

Доказательство. Необходимость. Пусть (Φ, W) — взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда выполняется тождество (1):

$$S(x) := \sum_{i=1}^{m} W_i[\langle \varphi_i, x\rangle]^t = c_t\|x\|^t \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим вектор $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in})$ и применим мультииндексную технику:

$$[\langle \varphi_i, x\rangle]^t = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!}(\varphi_{i1}x_1)^{k_1} \dots (\varphi_{in}x_n)^{k_n} = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!}\varphi_i^k x^k.$$

Здесь $k = (k_1, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $k! = k_1! \cdots k_n!$. Для $S(x)$ получим выражение

$$S(x) = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!}\Big(\sum_{i=1}^{m} W_i\varphi_i^k\Big)x^k.$$

Значит, $S(x)$ — это однородный полином степени t. Введём обозначения $s = \frac{t}{2}$ и $y_i = x_i^2$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда правая часть в (1) запишется в виде

$$R(x) := c_t\|x\|^t = c_t(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{t}{2}} = c_t(y_1 + \dots + y_n)^s = c_t \sum_{|l|=s} \frac{s!}{l!}y^l = c_t \sum_{|l|=s} \frac{s!}{l!}x^{2l}.$$

Функция $R(x)$ также является однородным полиномом степени t. Так как $S(x) \equiv R(x)$, то их коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Рассмотрим два случая.

Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$ и хоть одно k_j нечётно. Тогда

$$\frac{t!}{k!}\sum_{i=1}^{m} W_i\,\varphi_i^k = 0. \tag{8}$$

Пусть в $k = (k_1, \dots, k_n)$ все k_j чётные, $k_j = 2l_j$, $l_j \in \mathbb{Z}$, $l_j \geqslant 0$. Тогда

$$\frac{t!}{k!} \sum_{i=1}^{m} W_i \, \varphi_i^k = c_t \frac{s!}{l!}. \tag{9}$$

Так как любой однородный полином степени t представляется в виде (7), то достаточно доказать, что равенство (6) выполняется для $Q(x) = x^k$, $|k| = t$. Здесь $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. Если хоть одно k_j нечётно, то в силу (8) имеем

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x^k \, dS = 0 = \sum_{i=1}^{m} W_i \, \varphi_i^k,$$

то есть для $Q(x) = x^k$ выполняется равенство (6).

Пусть теперь k представляется в виде $k = 2l$, где $l = (l_1, \dots, l_n)$, $|l| = s$. В левой части (6) получим интеграл Дирихле (см. [4])

$$I(k) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x^k \, dS = \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!!}{n(n+2) \cdots (n + |k| - 2)}. \tag{10}$$

Здесь $(-1)!! = 1$.

В правой части (6) стоит сумма, которая в силу (9) представляется в виде

$$T(k) := \sum_{i=1}^{m} W_i \, \varphi_i^k = \frac{k!}{t!} c_t \cdot \frac{s!}{l!} = \frac{k_1! \cdots k_n!}{t!} \cdot \frac{(t-1)!!}{n(n+2) \cdots (n+t-2)} \cdot \frac{s!}{l_1! \cdots l_n!}.$$

Имеем

$$\frac{(t-1)!!}{t!} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots t} = \frac{1}{2^s s!}.$$

Далее, при чётных $k_1, \dots, k_n$ справедливы равенства

$$k_j! = (k_j - 1)!! \, 2^{l_j} \, l_j!$$

и

$$k_1! \cdots k_n! = (k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!! \, 2^s \, l_1! \cdots l_n!.$$

Значит,

$$T(k) = \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!! \, 2^s \, l_1! \cdots l_n!}{2^s s!} \cdot \frac{s!}{l_1! \cdots l_n!} \cdot \frac{1}{n(n+2) \cdots (n+t-2)} =$$
$$= \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!!}{n(n+2) \cdots (n+t-2)}.$$

Получаем, что $I(k) = T(k)$, и для $Q(x) = x^k$ выполняется равенство (6).

Необходимость доказана.

Достаточность. Доказывается так же, как и необходимость, но рассуждениями “в обратном порядке”. □

5°. Покажем, как можно использовать теорему 1 в части необходимости. Пусть (Φ, W) — взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда для любого однородного полинома $Q(x)$ степени t справедливо равенство

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \sum_{i=1}^{m} W_i\,Q(\varphi_i). \tag{11}$$

Так как (Φ, W) является также p-полудизайном для $p = 2, 4, \dots, t$, то равенство (11) выполняется для любого полинома вида

$$Q(x) = \sum_{|i|=p} a(i)x^i, \qquad p = 2, 4, \dots, t.$$

Равенство (11) выполняется и для $p = 0$. В этом случае имеем $Q(x) \equiv C$ и

$$\frac{1}{\sigma_n} C\sigma_n = \sum_{i=1}^{m} W_i\,C = C.$$

Чтобы кубатурная формула (11) точно интегрировала полиномы нечётной степени, добавляют узлы $-\varphi_1, -\varphi_2, \dots, -\varphi_m$. Получаем кубатурную формулу

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\big(W_i(Q(\varphi_i) + Q(-\varphi_i))\big). \tag{12}$$

Такая формула будет точной для любого полинома $Q(x)$ степени $\leqslant t+1$. Действительно, любой полином степени не выше $t+1$ представляется в виде $Q(x) = \sum_{p=0}^{t+1} Q_p(x)$, где $Q_p(x)$ — однородные полиномы степени p.

6°. Вернёмся к системе (Φ_0, W_0) из примера в пункте 3. Для системы Φ_0 получаем кубатурную формулу со степенью точности $d = 5$:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x)\,dS \approx \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{3}\big(f(e_i) + f(-e_i)\big) + \frac{3}{40}\sum_{i=1}^{4}\big(f(\varphi_i) + f(-\varphi_i)\big). \tag{13}$$

Действительно, формула (13) будет точна для любого полинома $f(x)$ степени не выше 5. Легко проверяется, что она не точна для полинома $f(x) = x_1^6$. В этом случае $\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} x_1^6\,dS = \frac{1}{7}$, а правая часть равна $\frac{7}{45}$. Формулу (13) будем называть октаэдрической. Аналогичную формулу построим в $\mathbb{R}^n$. Получим тождество

$$A\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + B\sum^{2^{n-1}}\Big(\frac{x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n}{\sqrt{n}}\Big)^4 = c_4\|x\|^4, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

В левой части формулы (14) стоит симметрический полином от $x_1^2, \dots, x_n^2$. Поэтому достаточно приравнять коэффициенты при x_1^4 и $x_1^2 x_2^2$. Заметим, что $c_4 = \frac{3}{n(n+2)}$. Приходим к уравнениям

$$x_1^4: \qquad A + \frac{B \cdot 2^{n-1}}{n^2} = \frac{3}{n(n+2)},$$
$$x_1^2 x_2^2: \qquad B \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{4!}{2!\,2!\,n^2} = \frac{3}{n(n+2)} \cdot 2,$$

откуда $B = \frac{n}{2^{n-1}(n+2)}$, $A = \frac{2}{n(n+2)}$. В результате имеем кубатурную формулу

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} f(x)\, dS \approx \frac{A}{2} \sum_{i=1}^{n} \big(f(e_i) + f(-e_i)\big) + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \big(f(\varphi_i) + f(-\varphi_i)\big), \qquad (15)$$

где e_i — единичные орты, $\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \pm 1, \dots, \pm 1)$. Число узлов в этой формуле равно $N = 2n + 2^n$. Степень точности формулы равна 5. По аналогии с $n = 3$ получаем, что $\pm e_i$ — это вершины гипероктаэдра O_n, $\pm\varphi_i$ — проекции центров граней $(n-1)$-мерных граней O_n на S^{n-1}. В книге И. П. Мысовских [3, с. 314] рассматривается формула, в которой используются проекции середин всех рёбер вместо векторов φ_i. Такая формула также имеет степень точности $d = 5$. Число узлов в формуле И. П. Мысовских равно $2n^2$. Если сравнивать число узлов в формуле (15) и в формуле И. П. Мысовских, то при $n = 3, 4, 5$ число узлов в формуле (15) меньше, чем в формуле Мысовских.

Замечание. Легко проверить, что степень точности в (15) действительно равна 5. Для этого достаточно показать, что для $f(x) = x_1^6$ формула не точна. Действительно, в этом случае, по формуле (10)

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x_1^6\, dS = \frac{15}{n^3 + 6n^2 + 8n},$$

а правая часть равна $\frac{2n+1}{n^3+2n^2}$. Равенство между этими двумя величинами будет только при $n = 1$, $n = 2$.

7°. Кубатурная формула со степенью точности 9. Приведём ещё один пример построения кубатурной формулы. Данная кубатурная формула встречается у В. И. Лебедева (см. [5]). Наш способ построения отличается от способа В. И. Лебедева. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим множества векторов $\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^6 = \{\pm e_i\}_{i=1}^3$, — вершины октаэдра, $\{x_i^{(1)}\}_{i=1}^8 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\right\}$ — проекции центров граней на сферу. Последняя запись подразумевает, что используются все 8 возможных комбинаций знаков $\pm$. Получившиеся 8 векторов обозначены $x_i^{(1)}$, $i \in 1:8$.

На каждом ребре октаэдра с вершинами $\{\pm e_i\}_{i=1}^3$ возьмём по две симметрично расположенные точки a и b. Пусть, например, это ребро соединяет вершины $V_1 = (\pm 1, 0, 0)$ и $V_2 = (0, \pm 1, 0)$. Тогда $a = (\pm(1-\lambda), \pm\lambda, 0)$, $b = (\pm\lambda, \pm(1-\lambda), 0)$, где $\lambda \in (0, 1)$.

Проектируем все получившиеся точки на S^2 и получаем 24 узла следующего вида:

$$\begin{aligned}\{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{24} =&\{(\pm p, \pm q, 0), (\pm q, \pm p, 0), (\pm p, 0, \pm q), (\pm q, 0, \pm p),\\ &(0, \pm p, \pm q), (\pm q, \pm p, 0)\},\end{aligned}$$

где $p^2 + q^2 = 1$. Найдём p из интервала $(0, 1)$, при котором система

$$\Phi = \{x_i^{(0)}\}_{i=1}^6 \cup \{x_i^{(1)}\}_{i=1}^8 \cup \{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{24}$$

будет сферическим взвешенным 9-дизайном. Для этого при некоторых A, B, C, p должно выполняться тождество Варинга:

$$A\sum_{i=1}^{6}[\langle x_i^{(0)}, x\rangle]^8 + B\sum_{i=1}^{8}[\langle x_i^{(1)}, x\rangle]^8 + C\sum_{i=1}^{24}[\langle x_i^{(2)}, x\rangle]^8 = c_8\|x\|^8$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Введём обозначения

$$\begin{aligned}S(x) :=& A\sum_{i=1}^{3} 2x_i^8 + B\sum^{8}\frac{1}{81}(\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3)^8 + C\sum^{4}\big[(\pm p x_1 \pm q x_2)^8 +\\ &+ (\pm q x_1 \pm p x_2)^8 + (\pm p x_1 \pm q x_3)^8 + (\pm q x_1 \pm p x_3)^8 + (\pm p x_2 \pm q x_3)^8 +\\ &+ (\pm q x^2 \pm p x^3)^8\big] = \frac{1}{9}\|x\|^8 =: R(x).\end{aligned}$$

Так как $S(x)$ и $R(x)$ симметрические полиномы от x_1^2, x_2^2, x_3^2, то, чтобы это тождество было верным, достаточно приравнять коэффициенты при x_1^8, $x_1^6x_2^2$, $x_1^4x_2^4$, $x_1^4x_2^2x_3^2$. Получим систему

$$\begin{gathered}2A + \frac{8}{81}B + 4C(2p^8 + 2q^8) = \frac{1}{9},\\ \frac{224}{81}B + 4C(28p^6q^2 + 28q^6p^2) = \frac{4}{9},\\ \frac{560}{81}B + 4C(70p^4q^4 + 70q^4p^4) = \frac{6}{9},\\ \frac{3360}{81}B = \frac{12}{9},\end{gathered}$$

откуда следует, что $A = \frac{1}{105}$, $B = \frac{9}{280}$, $C = \frac{1}{35}$, $p = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} = 0.8880\ldots$, $q = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = 0.4597\ldots$. При этом $6A + 8B + 24C = 1$. Таким образом, (Φ, W) является взвешенным сферическим 9-дизайном с вектором весов $W = (A, \ldots, A, B, \ldots, B, C, \ldots, C)$, где A встречается 6 раз, B встречается 8 раз, C встречается 24 раза. Можно записать кубатурную формулу:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x)\,dS \approx \frac{1}{105}\sum_{i=1}^{6} f\big(x_i^{(0)}\big) + \frac{9}{280}\sum_{i=1}^{8} f\big(x_i^{(1)}\big) + \frac{1}{35}\sum_{i=1}^{24} f\big(x_i^{(2)}\big), \qquad (16)$$

причём степень точности данной формулы равна 9, не больше. Действительно, при подстановке $f(x) = x_1^{10}$, получим по формуле (10)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} x_1^{10}\,dS = \frac{1}{11}.$$

С другой стороны правая часть равна $\frac{17}{189}$.

Замечание. В статье В. И. Лебедева [5] используется другой способ определения неизвестных A, B, C, p. Опираясь на теорему С. Л. Соболева [6] в [5] показывается, что для точности кубатурной формулы на полиномах степени не выше 9, достаточно, чтобы эта формула была точна для четырёх полиномов

$$1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_2^2, \qquad (17)$$

где $\sigma_2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$, $\sigma_3 = x_1^2x_2^2x_3^2$. Эти полиномы подставляются в формулу с неопределёнными параметрами A, B, C, p и получаются 4 уравнения для их определения. При этом приходится вычислять интегралы по сфере от полиномов (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No. 463. P. 1–155.

2. Юдин В. А. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 3. С. 39–45.

3. Мысовских И. П. *Интерполяционные кубатурные формулы* М.: Наука. 1981. 336 с.

4. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml`).

5. Лебедев В. И. *Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса-Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 1. С. 48–54.

6. Соболев С. Л. *О формулах механических квадратур на поверхности сферы* // Сибирский матем. ж. 1962. Т. 3. № 5. С. 769–796.

ПОЛИНОМЫ ШАПИРО И КОДЫ РИДА-МАЛЛЕРА

В. Н. Малозёмов И. С. Стояноска

26 ноября 2011 г.

В этом докладе мы анализируем связь между полиномами Шапиро и кодами Рида-Маллера, отмеченную в работе [1].

1°. Полиномы Шапиро определяются рекуррентно:

$$P_0(x) \equiv 1, \quad Q_0(x) \equiv 1$$

и при $m = 0, 1, \ldots$

$$P_{m+1} = P_m(x) + x^{2^m} Q_m(x), \tag{1}$$

$$Q_{m+1} = P_m(x) - x^{2^m} Q_m(x). \tag{2}$$

В частности,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1 + x, & Q_1(x) &= 1 - x, \\ P_2(x) &= 1 + x + x^2 - x^3, & Q_2(x) &= 1 + x - x^2 + x^3, \\ P_3(x) &= 1 + x + x^2 - x^3 + & Q_3(x) &= 1 + x + x^2 - x^3 - \\ &\quad + x^4 + x^5 - x^6 + x^7, & &\quad - x^4 - x^5 + x^6 - x^7. \end{aligned}$$

Ясно, что полиномы $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ имеют степень $2^m - 1$.

ЛЕММА 1. *Справедливы формулы*

$$P_{m+1}(x) = P_m(x^2) + xP_m(-x^2), \quad m = 0, 1, \ldots; \tag{3}$$

$$Q_{m+1}(x) = Q_m(x^2) + x\,Q_m(-x^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Доказательство. Формула (3) при $m = 0, 1, 2$ и формула (4) при $m = 1, 2$ проверяются непосредственно. Сделаем индукционный переход от m к $m+1$, считая, что $m \geqslant 2$.

Перепишем соотношения (1) и (2), заменив в них m на $m-1$ и x на x^2. Приняв во внимание, что $(x^2)^{2^{m-1}} = x^{2^m}$, получим

$$\begin{aligned} P_m(x^2) &= P_{m-1}(x^2) + x^{2^m} Q_{m-1}(x^2), \\ Q_m(x^2) &= P_{m-1}(x^2) - x^{2^m} Q_{m-1}(x^2). \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь заменим в (1) и (2) m на $m-1$ и x на $-x^2$. С учётом равенства $(-x^2)^{2^{m-1}} = x^{2^m}$, верного при $m \geqslant 2$, придём к соотношениям

$$\begin{aligned} P_m(-x^2) &= P_{m-1}(-x^2) + x^{2^m} Q_{m-1}(-x^2), \\ Q_m(-x^2) &= P_{m-1}(-x^2) - x^{2^m} Q_{m-1}(-x^2). \end{aligned} \tag{6}$$

На основании индукционного предположения и формул (1), (5), (6) получаем

$$\begin{aligned} P_{m+1}(x) = P_m(x) + x^{2^m} Q_m(x) &= P_{m-1}(x^2) + xP_{m-1}(-x^2) + \\ &+ x^{2^m}[Q_{m-1}(x^2) + x\,Q_{m-1}(-x^2)] = P_{m-1}(x^2) + x^{2^m} Q_{m-1}(x^2) + \\ &+ x[P_{m-1}(-x^2) + x^{2^m} Q_{m-1}(-x^2)] = P_m(x^2) + x\,P_m(-x^2). \end{aligned}$$

Соотношение (3) установлено.

Аналогично проверяется соотношение (4). □

2°. Обозначим $n = 2^m$. По построению первые n коэффициентов полинома $P_{m+1}(x)$ совпадают с коэффициентами полинома $P_m(x)$. Отсюда следует, что коэффициенты полиномов Шапиро не зависят от m.

Пусть

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k.$$

ЛЕММА 2. *Для коэффициентов $\{a_k\}$ справедливо рекуррентное соотношение:*

$$a_0 = 1$$

и при $k \in 0 : 2^{m-1} - 1,\ m = 1, 2, \ldots$

$$a_{2k} = a_k, \quad a_{2k+1} = (-1)^k a_k. \tag{7}$$

Доказательство. Согласно (3) при $m \geqslant 1$ имеем

$$P_m(x) = P_{m-1}(x^2) + x\,P_{m-1}(-x^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_k\, x^{2k} + \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} (-1)^k a_k\, x^{2k+1}.$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

В таблице приведены результаты последовательного вычисления коэффициентов полиномов Шапиро по формулам (7).

Таблица

m	Коэффициенты полинома $P_m(x)$							
0	1							
1	1	1						
2	1	1	1	-1				
3	1	1	1	-1	1	1	-1	1

3°. Для коэффициентов a_k полинома $P_m(x)$ можно указать явную формулу. Для этого с индексом k свяжем его двоичный код:

$$k = (k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots, k_0)_2, \quad k_\alpha \in \{0, 1\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *При $k \in 0 : 2^m - 1$, $m \geqslant 2$, справедлива формула*

$$a_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1} k_\alpha}. \tag{8}$$

Доказательство. При $m = 2$, когда $k = (k_1, k_0)_2$, формула (8) проверяется непосредственно. Сделаем индукционный переход от m к $m+1$.

Пусть $k \in 0 : 2^{m+1} - 1$. Представим k в виде $k = 2k' + \sigma$, где $k' \in 0 : 2^m - 1$ и $\sigma \in \{0, 1\}$. Запишем $k' = (k'_{m-1}, \ldots, k'_0)_2$. Тогда

$$k = (k'_{m-1}, \ldots, k'_0, \sigma)_2,$$

то есть $k_\alpha = k'_{\alpha-1}$ при $\alpha \in 1 : m$ и $k_0 = \sigma$.

Согласно (7)

$$a_{2k'+\sigma} = (-1)^{k'\sigma} a_{k'} = (-1)^{k'_0 \sigma} a_{k'}.$$

Воспользуемся индукционным предположением, согласно которому

$$a_{k'} = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k'_{\alpha-1} k'_\alpha}.$$

Получим

$$\begin{aligned} a_k = a_{2k'+\sigma} &= (-1)^{k'_0 \sigma} (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k'_{\alpha-1} k'_\alpha} = \\ &= (-1)^{k_1 k_0} (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_\alpha k_{\alpha+1}} = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m} k_{\alpha-1} k_\alpha}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Введём функцию

$$\phi(k) = \sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}k_\alpha = \\ = k_0k_1 + k_1k_2 + \ldots + k_{m-2}k_{m-1}, \quad k \in 0 : n-1.$$

Величина $\phi(k)$ при фиксированном k показывает, сколько раз в двоичном коде индекса k встречается блок $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$. С помощью функции $\phi(k)$ формулу (8) можно переписать в виде

$$a_k = (-1)^{\phi(k)}, \quad k \in 0 : n-1.$$

4°. Отметим одно фундаментальное свойство полиномов Шапиро.

ТЕОРЕМА 2. *При всех $m = 0, 1, \ldots$ и всех комплексных z, таких, что $|z| = 1$, справедливо равенство*

$$|P_m(z)|^2 + |Q_m(z)|^2 = 2^{m+1}.$$

Это равенство легко доказывается по индукции с помощью формул (1), (2) и элементарного свойства комплексных чисел

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

5°. Обратимся к кодам Рида-Маллера (см., например, [2, с. 76–81]). Зафиксируем натуральные числа r и m, $r < m$, и положим $n = 2^m$. Введём блочную кодирующую матрицу вида

$$G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \ldots \\ G_r \end{bmatrix}.$$

Здесь G_0 — вектор-строка размера n, состоящая из единиц,

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix} = [g_0];$$

$G_1 = G_1[1 : m, 0 : n-1]$ — матрица, в столбцах которой стоят коэффициенты двоичных разложений чисел $0, 1, \ldots, n-1$, начиная со старшего разряда. Например, при $m = 4$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}.$$

Строки остальных блоков G_s, $s = 2, \ldots, r$, формируются как всевозможные покомпонентные произведения s строк матрицы G_1, причём комбинации из s строк берутся в лексикографическом порядке. Например, при $m = 4$

$$G_2 = \begin{bmatrix} g_1g_2 \\ g_1g_3 \\ g_1g_4 \\ g_2g_3 \\ g_2g_4 \\ g_3g_4 \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} g_1g_2g_3 \\ g_1g_2g_4 \\ g_1g_3g_4 \\ g_2g_3g_4 \end{bmatrix}.$$

Блок G_s имеет размер $C_m^s \times 2^m$. Размер матрицы G равен

$$(1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots C_m^r) \times 2^m.$$

Будем считать, что строки матрицы G являются элементами множества $\mathbb{Z}_2^n$, в котором введены операция поразрядного сложения по модулю 2 и операция поразрядного умножения.

Пусть i — информационное слово. Все его компоненты равны нулю или единице, а длина совпадает с количеством строк матрицы G. Кодовое слово Рида-Маллера определяется так:

$$c = iG. \tag{9}$$

Это значит, что кодовое слово c является линейной комбинацией строк матрицы G, коэффициентами которой служат компоненты информационного слова i. Линейная комбинация вычисляется по правилам, введённым в $\mathbb{Z}_2^n$.

Пусть, например $m = 3$, $r = 1$. В этом случае,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Возьмём информационное слово $i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. В качестве кодового слова получим $c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Множество кодовых слов c вида (9) при различных i называется кодом Рида-Маллера и обозначается $RM(r, m)$.

6°. Более детально изучим свойства матрицы G_1. Возьмём индекс $j \in 0 : n-1$, $j = (j_{m-1}, \ldots, j_0)_2$. По определению

$$G_1[k, j] = j_{m-k}, \quad k \in 1 : m. \tag{10}$$

Напомним определение функций Радемахера

$$r_k(j) = (-1)^{j_{m-k}}, \quad j \in 0 : n-1, \quad k \in 1 : m.$$

Согласно (10) при $k \in 1 : m$

$$(-1)^{G_1[k,j]} = r_k(j), \quad j \in 0 : n-1. \tag{11}$$

Обозначим через $(-1)^{G_1}$ матрицу с элементами $(-1)^{G_1[k,j]}$. Тогда свойство (11) можно сформулировать так: *k-я строка матрицы $(-1)^{G_1}$ совпадает со значениями функции Радемахера r_k.*

Теперь введём матрицу $D = G_1^T G_1$. Строки матрицы D являются линейными комбинациями в $\mathbb{Z}_2^n$ строк матрицы G_1. Покажем, что

$$(-1)^D = H,$$

где H — матрица Адамара. [Напомним (см., например, [3, с. 54]), что матрица Адамара на индексах $l = (l_{m-1}, \ldots, l_0)_2, j = (j_{m-1}, \ldots, j_0)_2$ определяется так:

$$H[l,j] = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{m-1} l_\alpha j_\alpha}, \quad l, j \in 0 : n-1.]$$

Действительно, согласно (10)

$$\begin{aligned}(-1)^{D[l,j]} &= (-1)^{\left\langle \sum_{k=1}^{m} G_1[k,l] G_1[k,j] \right\rangle_2} = \\ &= (-1)^{\sum_{k=1}^{m} l_{m-k} j_{m-k}} = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{m-1} l_\alpha j_\alpha} = H[l,j].\end{aligned}$$

7°. Рассмотрим в $RM(2,m)$ при $m \geqslant 3$ кодовое слово

$$s = \sum_{k=1}^{m-1} g_k\, g_{k+1} = [s_0\, s_1 \ldots s_{n-1}]. \tag{12}$$

Например, при $m = 3$ имеем $s = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Введём вектор

$$(-1)^s = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

и запишем соответствующую производящую функцию

$$p(x) = 1 + x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 + x^7.$$

Видим, что $p(x)$ — полином Шапиро при $m = 3$, $p(x) = P_3(x)$.

Аналогичный факт имеет место и в общем случае.

ТЕОРЕМА 3. *Для коэффициентов полинома Шапиро $P_m(x)$ при $m \geqslant 3$ справедлива формула*

$$a_j = (-1)^{s_j}, \quad j \in 0 : n-1,$$

где s_j — компоненты кодового слова s вида (12).

Доказательство. Согласно (10)

$$s_j = \left\langle \sum_{k=1}^{m-1} G_1[k,j]G_1[k+1,j] \right\rangle_2 = \left\langle \sum_{k=1}^{m-1} j_{m-k}j_{m-k-1} \right\rangle_2 =$$
$$= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{m-1} j_{\alpha-1}j_\alpha \right\rangle_2 .$$

Остаётся учесть, что в силу (8)

$$(-1)^{s_j} = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} j_{\alpha-1}j_\alpha} = a_j.$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. An M., Byrnes J., Moran W., Saffari B., Shapiro H. S. and Tolimieri R. *PONS, Reed-Muller codes, and group algebras.* NATO Advanced Study Institute: Computational Noncommutative Algebra and Applications. Tuscany, Italy. July 2003. P. 155–197.

2. Блейхут Р. *Теория и практика кодов, контролирующих ошибки.* М.: Мир, 1986. 576 с.

3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть вторая. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

СХОДИМОСТЬ СХЕМЫ SUBDIVISION

Н. В. Чашников

3 декабря 2011 г.

Данный доклад основан на книге [1]. Приведены необходимые и достаточные условия сходимости стационарной схемы subdivision для функций одной переменной.

1°. Пусть задана последовательность вещественных чисел $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, в которой лишь конечное число членов отлично от нуля. Пусть также задана начальная последовательность векторов $\{\mathbf{p}_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из пространства $\mathbb{R}^n$, в которой только конечное число членов отлично от нуля. Определим последовательности векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, при помощи рекуррентного соотношения

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_{l-2k}\, \mathbf{p}_k^{m-1}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Такой метод построения последовательностей векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$ называется *стационарной схемой subdivision с маской* $\{s_k\}$. Векторы $\mathbf{p}_k^m$ называются контрольными точками; $\{\mathbf{p}_k^0\}$ — начальный набор контрольных точек.

В некоторых случаях удобно рассматривать вместо последовательностей чисел и векторов производящие функции. Маске $\{s_k\}$ соответствует производящая функция

$$s(z) = \sum_k s_k\, z^k,$$

а набору контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^m\}$ — производящая функция

$$\mathbf{p}^m(z) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\, z^k.$$

Здесь и далее мы будем опускать пределы суммирования, если суммирование ведётся по всем целым индексам. В действительности в каждой сумме лишь конечное число членов отлично от нуля, так что вопросы сходимости не возникают.

Соотношение (1) эквивалентно соотношению для производящих функций (см. доказательство теоремы 2 в [2])

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\, \mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

2°. Положим

$$\widehat{N}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Справедливость следующих тождеств проверяется непосредственно:

$$\sum_j \widehat{N}(t - j) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\widehat{N}(t) = \tfrac{1}{2}\widehat{N}(2t - 1) + \widehat{N}(2t) + \tfrac{1}{2}\widehat{N}(2t + 1), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

При $m \geqslant 0$ определим вектор-функцию $\mathbf{P}^m$ по формуле

$$\mathbf{P}^m(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m \, \widehat{N}(2^m t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что $\mathbf{P}^m(t)$ является непрерывной кусочно-линейной функцией, принимающей значения $\mathbf{p}_k^m$ в точках $\frac{k}{2^m}$.

ЛЕММА. *Пусть заданы схема subdivision с маской $\{s_k\}$ и начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Положим*

$$K = \max\bigl\{|k| \mid s_k \neq 0\bigr\}, \qquad a_0 = \max\bigl\{|k| \mid \mathbf{p}_k^0 \neq 0\bigr\}.$$

Тогда носители вектор-функций $\mathbf{P}^m$ ограничены в совокупности:

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-(K + a_0 + 1), K + a_0 + 1], \quad m \geqslant 0.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$a_m = \max\{|k| \mid \mathbf{p}_k^m \neq 0\}, \quad m \geqslant 1.$$

При $m = 0$ данное обозначение согласуется с обозначением a_0 из формулировки леммы.

Зафиксируем натуральное m и рассмотрим рекуррентное соотношение (1) при целых k. Слагаемое в правой части может быть отлично от нуля только если индекс l удовлетворяет условиям $|l| \leqslant a_{m-1}$ и $|k - 2l| \leqslant K$. Поэтому если в сумме есть ненулевые слагаемые, то пересечение отрезков

$$[-a_{m-1}, a_{m-1}] \quad \text{и} \quad \left[\tfrac{k-K}{2}, \tfrac{k+K}{2}\right]$$

непусто. Или, что то же самое, расстояние между центрами этих отрезков (числа 0 и $k/2$ соответственно) не превосходит полусуммы их длин, то есть

$$|k/2| \leqslant a_{m-1} + \tfrac{K}{2}.$$

Следовательно,

$$a_m \leqslant 2a_{m-1} + K.$$

Последовательно применяя полученное неравенство, запишем

$$2^{-m}a_m \leqslant 2^{m-1}a_{m-1} + 2^{-m}K \leqslant 2^{m-2}a_{m-2} + 2^{-(m-1)}K + 2^{-m}K \leqslant$$
$$\leqslant \cdots \leqslant a_0 + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j}K < a_0 + K.$$

Рассмотрим определение вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$. Носителем функции $\widehat{N}(t)$ является отрезок $[-1, 1]$. Поэтому значение $\widehat{N}(2^m t - k)$ может быть отлично от нуля, только если t принадлежит отрезку $[2^{-m}(k-1), 2^{-m}(k+1)]$. Носитель функции $\mathbf{P}^m(t)$ содержится в объединении таких отрезков по всем k из множества $-a_m : a_m$, то есть

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-2^{-m}(a_m + 1),\, 2^{-m}(a_m + 1)] \subset [-(a_0 + K) - 2^{-m},\, a_0 + K + 2^{-m}].$$

Значит, для всех m справедливо включение

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-(K + a_0 + 1), K + a_0 + 1].$$

Лемма доказана. □

3°. Схема subdivision называется *сходящейся*, если для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ равномерно сходится. Будем называть схему subdivision *вырожденной*, если для любого начального набора контрольных точек последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ равномерно сходится к вектор-функции, тождественно равной нулю.

Обозначим через $\mathbf{P}$ предел последовательности вектор-функций $\mathbf{P}^m$. Очевидно, что вектор-функция $\mathbf{P}(t)$ непрерывна. Из леммы следует, что носитель вектор-функции $\mathbf{P}(t)$ ограничен. Кроме того, справедливо неравенство

$$\max_k \|\mathbf{p}_k^m - \mathbf{P}(2^{-m}k)\| = \max_k \|\mathbf{P}^m(2^{-m}k) - \mathbf{P}(2^{-m}k)\| \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{P}^m(t) - \mathbf{P}(t)\|.$$

Значит, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \max_k \|\mathbf{p}_k^m - \mathbf{P}(2^{-m}k)\| = 0. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится и невырождена. Тогда справедливы равенства*

$$\sum_k s_{2k} = \sum_k s_{2k+1} = 1. \tag{6}$$

Доказательство. Возьмём такой начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$, для которого предельная вектор-функция $\mathbf{P}(t)$ не равна тождественно нулю. Тогда найдётся натуральное число M и целое число j такие, что $\mathbf{P}(2^{-M}j) \neq 0$.

Зафиксируем целые числа $d \in 0:1$ и $m > M$. В силу рекуррентного соотношения (1) имеем

$$\mathbf{p}_{2^{m-M}j+d}^m = \sum_k s_{2^{m-M}j+d-2k}\,\mathbf{p}_k^{m-1} = \sum_i s_{2i+d}\,\mathbf{p}_{2^{m-M-1}j-i}^{m-1}.$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\mathbf{P}(2^{-M}j + 2^{-m}d) - \sum_i s_{2i+d}\,\mathbf{P}(2^{-M}j - 2^{-m+1}i) =$$
$$= \big[\mathbf{P}(2^{-M}j + 2^{-m}d) - \mathbf{p}_{2^{m-M}j+d}^m\big] + \sum_i s_{2i+d}\big[\mathbf{p}_{2^{m-M-1}j-i}^{m-1} - \mathbf{P}(2^{-M}j - 2^{-m+1}i)\big].$$

Согласно предельному соотношению (5), первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $m \to \infty$. Аналогично разность

$$\mathbf{p}_{2^{m-M-1}j-i}^{m-1} - \mathbf{P}(2^{-M}j - 2^{-m+1}i)$$

также стремится к нулю, а так как коэффициенты s_{2i+d} отличны от нуля только для конечного числа индексов i, то и вся правая часть стремится к нулю. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в левой части и пользуясь непрерывностью вектор-функции $\mathbf{P}(t)$, получаем

$$\mathbf{P}(2^{-M}j)\Big(1 - \sum_i s_{2i+d}\Big) = 0.$$

Осталось заметить, что $\mathbf{P}(2^{-M}j)$ отлично от нуля, поэтому

$$\sum_i s_{2i+d} = 1$$

при $d = 0$ и $d = 1$, что и требовалось. □

4°. Положим

$$\Delta\mathbf{p}_k^m = \mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_{k-1}^m, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Производящая функция для последовательности $\{\Delta\mathbf{p}_k^m\}$ имеет вид

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для маски* $\{s_k\}$ *выполняется условие* (6). *Если для любого начального набора контрольных точек найдутся такие числа* $c > 0$ *и* $\gamma \in (0,1)$, *что для всех неотрицательных целых* m *выполняется неравенство*

$$\max_k \|\Delta \mathbf{p}_k^m\| \leqslant c\,\gamma^m, \tag{7}$$

то схема subdivision сходится.

Доказательство. Напомним, что

$$K = \max\bigl\{|k| \mid s_k \neq 0\bigr\}.$$

Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Положим

$$\varepsilon_m = \max_k \|\Delta \mathbf{p}_k^m\|, \quad m \geqslant 0.$$

По условию теоремы найдутся такие числа $c > 0$ и $\gamma \in (0,1)$, что $\varepsilon_m \leqslant c\,\gamma^m$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$.

Для вещественного t и натурального m на основании тождества (4) запишем

$$\mathbf{P}^m(t) - \mathbf{P}^{m-1}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\,\widehat{N}(2^m t - k) - \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\,\widehat{N}(2^{m-1} t - k) =$$

$$= \sum_k \mathbf{p}_{2k}^m\,\widehat{N}(2^m t - 2k) + \sum_k \mathbf{p}_{2k+1}^m\,\widehat{N}(2^m t - 2k - 1) -$$

$$- \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\bigl[\tfrac{1}{2}\widehat{N}(2^m t - 2k - 1) + \widehat{N}(2^m t - 2k) + \tfrac{1}{2}\widehat{N}(2^m t - 2k + 1)\bigr] =$$

$$= \sum_k (\mathbf{p}_{2k}^m - \mathbf{p}_k^{m-1})\widehat{N}(2^m t - 2k) + \sum_k \bigl[\mathbf{p}_{2k+1}^m - \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}_k^{m-1} + \mathbf{p}_{k+1}^{m-1})\bigr]\widehat{N}(2^m t - 2k - 1).$$

Оценим коэффициенты при $\widehat{N}$ в последних суммах. Пользуясь рекуррентным соотношением (1) и условием (6), получаем

$$\mathbf{p}_{2k}^m - \mathbf{p}_k^{m-1} = \sum_l s_{2k-2l}\,\mathbf{p}_l^{m-1} - \sum_l s_{2k-2l}\,\mathbf{p}_k^{m-1} = \sum_l s_{2k-2l}(\mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_k^{m-1}).$$

Коэффициент s_{2k-2l} может быть отличен от нуля только если $2|k-l| \leqslant K$. Для таких индексов l справедливо неравенство

$$\|\mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_k^{m-1}\| \leqslant |k-l|\,\varepsilon_{m-1} \leqslant \tfrac{1}{2}K\varepsilon_{m-1}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\|\mathbf{p}_{2k}^m - \mathbf{p}_k^{m-1}\| \leqslant \tfrac{1}{2}K\varepsilon_{m-1}\sum_l |s_{2l}|.$$

Воспользовавшись равенствами (1) и (6), запишем

$$\mathbf{p}^m_{2k+1} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}^{m-1}_k + \mathbf{p}^{m-1}_{k+1}) = \sum_l s_{2k+1-2l}\,\mathbf{p}^{m-1}_l - \tfrac{1}{2}\sum_l s_{2k+1-2l}(\mathbf{p}^{m-1}_k + \mathbf{p}^{m-1}_{k+1}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_l s_{2k+1-2l}(\mathbf{p}^{m-1}_l - \mathbf{p}^{m-1}_k + \mathbf{p}^{m-1}_l - \mathbf{p}^{m-1}_{k+1}).$$

Коэффициент $s_{2k+1-2l}$ может быть отличен от нуля только если $2|k-l| \leqslant K+1$. Для таких индексов l справедливы неравенства

$$\|\mathbf{p}^{m-1}_l - \mathbf{p}^{m-1}_k\| \leqslant \tfrac{1}{2}K\varepsilon_{m-1}, \qquad \|\mathbf{p}^{m-1}_l - \mathbf{p}^{m-1}_{k+1}\| \leqslant (\tfrac{K}{2}+1)\varepsilon_{m-1}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\|\mathbf{p}^m_{2k+1} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}^{m-1}_k + \mathbf{p}^{m-1}_{k+1})\| \leqslant \tfrac{K+1}{2}\,\varepsilon_{m-1}\sum_l |s_{2l+1}|.$$

Положим

$$C = \max\Big\{\tfrac{K}{2}\sum_l |s_{2l}|,\ \tfrac{K+1}{2}\sum_l |s_{2l+1}|\Big\}.$$

Используя доказанные оценки и тождество (3), получаем

$$\|\mathbf{P}^m(t) - \mathbf{P}^{m-1}(t)\| \leqslant \sum_k C\,\varepsilon_{m-1}\,|\widehat{N}(2^m t - 2k)| +$$
$$+ \sum_k C\,\varepsilon_{m-1}\,|\widehat{N}(2^m t - 2k - 1)| = \sum_k C\,\varepsilon_{m-1}\,\widehat{N}(2^m t - k) = C\,\varepsilon_{m-1}.$$

В силу произвольности выбора t имеем оценку в норме пространства $C(\mathbb{R})$:

$$\|\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}\| \leqslant C\,\varepsilon_{m-1}.$$

Данное неравенство выполняется при всех натуральных m, поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}\| \leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_{m-1} \leqslant C\,c\sum_{m=0}^{\infty}\gamma^m = \frac{C\,c}{1-\gamma}.$$

В частности, сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}).$$

Значит, последовательность его частичных сумм имеет предел. Положим

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 + \lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}(\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}).$$

Заметим, что

$$\sum_{m=1}^{M}(\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}) = \mathbf{P}^M - \mathbf{P}^0.$$

Следовательно, вектор-функция $\mathbf{P}$ является пределом последовательности вектор-функций $\mathbf{P}^m$.

Теорема доказана. □

5°. Перепишем равенства (6) при помощи производящей функции $s(z)$:

$$1 = \sum_k s_{2k} = \frac{s(1) + s(-1)}{2},$$
$$1 = \sum_k s_{2k+1} = \frac{s(1) - s(-1)}{2}.$$

Полученные равенства эквивалентны условиям

$$s(1) = 2, \quad s(-1) = 0. \tag{8}$$

Предположим, что условия (8) выполнены. Так как среди коэффициентов s_k лишь конечное число отлично от нуля, то при некотором M функция $s(z)z^M$ будет полиномом. Число -1 является корнем этого полинома, поэтому он делится на $1 + z$. Обозначим частное от деления на $(1 + z)z^M$ через $d(z)$. Имеем $s(z) = (1 + z)d(z)$, где

$$d(z) = \sum_k d_k\, z^k$$

и среди коэффициентов d_k лишь конечное число отлично от нуля.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть r — натуральное число. Рассмотрим функцию*

$$\prod_{j=0}^{r-1} d(z^{2^j}) = \sum_k \tilde{d}_k\, z^k =: \tilde{d}(z).$$

Предположим, что выполняется условие

$$\delta := \max_k \sum_l |\tilde{d}_{k-2^r l}| < 1. \tag{9}$$

Тогда для любого начального набора контрольных точек существуют числа $c > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$, при которых справедливо неравенство (7).

Доказательство. Пусть начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ фиксирован. Пользуясь тождеством (2), выведем рекуррентную формулу для производящих функций $\Delta\mathbf{p}^m(z)$:

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z) = (1-z)s(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = (1-z^2)d(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \\ = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2).$$

Пусть $m \geqslant r$. Применим полученную формулу r раз:

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = d(z)\,d(z^2)\Delta\mathbf{p}^{m-2}(z^4) = \cdots = \tilde{d}(z)\Delta\mathbf{p}^{m-r}(z^{2^r}).$$

Перепишем производящие функции в виде сумм:

$$\sum_k \Delta\mathbf{p}_k^m z^k = \sum_j \tilde{d}_j z^j \sum_l \Delta\mathbf{p}_l^{m-r} z^{2^r l} = \sum_j \sum_l \tilde{d}_j\,\Delta\mathbf{p}_l^{m-r} z^{j+2^r l}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z, придём к равенству

$$\Delta\mathbf{p}_k^m = \sum_l \tilde{d}_{k-2^r l}\,\Delta\mathbf{p}_l^{m-r}. \tag{10}$$

Положим для $m \geqslant 0$

$$\varepsilon_m = \max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\|.$$

В силу условия (9) равенство (10) при $m \geqslant r$ даёт оценку

$$\varepsilon_m \leqslant \sum_l |\tilde{d}_{k-2^r l}| \max_j \Delta\mathbf{p}_j^{m-r} \leqslant \delta\,\varepsilon_{m-r}.$$

Применяя данное неравенство $\lfloor m/r \rfloor$ раз, получаем

$$\varepsilon_m \leqslant \delta^{\lfloor m/r \rfloor}\,\varepsilon_{m-r\lfloor m/r \rfloor}.$$

Заметим, что индекс $m - r\lfloor m/r \rfloor$ принадлежит промежутку $0 : r-1$. Определим константы c и γ следующим образом:

$$c = \tfrac{1}{\delta} \max_{k\in 0:r-1} \varepsilon_k, \qquad \gamma = \delta^{\frac{1}{r}}.$$

Имеем

$$\varepsilon_m \leqslant \delta^{\lfloor m/r \rfloor}\,c\,\delta \leqslant \delta^{m/r-1}\,c\,\delta = c\,\gamma^m.$$

Теорема доказана. □

6°. Покажем, что из теорем 2 и 3 следует сходимость схемы subdivision q-го порядка, описанной в [2]. Действительно, маска subdivision определяется производящей функцией

$$s(z) = \frac{(1+z)^{q+1}}{2^q}.$$

Необходимое условие сходимости (8) выполнено. Имеем

$$d(z) = \frac{(1+z)^q}{2^q}.$$

Полагая $r = 1$ в теореме 3, получаем $\tilde{d}(z) = d(z)$, так что

$$\sum_l |\tilde{d}_{2l}| = \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \frac{C_q^{2l}}{2^l} = \frac{1}{2},$$

$$\sum_l |\tilde{d}_{2l+1}| = \sum_{l=0}^{\lfloor (q-1)/2 \rfloor} \frac{C_q^{2l+1}}{2^l} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при $\delta = \frac{1}{2}$ верно неравенство (9). Применяя теоремы 3 и 2 заключаем, что схема subdivision сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersson L. E., Stewart N. F. *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces.* SIAM, 2010.

2. Чашников Н. В. *Построение кривых методом subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1001`).

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ ШАПИРО

В. Н. Малозёмов И. С. Стояноска

28 января 2012 г.

Данный доклад является продолжением доклада [1].

1°. Напомним определение полиномов Шапиро:

$$P_0(x) \equiv 1, \quad Q_0(x) \equiv 1$$

и при $m = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= P_m(x) + x^{2^m} Q_m(x), \\ Q_{m+1} &= P_m(x) - x^{2^m} Q_m(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Полином $Q_m(x)$ называется *дополнительным* к полиному $P_m(x)$.

Пусть

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^k.$$

В [1, 2] приведена явная формула для коэффициентов a_k:

$$a_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1} k_\alpha}, \quad k \in 0 : 2^m - 1,\ m \geqslant 2, \tag{2}$$

при условии, что $k = (k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots, k_0)_2$, $k_\alpha \in \{0, 1\}$.

Обозначим b_k коэффициенты полинома $Q_m(x)$,

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} b_k\, x^k.$$

ТЕОРЕМА 1. *При $m \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$b_k = (-1)^{k_{m-1}} a_k, \quad k \in 0 : 2^m - 1. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно (1) при $m \geqslant 1$ имеем

$$Q_m(x) = P_{m-1}(x) - [P_m(x) - P_{m-1}(x)].$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} b_k &= a_k \quad \text{при } k \in 0 : 2^{m-1} - 1, \\ b_k &= -a_k \quad \text{при } k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Формула (3) является объединением этих соотношений. □

На основании (2) и (3) получаем явное представление для коэффициентов b_k при $m \geqslant 2$:

$$b_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}k_\alpha + k_{m-1}}, \quad k \in 0 : 2^m - 1.$$

Отметим также, что векторы $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{2^m-1})$ и $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{2^m-1})$ коэффициентов полиномов $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ ортогональны. Действительно, в силу (3)

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle &= \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k b_k = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^{k_{m-1}} a_k^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} + \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \right) (-1)^{k_{m-1}} = 0. \end{aligned}$$

2°. Нам потребуется одно свойство коэффициентов полинома $P_m(x)$.

ЛЕММА 1. *При $m \geqslant 2$ верны соотношения*

$$a_{2^m-1-k} = (-1)^{m+1+k} a_k, \quad k \in 0 : 2^{m-1} - 1; \tag{5}$$

$$a_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k} a_k, \quad k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \tag{6}$$

Доказательство. При $m = 2$ равенства (5) и (6) проверяются непосредственнно. Будем считать, что $m \geqslant 3$.

Сначала обратимся к равенству (5). Пусть $k \in 0 : 2^{m-1} - 1$, $k = (k_{m-2}, \ldots, k_0)_2$. Согласно (2)

$$a_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_{\alpha-1} k_\alpha}.$$

Далее

$$k' := 2^m - 1 - k = (1, 1 - k_{m-2}, \ldots, 1 - k_0)_2.$$

(Для проверки можно использовать тот факт, что

$$k + k' = 2^m - 1 = (1, \ldots, 1)_2.)$$

По формуле (2)

$$\begin{aligned} a_{k'} &= (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2}(1-k_{\alpha-1})(1-k_\alpha)+1-k_{m-2}} = \\ &= (-1)^{m-1-k_0-2\sum_{\alpha=1}^{m-2}k_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{m-2}k_{\alpha-1}k_\alpha} = (-1)^{m+1+k}a_k. \end{aligned}$$

Равенство (5) установлено.

Равенство (6) выводится с использованием (5). Пусть $k \in 2^{m-1} : 2^m - 1$. Тогда индекс $k' = 2^m - 1 - k$ принадлежит множеству $0 : 2^{m-1} - 1$. Согласно (5) имеем

$$a_{2^m-1-k'} = (-1)^{m+1+k'}a_{k'}$$

или

$$a_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k}a_k.$$

Лемма доказана. □

3°. Рассмотрим полиномы Шапиро как функции комлексной переменной z. Особый интерес представляет случай, когда $|z| = 1$.

Следующий результат был получен Г. Шапиро в 1951 году [3].

ТЕОРЕМА 2. *При $m \geqslant 1$ справедливы тождества*

$$P_m(-z) = (-1)^m z^{2^m-1} Q_m(\tfrac{1}{z}), \tag{7}$$

$$Q_m(-z) = (-1)^{m+1} z^{2^m-1} P_m(\tfrac{1}{z}). \tag{8}$$

Обычно эти тождества доказываются по индукции. Мы дадим прямое доказательство.

Начнём с формулы (7). При $m = 1$ её справедливость проверяется непосредственно. Будем считать, что $m \geqslant 2$.

Согласно (4) имеем

$$\begin{aligned} (-1)^m z^{2^m-1}\, Q_m(\tfrac{1}{z}) &= (-1)^m \sum_{k=0}^{2^m-1} b_k\, z^{2^m-1-k} = \\ = (-1)^m \Bigg[\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_k\, z^{2^m-1-k} &- \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} a_k\, z^{2^m-1-k} \Bigg]. \end{aligned}$$

Вместе с тем, в силу (6)

$$\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_k\, z^{2^m-1-k} = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} a_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} (-1)^{m+k} a_k\, z^k$$

и в силу (5)

$$-\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} a_k\, z^{2^m-1-k} = -\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} (-1)^{m+k} a_k\, z^k.$$

Значит,

$$(-1)^m z^{2^m-1}\, Q_m(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k a_k\, z^k = P_m(-z).$$

Справедливость тождества (7) установлена.

Подставим в (7) $-\frac{1}{z}$ вместо z. Получим

$$P_m(\tfrac{1}{z}) = (-1)^m (-\tfrac{1}{z})^{2^m-1} Q_m(-z) = (-1)^{m+1} z^{-2^m+1} Q_m(-z),$$

что равносильно (8).

Теорема доказана. □

4°. Остановимся на одном изящном свойстве коэффициентов полиномов Шапиро, отмеченном в работе [2].

Обозначим $\theta(m)$ количество положительных коэффициентов у $P_m(x)$.

ТЕОРЕМА 3. *При $m \geqslant 0$ выполняются равенства*

$$\theta(2m) = 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \tag{9}$$

$$\theta(2m+1) = 2^{2m} + 2^m. \tag{10}$$

Приведём подробное доказательство этого утверждения.

При $m = 0$ формулы (9) и (10) принимают вид $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 2$. Их справедливость очевидна.

Запишем при $m \geqslant 0$ выражение для $P_m(x)$,

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^k,$$

и для $P_{m+1}(x)$ (см. [1]),

$$P_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^{2k} + \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k a_k\, x^{2k+1}. \tag{11}$$

Обозначим через $\theta_0(m)$ количество положительных a_k с чётными индексами и через $\theta_1(m)$ — количество положительных a_k с нечётными индексами. Очевидно, что $\theta(m) = \theta_0(m) + \theta_1(m)$. Кроме того, согласно (11)

$$\theta_0(m+1) = \theta(m) \quad \text{при } m \geqslant 0.$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$\theta_0(m) = \theta(m-1) \quad \text{при } m \geqslant 1. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что при $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\theta(m+1) &= \theta(m) + \theta_0(m) + [2^{m-1} - \theta_1(m)] = \\ &= 2\theta_0(m) + 2^{m-1} = 2\theta(m-1) + 2^{m-1}.\end{aligned}$$

Приходим к рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered}\theta(m+1) - 2\theta(m-1) = 2^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots; \\ \theta(0) = 1, \quad \theta(1) = 2.\end{gathered} \tag{13}$$

Из него можно получить явное выражение для $\theta(m)$.

Разностное уравнение (13) имеет простое частное решение $\hat{\theta}(m) = 2^{m-1}$. Решение однородного уравнения $\theta(m+1) - 2\theta(m-1) = 0$ будем искать в виде $\theta(m) = \lambda^{m+1}$. Величина λ (точнее два её значения) определяются из условия $\lambda^2 - 2 = 0$. Приходим к общему решению уравнения (13)

$$\theta(m) = 2^{m-1} + c_1(\sqrt{2})^{m+1} + c_2(-\sqrt{2})^{m+1}.$$

Константы c_1 и c_2 выберим так, чтобы выполнялись начальные условия

$$\begin{aligned}1 &= \theta(0) = \tfrac{1}{2} + c_1\sqrt{2} - c_1\sqrt{2}, \\ 2 &= \theta(1) = 1 + 2c_1 + 2c_2.\end{aligned}$$

Получаем

$$c_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{8}, \quad c_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{8}.$$

Явное выражение для $\theta(m)$ принимает вид

$$\theta(m) = 2^{m-1} + \frac{2+\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2})^{m+1} + \frac{2-\sqrt{2}}{8}(-\sqrt{2})^{m+1}.$$

Отсюда очевидным образом следуют равенства (9) и (10).

Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. *При $m \geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}P_{2m}(1) &= 2^m, \qquad P_{2m+1}(1) = 2^{m+1}, \\ P_{2m}(-1) &= 2^m, \quad P_{2m+1}(-1) = 0.\end{aligned}$$

При $m = 0$ эти равенства очевидны. При $m \geqslant 1$ нужно воспользоваться тем, что

$$P_m(1) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k = \theta(m) - [2^m - \theta(m)] = 2\theta(m) - 2^m,$$

$$\begin{aligned} P_m(-1) = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k a_k &= \theta_0(m) - [2^{m-1} - \theta_0(m)] - \\ &- \left\{\theta_1(m) - [2^{m-1} - \theta_1(m)]\right\} = 2\,[\theta_0(m) - \theta_1(m)] = \\ &= 2\,[\,2\theta_0(m) - \theta(m)] = 2\,[\,2\theta(m-1) - \theta(m)]. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Полиномы Шапиро и коды Рида-Маллера* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 26 ноября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1126`)

2. Brillhart J., Carlitz L. *Note on the Shapiro polynomials* // Proceedings of the AMS. 1970. Vol. 25. No. 1. P. 114–118.

3. Shapiro H. S. *Extremal problems for polynomials and power series.* Master's thesis. Cambrige, Mass., 1951.

РАБОТЫ Л. В. КАНТОРОВИЧА О ПОЛИНОМАХ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

В. С. Виденский

8 февраля 2012 г.

1°. В 1912 году С. Н. Бернштейн, используя некоторые соображения из теории вероятностей, ввёл полиномы

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) p_{nk}(x), \tag{1}$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{2}$$

и установил, что для любой функции $f \in C[0,1]$ последовательность $\{B_n(f;x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к $f(x)$ равномерно по $x \in [0,1]$. Тем самым, было дано очень простое доказательство знаменитой теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении на отрезке непрерывной функции алгебраическими полиномами.

Работа С. Н. Бернштейна, занимавшая всего две страницы, была опубликована на французском языке в «Сообщ. Харьк. матем. об-ва». С. Н. Бернштейн разослал оттиски многим крупным математикам. Разумеется, в первую очередь авторам других доказательств теоремы Вейерштрасса: Лебегу, Фейеру и Эдм. Ландау.

В 1925 году Полиа и Сегё в своём сборнике задач поместили доказательство теоремы Бернштейна, которое, как и первоначальное, опиралось на теорию вероятностей, но при этом не привлекало её терминологии и техники. Необходимые тождества устанавливались непосредственно. В книгах по теории приближения функций теперь обычно излагается этот вариант. Кажется, в других работах до тридцатых годов не встречались какие-нибудь существенные результаты, связанные с полиномами (1).

2°. В 1930 году по инициативе академика С. Н. Бернштейна в Харькове состоялся Первый всесоюзный съезд математиков. На этом съезде три молодых математика Е. В. Вороновская, Л. В. Канторович и И. Н. Хлодовский сделали интересные доклады о свойствах и применении полиномов Бернштейна.

Л. В. Канторович исследовал приближение двух принципиально различных классов функций, а именно: функций, измеримых по Лебегу, и функций аналитических.

Для аппроксимации функций $f \in L[0,1]$ по базису Бернштейна (2) пространства полиномов степени n строятся полиномы

$$\Phi_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{nk}(f) p_{nk}(x), \tag{3}$$

где $\varphi_{nk}(f)$ — некоторые положительные функционалы, не обязательно линейные, подбираемые в зависимости от рассматриваемой задачи. Как правило, $\varphi_{nk}(f)$ — некоторое усреднение значений f в окрестности точек $\frac{k}{n}$. Этот метод видоизменения полиномов (1) Л. В. Канторович применял для явного построения полиномов, приближающих измеримые функции, в случаях, когда были известны только теоремы существования сходящихся последовательностей.

По теореме Фреше, если $f \in L[0,1]$, то существуют полиномы P_n, которые сходятся почти всюду к f. В качестве подходящих φ_{nk} Л. В. Канторович выбирает

$$\varphi_{nk}(f) = (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt,$$

то есть полиномы

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt. \tag{4}$$

Из полиномов Бернштейна (1) полиномы Канторовича (4) получаются так. Если

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

то

$$B'_{n+1}(F;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \big(F(\tfrac{k+1}{n+1}) - F(\tfrac{k}{n+1})\big) p_{nk}(x) = K_n(f;x).$$

Доказывается, что $K_n(f;x_0)$ сходится к $f(x_0)$ в каждой точке Лебега x_0, следовательно, почти всюду. Для оценки разности $\big|K_n(f;x_0) - f(x_0)\big|$ применяются известные из теории вероятностей неравенства для центральных моментов:

$$S_{2\nu,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (\tfrac{k}{n} - x)^{2\nu} p_{nk}(x) \leqslant A_\nu \frac{x(1-x)}{n^\nu}. \tag{5}$$

3°. Приводится также другой вариант применения операторов (3). Рассматривается вопрос о приближении на отрезке $[0,1]$ полунепрерывных сверху и ограниченных сверху функций f. По теореме Бэра для любой такой функции существует последовательность полиномов, которая сходится к ней на $[0,1]$. Л. В. Канторович строит приближающие полиномы, полагая

$$\varphi_{nk}(f) = \max\bigl(f(x) \mid |\tfrac{k}{n} - x| \leqslant \tfrac{3}{\sqrt[3]{n}}\bigr). \tag{6}$$

Выбор окрестностей точек $\frac{k}{n}$ диктуется применением в дальнейшем неравенства (5) при $\nu = 9$. Обозначим оператор (3) с $\varphi_{nk}(f)$ вида (6) через $\bar{\Phi}_n(f;x)$. Доказывается, что для всех $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\Phi}_n(f;x) = f(x); \quad \bar{\Phi}_n(f;x) \geqslant f(x).$$

4°. Вторую часть доклада Л. В. Канторович посвятил аппроксимации аналитических на отрезке $[0,1]$ функций. Для исследования поставленных проблем оказались достаточными классические полиномы (1), и не потребовались их видоизменения (3).

Сначала рассматривается случай, когда f является целой функцией. К её степенному ряду

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

почленно применяется оператор Бернштейна

$$B_n\bigl(f(t);z\bigr) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B_n(t^k;z).$$

Легко доказать по индукции, что при $R > 1$ в круге $|z| \leqslant R$ выполняются неравенства

$$\bigl|B_n(t^k;z)\bigr| \leqslant 3^{k-1}R^k,$$

в которых правая часть не зависит от n. Таким образом,

$$\bigl|B_n(f;z)\bigr| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| 3^{k-1} R^k = S(R).$$

Значит, последовательность $\bigl\{B_n(f;z)\bigr\}$ по теореме Монтеля компактна в круге $|z| \leqslant R$. С другой стороны, она равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[0,1]$; следовательно, по теореме Витали последовательность $\bigl\{B_n(f;z)\bigr\}$ сходится равномерно к $f(z)$ в круге $|z| \leqslant R$.

5°. В 1912 году С. Н. Бернштейн исследовал наилучшее приближение функции f, аналитической на отрезке $[a, b]$. С этой целью он разложил f в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышёва T_k:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(t). \tag{7}$$

Обозначим через E некоторый эллипс с центром в середине отрезка $[a, b]$ и полюсами на его концах a и b. Если f регулярна внутри и на границе E, то ряд (7) сходится равномерно на $\bar{E}$.

Л. В. Канторович рассмотрел приближение полиномами Бернштейна аналитической на отрезке $[0, 1]$ функции f и применил почленно к ряду (7) оператор B_n:

$$B_n(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B_n(T_k; z).$$

По схеме, аналогичной той, которая была использована для целых функций, Л. В. Канторович доказал, что последовательность $\{B_n(f; z)\}$ компактна на E и равномерно сходится к $f(z)$ на $\bar{E}$. Неожиданно он попутно заметил, что иногда в некоторых точках z_0, не лежащих в E, $\lim_{n\to\infty} B_n(f; z_0) = f(z_0)$.

6°. Эти работы Л. В. Канторовича очень заинтересовали академика С. Н. Бернштейна, который представил две его статьи в академические журналы; одну в ДАН(1930) и другую в ИАН(ОМЕН) (1931). Кроме того, С. Н. Бернштейн и сам включился в исследование области сходимости $\{B_n(f)\}$ к f, когда f аналитическая на $[0, 1]$. На эту тему он опубликовал в 1936 году две краткие заметки и одну большую статью в 1943 году. Эта статья начинается словами: «Вопрос о сходимости в комплексной области многочленов $B_n(f)$ впервые был рассмотрен Л. В. Канторовичем в прекрасной работе [2]».

Мне кажется, что во всех четырёх томах Сочинений С. Н. Бернштейна не найдётся больше ни одного столь похвального отзыва о какой-нибудь работе другого автора.

С. Н. Бернштейн получил новые глубокие результаты, выразив полином $B_n(f; z)$ через контурный интеграл и использовав всю мощь технического аппарата теории функций комплексного переменного.

7°. По совету Л. В. Канторовича Г. Р. Лоренц рассмотрел вопрос о приближении $f \in L^p[0, 1]$ полиномами. Он доказал, что последовательность полиномов $\{K_n(f)\}$ сходится к f в метрике пространства L^p.

В. Г. Амелькович — ученица львовского профессора И. Г. Соколова — исследовала в общем виде операторы Канторовича (3). Приведём вкратце её интересный результат. Пусть $\varphi_{nk}(f)$ — линейные положительные функционалы, определённые на $[0, 1]$, и все $\varphi_{nk}(1)$ равны единице, так что $\Phi_n(1; x) = 1$.

Обозначим
$$\delta_n = \left\|\Phi_n(t^2;x) - x^2\right\| + 2\left\|\Phi_n(t;x) - x\right\|.$$
Справедливо неравенство
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n\delta_n \geqslant c, \tag{8}$$
где постоянная c положительна, $c \geqslant 0,01$. Мы видим, что по крайней мере одна из двух функций t или t^2 не может быть приближена операторами Φ_n со скоростью, большей чем n^{-1}. Неравенство (8) было выведено при помощи рассуждений, которые Л. В. Канторович применил для доказательства теорем Фреше и Бэра.

В. С. Виденский вывел неравенство (8) иным способом и вычислил, что $c = 0,25$. Это точная постоянная; равенство достигается для полиномов Бернштейна при любом n.

8°. Съезд математиков в Харькове проходил через 18 лет после того, как были построены полиномы Бернштейна. Однако, к тому времени еще немногие начали их применять или исследовать их свойства. Л. В. Канторович был в числе первых, кто внёс серьёзный вклад в применение и обобщение этих полиномов.

Затем ситуация резко изменилась. Многие математики стали интересоваться полиномами Бернштейна и линейными положительными операторами бернштейновского типа. Библиография работ в этом направлении за последние 60 лет насчитывает больше чем 1500 названий.

Я благодарен проф. В. Н. Малозёмову, который выдвинул тему этой заметки и обсудил со мной в общих чертах её содержание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. *О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна.* ДАН(А), 1930, **20**, с. 563–566; **21**, с. 595–600.

2. Л.В.Канторович. *О сходимости последовательности полиномов С.Н.Бернштейна за пределами основного интервала.* ИАН(ОМЕН), 1931, с. 1103–1115.

3. Л. В. Канторович. *La representation explicite d'une fonction mesurable arbitraire dans la forme de la limite d'une suite de polynomes.* Матем. сб., 1934, **41**, с. 508–510.

4. С. Н. Бернштейн. *Сочинения.* Т.1. М. 1952; Т.2. М. 1954. Статьи № 3, 4, 57, 64, 65, 81.

5. Г. Р. Лоренц. *Zur Theorie der Polynome von S. Bernstein.* Матем.сб., 1937, **2** (44), с. 543–556.

6. В. Г. Амелькович. *Об одном семействе положительных полиномиальных операторов.* В сб. «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций». Баку, 1965, с. 98–104.

7. В. С. Виденский. *Многочлены Бернштейна.* Л.: Изд-во ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990, п. 10, 11.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СХЕМЫ SUBDIVISION

Н. В. Чашников

11 февраля 2012 г.

Данный доклад основан на статье [1] и является продолжением доклада [2]. Описана связь схемы subdivision с масштабирующим уравнением. Приведены достаточные условия гладкости предельной функции процесса subdivision.

1°. Напомним основные обозначения и результаты из [2].

Пусть задана маска subdivision $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Процесс subdivision заключается в построении последовательностей векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, определяемых рекуррентным соотношением

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_{l-2k}\, \mathbf{p}_k^{m-1}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Обозначим через $s(z)$ производящую функцию последовательности $\{s_k\}$, а через $\mathbf{p}^m(z)$ — производящие функции последовательностей $\{\mathbf{p}_k^m\}$ при $m = 0, 1, 2, \ldots$. Равенство (1) можно переписать с использованием производящих функций:

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\, \mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

При каждом m с помощью последовательности векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$ строится кусочно-линейная вектор-функция

$$\mathbf{P}^m(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\, \widehat{N}(2^m t - k), \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\widehat{N}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Если схема subdivision сходится, то последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ равномерно сходится к вектор-функции, обозначаемой $\mathbf{P}(t)$. Схема subdivision называется вырожденной, если для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ сходится к вектор-функции, тождественно равной нулю.

Согласно теореме 1 из [2], необходимым условием сходимости невырожденной схемы subdivision является выполнение равенств

$$\sum_k s_{2k} = \sum_k s_{2k+1} = 1. \tag{3}$$

Равенства (3) могут быть записаны в эквивалентной форме при помощи производящей функции $s(z)$:

$$s(1) = 2, \quad s(-1) = 0. \tag{4}$$

2°. В докладе [3] схема subdivision строилась на основании масштабирующего уравнения для B-сплайнов. Оказывается, аналогичное уравнение связано и со схемой subdivision общего вида.

ЛЕММА 1. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится и удовлетворяет условиям* (4). *Тогда при любом начальном наборе контрольных точек для предельной вектор-функции справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t)\,dt = \sum_k \mathbf{p}_k^0. \tag{5}$$

Доказательство. Фиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. При любом натуральном m в силу условия (4) имеем

$$\mathbf{p}^m(1) = s(1)\,\mathbf{p}^{m-1}(1) = 2\,\mathbf{p}^{m-1}(1) = \dots = 2^m\,\mathbf{p}^0(1).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}^m(t)\,dt = \sum_k \mathbf{p}_k^m \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{N}(2^m t - k)\,dt =$$
$$= \sum_k \mathbf{p}_k^m\, 2^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{N}(\tau - k)\,d\tau = 2^{-m}\,\mathbf{p}^m(1) = \mathbf{p}^0(1).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t)\,dt = \mathbf{p}^0(1) = \sum_k \mathbf{p}_k^0,$$

что и требовалось. □

ТЕОРЕМА 1. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится и невырождена. Тогда существует единственная функция $\varphi \in C(\mathbb{R})$, обладающая следующими свойствами:*

1) $\operatorname{supp}\varphi$ *— компактное множество;*

2) справедливо масштабирующее уравнение

$$\varphi(t) = \sum_k s_k\, \varphi(2t-k), \qquad t \in \mathbb{R}; \tag{6}$$

3) выполняется тождество

$$\sum_k \varphi(t-k) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Кроме того, для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ предельная функция процесса subdivision выражается формулой

$$\mathbf{P}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^0\, \varphi(t-k). \tag{8}$$

Доказательство. Определим начальный набор контрольных точек в пространстве $\mathbb{R}$:

$$f_k^0 = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{f_k^m\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге m процесса subdivision, а через $f^m(z)$ — соответствующую производящую функцию. Введём кусочно-линейные функции

$$F^m(t) = \sum_k f_k^m \widehat{N}(2^m t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как схема subdivision сходится, существует предел функций F^m при неограниченном увеличении m. Предельную функцию и возьмём в качестве функции $\varphi(t)$.

Проверим справедливость равенства (8). Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Применяя рекуррентное соотношение (2), при натуральном m получаем

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = s(z)s(z^2)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \cdots = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j})\mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Производящая функция $f^0(z)$ последовательности $\{f_k^0\}$ тождественно равна единице. Поэтому аналогичные рассуждения для функции $f^m(z)$ приводят к равенству

$$f^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j}).$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\mathbf{p}^m(z) = f^m(z)\mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Перепишем данное тождество в терминах последовательностей:

$$\mathbf{p}_k^m = \sum_l f_{l-2^m l}^m \, \mathbf{p}_l^0.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^m(t) &= \sum_k \mathbf{p}_k^m \widehat{N}(2^m t - k) = \sum_k \sum_l f_{l-2^m l}^m \, \mathbf{p}_l^0 \widehat{N}(2^m t - k) = \\ &= \sum_l \mathbf{p}_l^0 \sum_j f_j^m \widehat{N}(2^m t - 2^m l - j) = \sum_l \mathbf{p}_l^0 F^m(t - l).\end{aligned}$$

При неограниченном увеличении m в пределе получаем равенство (8).

Проверим, что φ обладает свойствами 1–3. Свойство 1 непосредственно следует из леммы, доказанной в [2].

Определим начальный набор контрольных точек следующим образом:

$$\mathbf{p}_k^0 = f_k^1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В таком случае при $m \geqslant 0$ справедливо равенство $\mathbf{p}_k^m = f_k^{m+1}$. Для любого вещественного t имеем

$$\mathbf{P}^m(2t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m \widehat{N}(2^{m+1} t - k) = \sum_k f_k^{m+1} \widehat{N}(2^{m+1} t - k) = F^{m+1}(t).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, устанавливаем справедливость тождества

$$\mathbf{P}(2t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу рекуррентного соотношения (2) выполнено равенство $f^1(z) = s(z)f^0(z^2) = s(z)$. Отсюда вытекает, что $f_k^1 = s_k$ при всех k. Поэтому из доказанного тождества (8) следует, что

$$\mathbf{P}(2t) = \sum_k s_k \, \varphi(2t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из последнего равенства и равенства (9) заключаем, что верно соотношение (6). Свойство 2 для функции $\varphi(t)$ подтверждено.

Положим

$$\psi(t) = \sum_k \varphi(t-k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Применяя равенства (3) и мастшабирующее уравнение (6), записываем

$$\psi(2t) = \sum_k \varphi(2t-k) = \sum_k \Big(\sum_j s_{k-2j}\Big) \varphi(2t-k) = \sum_j \sum_k s_{k-2j}\, \varphi(2t-k) =$$
$$= \sum_j \sum_l s_l\, \varphi(2t-2j-l) = \sum_j \varphi(t-j) = \psi(t).$$

Значит, при любом натуральном m выполняется равенство $\psi(t) = \psi(2^{-m}t)$. В силу непрерывности функции ψ имеем

$$\psi(t) = \lim_{m\to\infty} \psi(2^{-m}t) = \psi(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, функция ψ постоянна. Используя лемму 1, получаем

$$\int_0^1 \psi(t)\, dt = \sum_k \int_0^1 \varphi(t-k)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = \sum_k f_k^0 = 1.$$

Следовательно, функция ψ тождественно равна единице. Свойство 3 установлено.

Осталось доказать, что φ — единственная функция, обладающая свойствами 1–3. Предположим, что функция $\widetilde{\varphi}$ также удовлетворяет этим условиям. Покажем при помощи метода математической индукции, что при всех $m \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\sum_k f_k^m\, \widetilde{\varphi}(2^m t - k) = \widetilde{\varphi}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

При $m = 0$ равенство (10) проверяется непосредственно. Сделаем индукционный переход от $m-1$ к m. Пользуясь рекуррентным соотношением (1) и мастшабирующим уравнением (6), записываем

$$\sum_k f_k^m\, \widetilde{\varphi}(2^m t - k) = \sum_k \sum_l s_{k-2l}\, f_l^{m-1}\, \widetilde{\varphi}(2^m t - k) =$$
$$= \sum_l f_l^{m-1} \sum_j s_j\, \widetilde{\varphi}(2^m t - 2l - j) = \sum_l f_l^{m-1} \widetilde{\varphi}(2^{m-1} t - l) = \widetilde{\varphi}(t).$$

Тождество (10) доказано.

При $m \geqslant 0$ в силу равенств (10) и (7) для функции $\widetilde{\varphi}$ имеем

$$|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| = \left| \sum_k f_k^m \, \widetilde{\varphi}(2^m t - k) - \sum_k \varphi(t) \, \widetilde{\varphi}(2^m t - k) \right| =$$

$$= \left| \sum_k \bigl(f_k^m - \varphi(t)\bigr) \widetilde{\varphi}(2^m t - k) \right| \leqslant \sum_k \bigl| f_k^m - \varphi(2^{-m} k) \bigr| \, \bigl| \widetilde{\varphi}(2^m t - k) \bigr| +$$

$$+ \sum_k \bigl| \varphi(2^{-m} k) - \varphi(t) \bigr| \, \bigl| \widetilde{\varphi}(2^m t - k) \bigr|.$$

Покажем, что обе суммы в последнем выражении стремятся к нулю при неограниченном увеличении m. Носитель $\widetilde{\varphi}$ компактен, поэтому существует положительное целое L такое, что

$$\operatorname{supp} \widetilde{\varphi} \subset [-L, L].$$

В каждой из сумм не больше $2L+1$ ненулевых слагаемых. Так как функция φ является пределом последовательности функций F^m, то величина

$$\bigl| f_k^m - \varphi(2^{-m} k) \bigr| = \bigl| F^m(2^{-m} k) - \varphi(2^{-m} k) \bigr|$$

стремится к нулю равномерно по k. Принимая во внимание ограниченность функции $\widetilde{\varphi}$ получаем, что первая сумма стремится к нулю.

Если $\widetilde{\varphi}(2^m t - k)$ отлично от нуля, то $|2^m t - k| \leqslant L$, так что справедливо неравенство $|t - 2^{-m} k| \leqslant 2^{-m} L$. В силу равномерной непрерывности функции φ выражение

$$\bigl| \varphi(2^{-m} k) - \varphi(t) \bigr|$$

стремится к нулю равномерно по k. Пользуясь ограниченностью функции $\widetilde{\varphi}$, приходим к заключению, что и вторая сумма стремится к нулю при неограниченном возрастании m.

Итак, $|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| = 0$ при всех вещественных t. Следовательно, функция $\widetilde{\varphi}$ тождественно равна φ.

Теорема доказана. □

3°. Перейдём к описанию достаточных условий гладкости предельной вектор-функции процесса subdivision.

ЛЕММА 2. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится и невырождена. Определим последовательность $\{s_k^1\}$ формулой*

$$s_k^1 = \frac{s_k + s_{k-1}}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Тогда схема subdivision с маской $\{s_k^1\}$ также сходится и невырождена.

Доказательство. Производящая функция $s^1(z)$ последовательности $\{s_k^1\}$ имеет вид

$$s^1(z) = \tfrac{1+z}{2}\, s(z).$$

Для схемы subdivision с маской $\{s_k\}$ выполнены необходимые условия сходимости (4). В частности, $s(1) = 2$. Поэтому равенства (4) верны и для функции $s^1(z)$. Справедлива формула $s^1(z) = (1+z)d(z)$, где $d(z) = \frac{1}{2}s(z)$.

Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Положим $\mathbf{q}^0(z) = \Delta\mathbf{p}^0(z)$ и рассмотрим процесс subdivision с маской $\{s_k\}$ и начальным набором контрольных точек $\{\mathbf{q}_k^0\}$. Обозначим через $\{\mathbf{q}_k^m\}$ последовательность, получаемую на шаге m, через $\mathbf{Q}^m$ — соответствующую ей кусочно-линейную вектор-функцию. Так как схема с маской $\{s_k\}$ сходится, то последовательность вектор-функций $\mathbf{Q}^m$ имеет предел. Отсюда, в частности, следует, что последовательность $\max_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{Q}^m(t)\|$ ограничена сверху некоторой константой $c > 0$. Имеем

$$\max_k \|\mathbf{q}_k^m\| \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{Q}^m(t)\| \leqslant c. \tag{12}$$

Рассмотрим процесс subdivision с маской $\{s_k^1\}$ для начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Из доказательства теоремы 3 в [2] известно рекуррентное соотношение

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m \geqslant 1.$$

Применяя это соотношение m раз, получаем

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = d(z)d(z^2)\Delta\mathbf{p}^{m-2}(z^2) = \cdots = \left(\prod_{j=0}^{m-1} d(z^{2^j})\right)\Delta\mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Аналогично, применяя m раз рекуррентное соотношение (2) для производящей функции $\mathbf{q}^m(z)$, запишем

$$\mathbf{q}^m(z) = s(z)\mathbf{q}^{m-1}(z^2) = s(z)s(z^2)\Delta\mathbf{q}^{m-2}(z^2) = \cdots = \left(\prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j})\right)\mathbf{q}^0(z^{2^m}).$$

Вместе эти два тождества дают равенство

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = \left(\prod_{j=0}^{m-1} \tfrac{1}{2}s(z^{2^j})\right)\Delta\mathbf{p}^0(z^{2^m}) = 2^{-m}\mathbf{q}^m(z).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\| = 2^{-m} \max_k \mathbf{q}_k^m \leqslant 2^{-m}, c.$$

Используя теорему 2 из [2] с $\gamma = \frac{1}{2}$ заключаем, что схема subdivision с маской $\{s_k^1\}$ сходится.

Осталось проверить невырожденность схемы subdivision с маской $\{s_k^1\}$. Возьмём любой начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ с ненулевой суммой. Производящая функция $s^1(z)$ удовлетворяет условию (4), поэтому по лемме 1 получаем, что предельная вектор-функция не может быть тождественно равна нулю.

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 2. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится. Тогда для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ процесс subdivision с маской $\{s_k^1\}$, задаваемой формулой* (11), *сходится к вектор-функции $\mathbf{P}(t)$ класса $C^1(\mathbb{R})$. Кроме того, процесс subdivision с маской $\{s_k\}$ и начальным набором контрольных точек $\{\Delta\mathbf{p}_k^0\}$ сходится к вектор-функции $\mathbf{P}'(t)$.*

Доказательство. По теореме 1 для схемы с маской $\{s_k\}$ найдётся функция $\varphi(t)$, обладающая свойствами (6) и (7). Положим

$$\psi(t) = \int_0^1 \varphi(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Переписывая интеграл в виде

$$\int_{t-1}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau$$

получаем, что

$$\psi'(t) = \varphi(t) - \varphi(t-1), \quad t \in \mathbb{R},$$

поэтому $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

В силу леммы 2 схема subdivision с маской $\{s_k^1\}$ сходится и невырождена. Покажем, что функция ψ обладает свойствами 1–3 из формулировки теоремы 1 для схемы subdivision с маской $\{s_k^1\}$. Компактность носителя ψ следует из аналогичного свойства функции φ. Проверим справедливость масштабирующего уравнения (6). Имеем

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^1 \varphi(t-\tau)\,d\tau = \int_0^1 \sum_k s_k\,\varphi(2t-2\tau-k)\,d\tau = \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_k \int_0^2 s_k\,\varphi(2t-\tau-k)\,d\tau = \tfrac{1}{2}\sum_k s_k\Bigg(\int_0^1 \varphi(2t-\tau-k)\,d\tau + \\ &\quad + \int_0^1 \varphi(2t-\tau-k-1)\,d\tau\Bigg) = \tfrac{1}{2}\sum_k s_k\big(\psi(2t-k)+\psi(2t-k-1)\big) =\end{aligned}$$

$$= \sum_k \frac{s_k + s_{k-1}}{2}\,\psi(2t-k) = \sum_k s_k^1\,\psi(2t-k).$$

Свойство 2 для функции $\psi(t)$ установлено. Проверим свойство 3:

$$\sum_k \psi(t-k) = \sum_k \int_0^1 \varphi(t-k-\tau)\,d\tau = \int_0^1 \Big(\sum_k \varphi(t-\tau-k)\Big)\,d\tau = 1.$$

Итак, функция ψ удовлетворяет условиям 1–3 из формулировки теоремы 1. Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Предельная вектор-функция $\mathbf{P}$ по теореме 1 может быть представлена в виде (8):

$$\mathbf{P}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^0\,\psi(t-k).$$

Следовательно, вектор-функция $\mathbf{P}$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'(t) &= \sum_k \mathbf{p}_k^0\,\psi'(t-k) = \sum_k \mathbf{p}_k^0\big(\varphi(t-k) - \varphi(t-k-1)\big) = \\ &= \sum_k (\mathbf{p}_k^0 - \mathbf{p}_{k-1}^0)\,\varphi(t-k) = \sum_k \Delta\mathbf{p}_k^0\,\varphi(t-k).\end{aligned}$$

Согласно теореме 1, последнее выражение совпадает с предельной вектор-функцией процесса subdivision с маской $\{s_k\}$ для начального набора контрольных точек $\{\Delta\mathbf{p}_k^0\}$.

Теорема доказана. □

4°. Покажем, как метод subdivision используется для построения кривых. Пусть заданы маска $\{s_k\}$ и начальные точки $\mathbf{p}_0^0, \mathbf{p}_1^0, \ldots, \mathbf{p}_N^0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Положим $\mathbf{p}_k^0 = 0$ при остальных целых k. Проведём процесс subdivision для начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Кусочно-линейные вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$ определяют ломаные в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если процесс subdivision сходится, то ломаные стремятся к кривой, задаваемой предельной вектор-функцией $\mathbf{P}(t)$. В таком случае процесс subdivision можно рассматривать как процесс построения ломаных, являющихся приближениями предельной кривой. Меняя начальные контрольные точки $\{\mathbf{p}_k^0\}$, можно влиять на форму получаемых ломаных и предельной кривой.

Заметим, что все вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$ и вектор-функция $\mathbf{P}(t)$ равны нулю вне некоторого отрезка. Поэтому соответствующие ломаные и предельная кривая начинаются и заканчиваются в начале координат независимо от набора точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. С практической точки зрения имеет смысл рассматривать вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$ при таких t, для которых на значение вектор-функции

не влияют искусственно добавленные в последовательность $\{\mathbf{p}_k^0\}$ нулевые члены. Покажем, как найти множества таких t.

Введём обозначения

$$a = \min\{k \mid s_k \neq 0\}, \qquad b = \max\{k \mid s_k \neq 0\}.$$

Рекуррентное соотношение (1) можно записать в виде

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_{\frac{l-b}{2} \leqslant k \leqslant \frac{l-a}{2}} s_{l-2k}\, \mathbf{p}_k^{m-1}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

На первом шаге subdivision по формуле (13) строятся векторы $\mathbf{p}_l^1$. Найдём диапазон индексов l, для которых в правой части формулы (13) не участвуют искусственно введённые нулевые члены из набора $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Обозначим этот диапазон через $a_1 : b_1$. Аналогично, на втором шаге вычислим диапазон индексов l, для которых в правой части формулы (13) участвуют только индексы k из множества $a_1 : b_1$. Продолжая этот процесс, обозначим через $a_m : b_m$ диапазон индексов, получаемый на шаге m. Числа a_m, b_m определяются из равенства

$$a_m : b_m = \left\{ l \in \mathbb{Z} \;\middle|\; [\tfrac{l-b}{2}, \tfrac{l-a}{2}] \subset [a_{m-1}, b_{m-1}] \right\}.$$

Приходим к рекуррентному соотношению

$$a_m = 2\, a_{m-1} + b, \quad b_m = 2\, b_{m-1} + a, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

с начальными условиями $a_0 = 0$, $b_0 = N$. При всех натуральных m имеем

$$\begin{aligned} 2^{-m}\, a_m &= 2^{-(m-1)}\, a_{m-1} + 2^{-m}\, b = 2^{-(m-2)}\, a_{m-2} + 2^{-(m-1)}\, b + 2^{-m}\, b = \cdots = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\, b = (1 - 2^{-m})b. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} 2^{-m}\, b_m &= 2^{-(m-1)}\, b_{m-1} + 2^{-m}\, a = 2^{-(m-2)}\, b_{m-2} + 2^{-(m-1)}\, a + 2^{-m}\, a = \cdots = \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\, a = N + (1 - 2^{-m})a. \end{aligned}$$

Итак, при построении ломаной, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{P}^m(t)$, значения t берутся из отрезка

$$[2^{-m}\, a_m,\, 2^{-m}\, b_m] = \big[(1 - 2^{-m})b,\, N + (1 - 2^{-m})a\big].$$

Устремляя m к бесконечности получаем, что предельная кривая определяется вектор-функцией $\mathbf{P}(t)$ при $t \in [b, N + a]$.

5°. Предположим, что маска subdivision $\{s_k\}$ удовлетворяет условию

$$s_{2k} = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Для всех натуральных m и целых k имеем

$$\mathbf{p}_{2k}^m = \sum_l s_{2k-2l}\mathbf{p}_l^{m-1} = \mathbf{p}_k^{m-1}.$$

Последовательно применяя данное равенство, запишем

$$\mathbf{p}_{2^m k}^m = \mathbf{p}_{2^{m-1}k}^{m-1} = \cdots = \mathbf{p}_k^0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}^m(k) = \mathbf{p}_{2^m k}^m = \mathbf{p}_k^0. \tag{15}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим равенство

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{p}_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Обратимся к геометрической интерпретации процесса subdivision. Если маска subdivision удовлетворяет условию (14), то равенства (15) и (16) означают, что как построенные на каждом шаге ломаная, так и предельная кривая проходят через начальные контрольные точки. Такие схемы subdivision называют *интерполяционными*.

6°. Пусть маска subdivision задаётся производящей функцией

$$s(z) = \tfrac{1}{16}(-z^{-3} + 9z^{-1} + 16 + 9z - z^3).$$

Покажем, что для любого начального набора контрольных точек процесс subdivision сходится к вектор-функции класса C^1. Функцию $s(z)$ можно записать в виде $s(z) = \frac{1+z}{2}s^0(z)$, где

$$s^0(z) = \tfrac{1}{8}(-z^{-3} + z^{-2} + 8z^{-1} + 8 + z - z^2).$$

Функция $s^0(z)$, в свою очередь, представляется в виде $s^0(z) = (1+z)d(z)$, где

$$d(z) = \tfrac{1}{8}(-z^{-3} + 2z^{-2} + 6z^{-1} + 2 - z).$$

Воспользуемся теоремой 3 из [2] для схемы с маской $s^0(z)$. Если взять $r = 1$, то получим

$$\delta = \max_k \sum_l |d_{k-2l}| = \max\{1, \tfrac{1}{2}\} = 1,$$

и условие теоремы не выполнено. При $r = 2$ имеем

$$\tilde{d}(z) = d(z)d(z^2) = \tfrac{1}{64}(z^{-9} - 2z^{-8} - 8z^{-7} + 2z^{-6} + 7z^{-5} + 16z^{-4} + 32z^{-3} + \\ + 16z^{-2} + 7z^{-1} + 2 - 8z - 2z^2 + z^3).$$

В этом случае

$$\delta = \max_k \sum_l |\tilde{d}_{k-4l}| = \max\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{16}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{16}\} = \tfrac{3}{4}.$$

Условие теоремы 3 из [2] выполнено. Следовательно, схема subdivision с маской $s^0(z)$ сходится. По теореме 2 исходный процесс subdivision с маской $\{s_k\}$ для любого начального набора контрольных точек сходится к вектор-функции класса C^1.

Последовательность коэффициентов функции $s(z)$ удовлетворяет условию (14), поэтому схема subdivision является интерполяционной. Она называется *четырёхточеченой интерполяционной схемой* [4].

ПРИМЕР. Приведём пример построения ломаных при помощи четырёхточечной интерполяционной схемы subdivision. На рис. 1 изображена ломаная с вершинами в начальных контрольных точках $\{\mathbf{p}_k^0\}$. На рис. 2 показан переход от ломаной $\{\mathbf{p}_k^0\}$ к $\{\mathbf{p}_k^1\}$, на рис. 3 — от $\{\mathbf{p}_k^1\}$ к $\{\mathbf{p}_k^2\}$. При этом исходная ломаная изображена штриховой линией, а преобразованная ломаная — сплошной линией и её вершины отмечены кружками. На рис. 4 представлена ломаная, задаваемая последовательностью $\{\mathbf{p}_k^3\}$, и начальные контрольные точки.

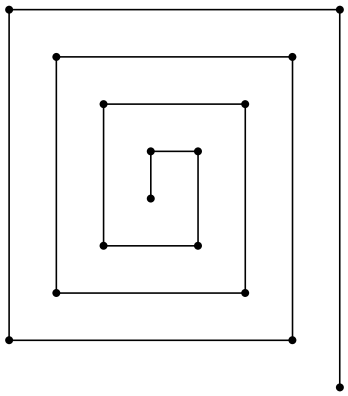


Рис. 1. $\{\mathbf{p}_k^0\}$

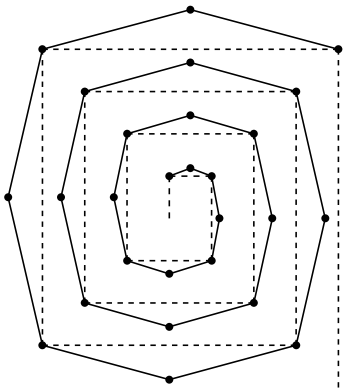


Рис. 2. $\{\mathbf{p}_k^1\}$

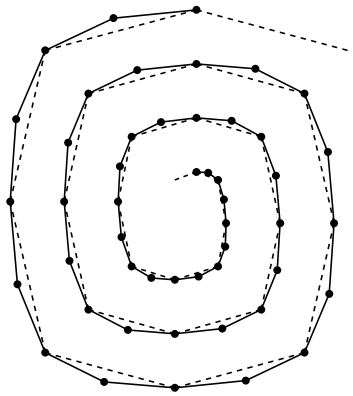


Рис. 3. $\{\mathbf{p}_k^2\}$

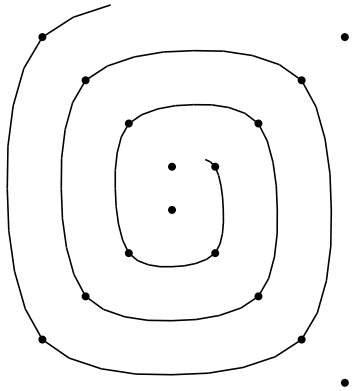


Рис. 4. $\{\mathbf{p}_k^3\}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyn N. *Subdivision schemes in CAGD* // Advances in Numerical Analysis II: Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Functions. 1991. P. 36–104.

2. Чашников Н. В. *Сходимость схемы subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 3 декабря 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1203`).

3. Чашников Н. В. *Построение кривых методом subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1001`).

4. Dyn N., Levin D., Gregory J. *A 4-point interpolatory scheme for curve design* // Computer Aided Geometric Design. 1987. Vol 4. P. 257–268.

ПОЛИНОМЫ ШАПИРО ВТОРОГО РОДА

И. С. Стояноска

17 марта 2012 г.

1°. Полиномы Шапиро определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} P_{m+1}(x) &= P_m(x) + x^{2^m} Q_m(x), \\ Q_{m+1}(x) &= P_m(x) - x^{2^m} Q_m(x). \end{aligned} \tag{1}$$

при $m = 0, 1, \ldots$ и начальных условий

$$P_0(x) \equiv 1, \quad Q_0(x) \equiv 1$$

(см. [1, 2]). Полином $Q_m(x)$ называется *дополнительным* к полиному $P_m(x)$. Оба полинома $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ имеют степень $2^m - 1$.

Коэффициенты полиномов Шапиро принимают значения ± 1. Для них можно записать явное представление. Пусть

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^k, \quad Q_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} b_k\, x^k.$$

С индексом $k \in 0 : 2^m - 1$ свяжем его двоичный код

$$k = (k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots, k_0)_2,$$

где $k_\alpha \in \{0, 1\}$. Тогда (см. [2, 3, 4]) при $m \geqslant 2$ и $k \in 0 : 2^m - 1$

$$a_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}\, k_\alpha}, \quad b_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}\, k_\alpha + k_{m-1}}. \tag{2}$$

Величина

$$\varphi(k) = \sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}\, k_\alpha$$

показывает, сколько раз в двоичном коде индекса k встречается блок $[1\ \ 1]$.

Полиномы Шапиро второго рода определим с помощью тех же рекуррентных соотношений (1), но при других начальных условиях

$$P_0(x) \equiv 1, \quad Q_0(x) \equiv -1.$$

Соответствующие полиномы обозначим $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$. В статье изучаются их свойства, включая связь с полиномами Шапиро первого рода.

2°. Из (1), в частности, следует, что

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_1(x) = 1 - x, && \tilde{Q}_1(x) = 1 + x,\\
&\tilde{P}_2(x) = 1 - x + x^2 + x^3, && \tilde{Q}_2(x) = 1 - x - x^2 - x^3,\\
&\tilde{P}_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3 + && \tilde{Q}_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3 -\\
&\qquad + x^4 - x^5 - x^6 - x^7, && \qquad - x^4 + x^5 + x^6 + x^7.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Справедливы формулы*

$$\tilde{P}_{m+1}(x) = \tilde{P}_m(-x^2) - x\,\tilde{P}_m(x^2), \quad m = 0, 1, \ldots; \tag{3}$$

$$\tilde{Q}_{m+1}(x) = \tilde{Q}_m(-x^2) - x\,\tilde{Q}_m(x^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Доказательство. Тождество (3) при $m = 0, 1, 2$ и тождество (4) при $m = 1, 2$ проверяются непосредственно. Сделаем индукционный переход от m к $m + 1$, считая, что $m \geqslant 2$.

Перепишем соотношения (1), заменив в них m на $m - 1$ и x на x^2:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_m(x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(x^2),\\
\tilde{Q}_m(x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(x^2) - x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(x^2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Теперь заменим в (1) m на $m - 1$ и x на $-x^2$. Учитывая, что $(-x^2)^{2^{m-1}} = x^{2^m}$ при $m \geqslant 2$, получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_m(-x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(-x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(-x^2),\\
\tilde{Q}_m(-x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(-x^2) - x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(-x^2).
\end{aligned} \tag{6}$$

На основании (1), (5), (6) и индукционного предположения придём к формуле (3). Действительно,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{m+1}(x) = \tilde{P}_m(x) + x^{2^m}\tilde{Q}_m(x) &= \tilde{P}_{m-1}(-x^2) - x\tilde{P}_{m-1}(x^2) +\\
&+ x^{2^m}\big[\tilde{Q}_{m-1}(-x^2) - x\,\tilde{Q}_{m-1}(x^2)\big] = \tilde{P}_{m-1}(-x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(-x^2) -\\
&- x\big[\tilde{P}_{m-1}(x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(x^2)\big] = \tilde{P}_m(-x^2) - x\,\tilde{P}_m(x^2).
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется справедливость формулы (4). □

3°. Пусть

$$\tilde{P}_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} c_k\,x^k, \quad \tilde{Q}_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} d_k\,x^k.$$

ЛЕММА 2. *Для коэффициентов c_k справедливы рекуррентные соотношения:* $c_0 = 1$ *и*

$$c_{2k} = (-1)^k c_k, \quad c_{2k+1} = -c_k \tag{7}$$

при $k \in 0 : 2^{m-1} - 1$ *и* $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Согласно (3)

$$\tilde{P}_m(x) = \tilde{P}_{m-1}(-x^2) - x\tilde{P}_{m-1}(x^2) = \\ = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\,(-x^2)^k - \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\,x^{2k+1}.$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

Рекуррентные соотношения (7) при $k \geqslant 1$ можно объединить в одну формулу

$$c_{2k+\sigma} = (-1)^{k(\sigma+1)+\sigma} c_k, \tag{8}$$

где $\sigma \in \{0, 1\}$. При этом $c_0 = 1$, $c_1 = -1$.

4°. Получим явное представление для коэффициентов c_k полинома $\tilde{P}_m(x)$. Пусть $k = (k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots, k_0)_2$ — двоичный код индекса $k \in 0 : 2^m - 1$.

ТЕОРЕМА 1. *При* $k \in 0 : 2^m - 1$, $m \geqslant 2$ *справедлива формула*

$$c_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}k_\alpha + k_0}. \tag{9}$$

Доказательство проведём по индукции. При $m = 2$, когда $k = (k_1, k_0)_2$, формула (9) проверяется непосредственно (с учётом того, что $c_2 = 1$, $c_3 = 1$). Сделаем индукционный переход от m к $m + 1$, считая, что $m \geqslant 2$.

Пусть $k \in 0 : 2^{m+1} - 1$. Представим k в виде $k = 2k' + \sigma$, где $k' \in 0 : 2^m - 1$ и $\sigma \in \{0, 1\}$. Запишем $k' = (k'_{m-1}, k'_{m-2}, \ldots, k'_0)_2$. Тогда

$$k = (k'_{m-1}, \ldots, k'_0, \sigma)_2.$$

Согласно (8)

$$c_{2k'+\sigma} = (-1)^{k'(\sigma+1)+\sigma}\, c_{k'} = (-1)^{k'_0(\sigma+1)+\sigma}\, c_{k'}.$$

Воспользуемся индукционным предположением, согласно которому

$$c_{k'} = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k'_{\alpha-1}k'_\alpha + k'_0}.$$

Получим

$$c_k = c_{2k'+\sigma} = (-1)^{k'_0(\sigma+1)+\sigma+\sum_{\alpha=1}^{m-1} k'_{\alpha-1}k'_\alpha + k'_0} =$$

$$= (-1)^{k_0'\sigma+\sigma+\sum_{\alpha=2}^{m} k_{\alpha-1}k_\alpha} = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m} k_{\alpha-1}k_\alpha+k_0}.$$

Теорема доказана. □

В силу (1) при $m \geqslant 1$

$$Q_m(x) = P_{m-1}(x) - [P_m(x) - P_{m-1}(x)].$$

Значит, при $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} d_k &= c_k \quad \text{когда } k \in 0 : 2^{m-1} - 1, \\ d_k &= -c_k \quad \text{когда } k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \end{aligned} \tag{10}$$

На основании (9) и (10) заключаем, что при $m \geqslant 2$

$$d_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}k_\alpha+k_0+k_{m-1}}, \quad k \in 0 : 2^m - 1. \tag{11}$$

5°. Обозначим через **a**, **b**, **c**, **d** векторы коэффициентов полиномов Шапиро первого и второго рода.

ТЕОРЕМА 2. *Векторы* **a**, **b**, **c**, **d** *попарно ортогональны.*

Доказательство следует из формул (2) и (9), (11), если учесть, что

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^{k_0} = 0, \quad \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^{k_{m-1}} = 0.$$ □

6°. Продолжим изучение полиномов Шапиро второго рода.

ЛЕММА 3. *При $m \geqslant 2$ справедливо соотношение*

$$c_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k} c_k, \quad k \in 0 : 2^{m-1} - 1. \tag{12}$$

Доказательство. При $m = 2$ равенство (12) проверяется непосредственно. Будем считать, что $m \geqslant 3$.

Пусть $k \in 0 : 2^{m-1} - 1$, $k = (k_{m-2}, \ldots, k_0)_2$. Согласно (9)

$$c_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_{\alpha-1}\, k_\alpha+k_0}.$$

Обозначим $k' := 2^m - 1 - k = (1,\, 1 - k_{m-2}, \ldots, 1 - k_0)_2$. В силу (9)

$$\begin{aligned} c_{k'} &= (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2}(1-k_{\alpha-1})(1-k_\alpha)+1-k_{m-2}+1-k_0} = \\ &= (-1)^{m-2\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_\alpha-k_0+k_{m-2}+\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_{\alpha-1}k_\alpha-k_{m-2}-k_0} = (-1)^{m+k} c_k. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Формулу (12) можно переписать в эквивалентном виде

$$c_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k+1}\, c_k, \quad k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \tag{13}$$

Действительно, положим $k' = 2^m - 1 - k,\ k' \in 0 : 2^{m-1} - 1$. На основании (12) получим

$$c_{2^m-1-k'} = (-1)^{m+k'} c_{k'},$$

что равносильно (13).

7°. Рассмотрим полиномы Шапиро второго рода как функции комплексной переменной z. Особый интерес представляет случай, когда $|z| = 1$.

ТЕОРЕМА 3. *При $m \geqslant 1$ справедливы тождества*

$$\tilde{P}_m(-z) = (-1)^{m+1} z^{2^m-1} \tilde{Q}_m(\tfrac{1}{z}), \tag{14}$$

$$\tilde{Q}_m(-z) = (-1)^{m} z^{2^m-1} \tilde{P}_m(\tfrac{1}{z}). \tag{15}$$

Доказательство. При $m = 1$ указанные тождества проверяются непосредственно. Будем считать, что $m \geqslant 2$.

Согласно (10) имеем

$$(-1)^{m+1} z^{2^m-1}\, \tilde{Q}_m(\tfrac{1}{z}) = (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{2^m-1} d_k\, z^{2^m-1-k} =$$

$$= (-1)^{m+1} \left[\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\, z^{2^m-1-k} - \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} c_k\, z^{2^m-1-k} \right].$$

Вместе с тем, в силу (13)

$$\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\, z^{2^m-1-k} = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} c_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} (-1)^{m+k+1} c_k\, z^k$$

и в силу (12)

$$-\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} c_k\, z^{2^m-1-k} = -\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} (-1)^{m+k+1} c_k\, z^k.$$

Значит,

$$(-1)^{m+1} z^{2^m-1}\, \tilde{Q}_m(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k c_k\, z^k = \tilde{P}_m(-z).$$

Справедливость тождества (14) установлена.

Подставим в (14) $-\frac{1}{z}$ вместо z. Получим

$$\tilde{P}_m(\tfrac{1}{z}) = (-1)^{m+1} (-\tfrac{1}{z})^{2^m-1} \tilde{Q}_m(-z) = (-1)^m z^{-2^m+1} \tilde{Q}_m(-z),$$

что равносильно (15). Теорема доказана. □

8°. Пусть $\theta(m)$ — количество положительных коэффициентов у полинома Шапиро первого рода $P_m(x)$. Известно (см. [2, 4]), что при $m \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \theta(2m) &= 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \\ \theta(2m+1) &= 2^{2m} + 2^m. \end{aligned} \tag{16}$$

Выведем соответствующие формулы для дополнительного полинома $Q_m(x)$. Количество его положительных коэффициентов обозначим $\eta(m)$. По определению $\eta(1) = 1$.

ЛЕММА 4. *При $m \geqslant 1$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \eta(2m) &= 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \\ \eta(2m+1) &= 2^{2m}. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Из рекуррентных соотношений (1) для полиномов Шапиро следует, что при $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \theta(m) &= \theta(m-1) + \eta(m-1), \\ \eta(m) &= \theta(m-1) + [2^{m-1} - \eta(m-1)]. \end{aligned}$$

Сложим эти равенства. Получим

$$\eta(m) = 2^{m-1} + 2\theta(m-1) - \theta(m). \tag{18}$$

Подставим в (18) сначала $2m$, а затем $2m+1$ вместо m и воспользуемся формулами (16). Придём к соотношениям

$$\begin{aligned} \eta(2m) &= 2^{2m-1} + 2[2^{2m-2} + 2^{m-1}] - 2^{2m-1} - 2^{m-1} = 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \\ \eta(2m+1) &= 2^{2m} + 2[2^{2m-1} + 2^{m-1}] - 2^{2m} - 2^m = 2^{2m}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Обозначим через $\tilde{\theta}(m)$ и $\tilde{\eta}(m)$ количество положительных коэффициентов у полиномов Шапиро второго рода $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4. *При $m \geqslant 1$ справедливы равенства*

$$\tilde{\theta}(2m) = \theta(2m), \tag{19}$$

$$\tilde{\theta}(2m+1) = \eta(2m+1), \tag{20}$$

$$\tilde{\eta}(2m) = 2^{2m} - \eta(2m), \tag{21}$$

$$\tilde{\eta}(2m+1) = \theta(2m+1). \tag{22}$$

Доказательство. При $m = 1$ равенства (19)–(22) проверяются непосредственно. Сделаем индукционный переход от m к $m+1$, считая, что $m \geqslant 1$.

Согласно индукционному предположению имеем

$$\tilde{\theta}(2m+2) = \tilde{\theta}(2m+1) + \tilde{\eta}(2m+1) = \eta(2m+1) + \theta(2m+1) = \theta(2m+2). \quad (23)$$

Соотношение (19) установлено. Аналогично проверяется соотношение (21):

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(2m+2) &= \tilde{\theta}(2m+1) + [2^{2m+1} - \tilde{\eta}(2m+1)] = \eta(2m+1) + 2^{2m+1} - \\ &- \theta(2m+1) = 2^{2m+2} - [\theta(2m+1) + (2^{2m+1} - \eta(2m+1))] = \quad (24) \\ &= 2^{2m+2} - \eta(2m+2).\end{aligned}$$

Что касается соотношений (20) и (22), то они выводятся с использованием (23) и (24). Действительно,

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(2m+3) &= \tilde{\theta}(2m+2) + \tilde{\eta}(2m+2) = \theta(2m+2) + [2^{2m+2} - \eta(2m+2)] = \\ &= \eta(2m+3); \\ \tilde{\eta}(2m+3) &= \tilde{\theta}(2m+2) + [2^{2m+2} - \tilde{\eta}(2m+2)] = \theta(2m+2) + 2^{2m+2} - \\ &- [2^{2m+2} - \eta(2m+2)] = \theta(2m+3).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Shapiro H. S. *Extremal problems for polynomials and power series.* Master's thesis. Cambrige, Mass., 1951.

2. Brillhart J., Carlitz L. *Note on the Shapiro polynomials* // Proceedings of the AMS. 1970. Vol. 25. No. 1. P. 114–118.

3. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Полиномы Шапиро и коды Рида-Маллера* // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию. Избранные доклады. 26 ноября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1126`)

4. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Дальнейшие свойства полиномов Шапиро* // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию. Избранные доклады. 28 января 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1126`)

КОДЫ РИДА–МАЛЛЕРА: ПРИМЕРЫ ИСПРАВЛЕНИЯ ОШИБОК

И. В. Агафонова

24 марта 2012 г.

Линейные коды с избыточностью

В двоичных кодах с контролем ошибок (синонимы: «помехоустойчивые коды», «корректирующие коды», «коды обнаружения и исправления ошибок», «коды с избыточностью») кодирование и декодирование заключается в преобразованиях строк из нулей и единиц. Двоичные строки длины n в линейных кодах считаются элементами n-мерного векторного пространства $V_n = (\mathbb{Z}_2)^n$ над конечным полем $\mathbb{Z}_2$.

Знаком $\oplus$ будем обозначать, как это часто делается, суммирование в $\mathbb{Z}_2$, а также операцию сложения в V_n, то есть покомпонентное сложение векторов по модулю 2: $u \oplus v = (u_1 \oplus v_1, \ldots, u_n \oplus v_n)$.

Соответствующее скалярное произведение векторов в V_n определим как

$$u \odot v = u_1\, v_1 \oplus u_2\, v_2 \oplus \cdots \oplus u_n\, v_n, \tag{1}$$

в отличие от обычного скалярного произведения n-мерных векторов

$$\langle u, v \rangle = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + \cdots + u_n\, v_n,$$

которое также будет применяться.

Знак $\odot$, применяемый при перемножении двоичного вектора и двоичной матрицы, будет подчёркивать, что скалярное произведение строки на столбец находится по правилу (1).

Двоичный линейный код представляет собой множество *кодовых слов* — двоичных векторов вида

$$y = x \odot G, \tag{2}$$

где x пробегает всё множество V_k, $k \geqslant 1$, а матрица G, называемая *порождающей матрицей* данного кода, состоит из k линейно независимых[1] двоичных

[1] Линейная зависимость или независимость основывается здесь на определении линейной комбинации векторов как их суммы (операция $\oplus$) с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$, то есть просто суммы каких-то строк матрицы по модулю 2.

строк длины n при $n > k$. Имея в виду эти два параметра, код называют $[n, k]$-кодом. *Мощность* $[n, k]$-кода (число всех его кодовых слов) равна 2^k.

Формула (2) задаёт правило кодирования исходного вектора $x \in V_k$ посредством его преобразования в вектор $y \in V_n$. Полученный вектор (кодовое слово) передаётся по каналу связи с возможным искажением в процессе передачи, принимается получателем и декодируется. Кодовое слово y содержит больше символов, чем исходный вектор x, и код должен быть построен так, чтобы благодаря избыточной информации с большой вероятностью определять наличие или отсутствие ошибок, либо, более того, исправлять обнаруженные ошибки.

Как мы видим из (2), все кодовые слова являются линейными комбинациями строк матрицы G, то есть линейный код представляет собой линейное пространство с базисом из строк его порождающей матрицы.

Хорошо изученным семейством линейных кодов с избыточностью являются классические двоичные коды Рида–Маллера (сконструированы в 1954 г.).

Код Рида–Маллера, обозначаемый как $RM(r, m)$, определяется параметрами r и m, где $0 \leqslant r \leqslant m$, r — *порядок кода*, 2^m — *длина кода*.

Коды Рида–Маллера 0-го порядка

Порождающая матрица кода $RM(0, m)$ порядка 0, обозначаемая $G_{0,m}$, определяется как

$$G_{0,m} := G_0(m),$$

где $G_0(m)$ — строка из 2^m единиц:

$$G_0(m) = (1, \ldots, 1).$$

При кодировании по формуле (2) при $G = G_{0,m}$ вектор x должен иметь длину 1, а его кодовым словом будет вектор длины 2^m, состоящий из нулей, если $x = 0$, либо из единиц, если $x = 1$, то есть кодирование какого-то сообщения проводится посимвольно, и $RM(0, m)$ — просто код с 2^m-кратным повторением каждого символа x. Кодовых слов всего два: нулевой вектор и вектор из единиц.

Если в полученном слове не все символы одинаковы, мы заключаем, что при передаче сообщения имелись ошибки. Декодирование при этом очевидно: если большая часть битов в полученном векторе — единицы, то считаем, что $x = 1$, если нули — считаем, что $x = 0$. Если ошибочными были меньше половины битов, то есть не более $2^{m-1} - 1$, то ошибки будут исправлены. Но такое кодирование очень невыгодно: объём передаваемого сообщения будет в 2^m раз больше объёма полезной информации!

Коды Рида–Маллера 1-го порядка

Зафиксируем $m \geqslant 1$ и составим матрицу $G_1(m)$ из m строк и 2^m столбцов, где j-й столбец (при нумерации от 0) соответствует двоичному представлению числа j, записанному в m битах.

Например,

$$G_1(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как давно замечено, строки матрицы $G_1(m)$ можно выписать чисто механически, чередуя при $i = 1, 2, \ldots, m$ в i-й строке группы из 2^{m-i} нулей и такого же числа единиц.

Порождающей матрицей кода $RM(1, m)$ — кода Рида–Маллера порядка 1 длины 2^m — называется матрица $G_{1,m}$, составленная сверху вниз из строк матриц $G_0(m)$, $G_1(m)$:

$$G_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $G_{1,m}$ отвечает требованию линейной независимости строк. В этом можно убедиться, составив квадратную подматрицу из столбцов, содержащих не более двух единиц (их номера 0 и 2^i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$). В случае $m = 4$ эта подматрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При любом m строки и столбцы такой подматрицы, очевидно, линейно независимы.

Кодирование проводится по обычному для линейного кода правилу (2) при $G = G_{1,m}$. Размер исходного слова при этом равен $m + 1$, по числу строк матрицы $G_{1,m}$. Так, код $RM(1, 4)$ переводит слово $x = 10011$ в кодовое слово $y = xG = 1001\,1001\,1001\,1001$. (Пробелы между группами битов вставлены для более удобного зрительного восприятия длинного вектора).

Код $RM(1,m)$ с базисом из строк матрицы $G_{1,m}$ при $m > 1$ может быть построен рекуррентно на основе векторов $u \in RM(1,m-1)$ конкатенациями (соединениями) $u|u$ и $u|(1 \oplus u)$,[2] так что список кодовых слов можно записать как

$$RM(1,m) = \begin{Bmatrix} RM(1,m-1) \mid RM(1,m-1) \\ RM(1,m-1) \mid \overline{RM}(1,m-1) \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

где набор векторов $\overline{RM}(1,m-1)$ составлен из векторов $u \oplus 1$, $u \in RM(1,m-1)$ (порядок векторов не имеет значения).

Например, код $RM(1,2)$ можно получить, складывая между собой всевозможные подмножества строк матрицы $G_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и добавив нулевой вектор, а можно — используя $RM(1,1) = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$ и конструкцию (3). В обоих случаях получается набор кодовых слов $RM(1,2) = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$.

Как видно из $RM(1,1)$ и из (3), кодовые слова кода $RM(1,m)$, кроме двух, состоящих только из единиц или нулей, содержат единиц и нулей поровну, по 2^{m-1}.

Код $RM(1,m)$ известен и под другим названием — код Адамара, поскольку его кодовые слова — это строки определённых ниже двоичных матриц A_m, $\overline{A}_m$.

Двоичной матрицей Адамара назовём матрицу

$$A_m = \frac{J + H_m}{2},$$

где H_m — матрица Адамара H_m, строящаяся по рекуррентному правилу

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; H_m = \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix}, \; m = 2, 3, \ldots,$$

[2] Это частный случай способа конструирования кодов, называемого конструкцией Плоткина или конструкцией «$u \mid u \oplus v$», см. [1].

а через J обозначена матрица из одних единиц того же размера, что и H_m. Операция сложения здесь, конечно, означает обычное сложение целых чисел.

Матрицу $\overline{A}_m = J - A_m$ составим из дополнений к элементам матрицы A_m (дополнением 0 считаем 1 и наоборот).[3]

Двоичная матрица A_m отличается от соответствующей H_m только заменой всех элементов, равных -1, нулями. Например,

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая правило построения A_m, $\overline{A}_m$ и конструирование $RM(1,m)$ по (3), убеждаемся, что получаемые коды идентичны.

Кодовое расстояние

Корректирующая способность всякого кода характеризуется его *кодовым расстоянием*, определяемым как минимальное расстояние Хэмминга $\rho(u,v)$ между векторами u, v этого кода, то есть как число несовпадающих компонент этих векторов. Чем больше это расстояние, тем проще распознать кодовое слово, если оно слегка искажено.

Заметим, что расстояние Хэмминга $\rho(u,v)$ измеряется числом единиц в сумме $u \oplus v$ (иными словами, *весом Хэмминга* вектора $u \oplus v$), а эта сумма для линейного кода сама является кодовым словом, причём при $u \neq v$ — ненулевым. Так что кодовое расстояние кода вычисляется как минимальный вес его ненулевого кодового слова.

Пусть при использовании кода с кодовым расстоянием d по каналу связи принято некоторое двоичное слово, которое мы обозначим y'. Имеются две возможности:

- принятое слово y' принадлежит коду, и тогда мы считаем, что искажений при передаче не было;
- y' не принадлежит коду. Тогда нам ясно, что при передаче были допущены ошибки. Мы исправляем их, заменив y' кодовым словом, ближайшим к нему в смысле расстояния Хэмминга.

В первом случае вывод об отсутствии ошибок будет обоснованным, если кодовое слово не могло измениться так сильно, чтобы совпасть с другим кодовым словом, то есть если мы полагаем, что y' содержит не более $d-1$ из-

[3]Иногда, как, например, в [1], именно матрицу, которая здесь введена как $\overline{A}_m$, называют двоичной матрицей Адамара. Это лишь вопрос удобства обозначений.

менённых битов. Имея это в виду, говорят, что код с кодовым расстоянием d обнаруживает $d-1$ ошибку в слове.

Во втором случае мы гарантированно восстановим кодовое слово y, которое в процессе передачи преобразовалось в y', если y и y' различаются не более чем в $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ битах. В этом случае y' находится в $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$-окрестности только одного кодового слова y, которое и будет ближайшим. Говорят, что код с кодовым расстоянием d исправляет $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ ошибок.

Для $RM(1,m)$ мы уже определили минимальный вес ненулевого кодового слова, он равен 2^{m-1}. Это и есть кодовое расстояние d данного кода, при этом $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 2^{m-2}-1$, так что $RM(1,m)$ обнаруживает до $2^{m-1}-1$ ошибок в слове и исправляет до $2^{m-2}-1$ ошибок (включительно), это очень хороший показатель. Но скорость передачи информации, которая измеряется отношением длины исходного слова к длине кодового слова, будет для $RM(1,m)$ невысокой, она равна $\frac{m+1}{2^m}$.

Декодирование кодов Рида–Маллера 1-го порядка по принципу максимального правдоподобия

Декодирование по принципу максимального правдоподобия означает выбор из всех возможных кодовых слов того слова y, которое находится на минимальном расстоянии Хэмминга от принятого слова y', и лишь затем — восстановление исходного слова x из его кода y.

Рассмотрим применение принципа максимального правдоподобия к декодированию кода $RM(1,m)$.

Пусть y' — принятое слово длины 2^m, возможно, содержащее ошибки, и пусть Y' означает вектор, полученный из y' заменой всех компонент 0 компонентами -1:

$$Y' = 2y' - 1. \tag{4}$$

Если c — какое-то кодовое слово (будем обозначать это как $c \in RM(1,m)$), то оно, как отмечалось выше, является строкой двоичной матрицы Адамара A_m или её дополнения $\overline{A}_m$. Тогда соответствующий вектор

$$C = 2c - 1$$

есть строка матрицы H_m или $-H_m$ (будем обозначать это как $C \in H_m$ или $C \in -H_m$). Расстояние $\rho(y',c)$ равно расстоянию $\rho(Y',C)$.

При вычислении скалярного произведения $\langle Y', C\rangle$ каждая несовпадающая компонента даст слагаемое -1, а каждая совпадающая даст 1. Таким образом,

$$\langle Y', C\rangle = N_0 - N_1 = N - 2\rho(Y',C),$$

где N_0 — число совпадений компонент Y' и C, $N_1 = \rho(Y',C)$ — число несовпадений, $N = N_0 + N_1$ — длина слова, $N = 2^m$.

Там, где значение $\rho(Y', C)$ минимально, скалярное произведение $\langle Y', C\rangle$ максимально.

Так как $\max\limits_{C\in\pm H_m} \langle Y', C\rangle = \max\limits_{C\in H_m} |\langle Y', C\rangle|$, то

$$\min_{c\in RM(1,m)} \rho(y', c) = \min_{C\in\pm H_m} \rho(Y', C) = \frac{1}{2}\big(N - \max_{C\in H_m} |\langle Y', C\rangle|\big).$$

Алгоритм декодирования принятого вектора Y' следующий:

1) Умножить матрицу Адамара H_m на столбец Y' (или, что даст то же самое, умножить строку Y' на матрицу Адамара).

2) Найти максимальную по абсолютной величине компоненту полученного вектора. Пусть её номер i.

3) Если эта компонента положительна, определить кодовое слово y, ближайшее к y', как равное i-й строке двоичной матрицы Адамара A_m. В противном случае y будет дополнением к этой строке (i-й строкой $\overline{A}_m$).

После этого для восстановления исходного сообщения x по $y \in RM(1, m)$ достаточно воспользоваться уравнениями из системы $y = x \odot G$ с номерами $0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{m-1}$:

$$y_0 = x_0, \quad y_{2^i} = x_0 \oplus x_{m-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

то есть

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0, \\ y_1 &= x_0 \oplus x_m, \\ y_2 &= x_0 \oplus x_{m-1}, \\ y_4 &= x_0 \oplus x_{m-2} \end{aligned}$$

и так далее.

Складывая равенство $y_0 = x_0$ с каждым из остальных, получаем для компонент вектора x равенства

$$x_0 = y_0, \quad x_{m-i} = y_0 \oplus y_{2^i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

В зависимости от знака наибольшей компоненты скалярного произведения мы получим y_0, равное 0 (при $y \in \overline{A}_m$) или 1 (при $y \in A_m$). В первом случае вектор x будет подвектором y, во втором — дополнением к подвектору y.

ПРИМЕР. Декодируем по $RM(1,4)$ вектор $y' = 1001\,1001\,1001\,1110$ (код должен исправлять до 3-х ошибок).

Преобразуем y' по формуле (4):

$$Y' = (1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1).$$

Умножим Y' на матрицу Адамара

$$H_4 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix}.$$

Получим вектор $Y'H_4 = (2, 2, 2, 10, -2, -2, -2, 6, -2, -2, -2, 6, 2, 2, 2, -6)$. Его наибольшая по модулю компонента 10 — третья при нумерации с нуля. Следовательно, ближайшим кодовым словом будет третья строка двоичной матрицы Адамара (опять же при нумерации с 0), то есть вектор $y = 1001\,1001\,1001\,1001$. А исходное слово восстановится по компонентам так: $x_0 = 1\,(= y_0)$, $x_1 = 0\,(= y_8 \oplus 1)$, $x_2 = 0\,(= y_4 \oplus 1)$, $x_3 = 1\,(= y_2 \oplus 1)$, $x_4 = 1\,(= y_1 \oplus 1)$, то есть $x = 10011$.

Коды Рида–Маллера r-го порядка

Определим теперь код $RM(r,m)$ при произвольном $r \leqslant m$.

На основе матрицы $G_1(m)$ выстроим цепочку матриц $G_2(m), \ldots, G_r(m)$ по следующему правилу: строки матрицы $G_i(m)$ — это всевозможные поточечные (покомпонентные, побитовые) произведения по i строк из $G_1(m)$.

Число строк матрицы $G_i(m)$ равно C_m^i. Вес каждой строки матрицы $G_i(m)$ равен 2^{m-i}.

Порождающей матрицей кода Рида–Маллера порядка r длины 2^m называется матрица $G_{r,m}$, составленная сверху вниз из строк матриц $G_0(m)$, $G_1(m)$,…,$G_r(m)$ и имеющая размер $k \times 2^m$, где $k = \sum\limits_{i=0}^{r} C_m^i$.

Таким образом, код $RM(r,m)$ классифицируется как $[2^m, k]$-код и состоит из 2^k слов. Предельный случай $r = m$ (и, значит, $k = 2^m$) включён для полноты описания и содержательным не является: в этом случае все векторы длины 2^m — кодовые слова.

Нам удобно строки матриц $G_i(m)$ и соответствующие строки матрицы $G_{r,m}$ проиндексировать следующим образом:

- Единственной строке матрицы $G_0(m)$ присвоим индекс 0. Обозначим $K_0 = \{0\}$.
- Строки матрицы $G_1(m)$ проиндексируем номерами от 1 до m. Обозначим $K_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$.
- Строкам матрицы $G_i(m)$ при $i > 1$ присвоим составные индексы из номеров строк матрицы $G_1(m)$, умножением которых она образована. Соответствующее множество из всевозможных сочетаний индексов от 1 до m по i обозначим K_i. Строки матрицы будем располагать сверху вниз по возрастанию их индексов из K_i (в лексикографическом порядке).

Приведём полностью матрицу $G_{4,4}$, отделив друг от друга горизонтальными линиями составляющие её блоки $G_r(4)$ при $r = 0, 1, 2, 3, 4$ и выделив подматрицы $G_{r,4}$. Слева в таблице укажем индексы строк.

$$
\begin{array}{r}
0\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 12\\ 13\\ 14\\ 23\\ 24\\ 34\\ 123\\ 124\\ 134\\ 234\\ 1234
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ \hline
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ \hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ \hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\ \hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
G_{0,4}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} G_{1,4}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} G_{2,4}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} G_{3,4}
\end{array}
$$

Упомянем здесь, что для $RM(r,m)$ при $r > 1$, как и при $r = 1$, существует конструкция Плоткина (см. [1]), которая строит код длины 2^m из кодов длины

2^{m-1}. А именно:

$$RM(r,m) = \{u \mid u \oplus v\},$$

где $u \in RM(r, m-1)$, $v \in RM(r-1, m-1)$, а знак $\mid$ означает конкатенацию.

На основе этой конструкции индукцией по m может быть вычислено кодовое расстояние кода $RM(r,m)$, равное 2^{m-r} .

Кодирование проводится по правилу (2) при $G = G_{r,m}$.

Закодируем, например, кодом $RM(2,4)$ слово $x = 1110\,0011\,001$. (То, что оно должно иметь длину 11, видно из размера матрицы $G_{2,4}$).

Получим $y = x \odot G = 1110\ 0001\,0111\,1000$.

Декодирование кодов Рида–Маллера r-го порядка по мажоритарному принципу (алгоритм Рида)

Чтобы декодировать вектор y, полученный из вектора x по правилу (2), надо решить систему уравнений (2) относительно x.

Для $G = G_{r,m}$ эта система имеет вид

$$y[N] = x[K(r)] \odot G[K(r), N],$$

где $K(r) = K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_r$ — множество индексов строк матрицы G, $N = \{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$ — множество индексов столбцов матрицы G.

Так как $K(r) = K(r-1) \cup K_r$, эту систему можно переписать в виде

$$y[N] = x[K(r-1)] \odot G[K(r-1), N] + x[K_r] \odot G[K_r, N]. \tag{5}$$

При решении системы уравнений (5) вначале определяют старшие компоненты $x[K_r]$. Для определения каждого $x_i = x[i]$, $i \in K_r$, получается — как именно, будет показано ниже — набор из 2^{m-r} независимых уравнений вида $x_i = \beta_j$, где каждое β_j вычисляется как некоторая линейная функция от компонент вектора y.

Если все значения β_j, $j \in 1 : 2^{m-r}$, равны между собой, то их общее значение, естественно, и будет искомым значением x_i. Но из-за возможных ошибок вектор y может не быть кодовым словом и не удовлетворять (5), тогда среди β_j могут быть и нули, и единицы. В связи с этим решение принимается по мажоритарному принципу: если единиц среди β_j больше, чем нулей, то присваиваем $x_i := 1$, если наоборот, то $x_i := 0$. Будет обнаружено до $2^{m-r} - 1$ ошибок (сообщать об ошибке будем тогда, когда не все β_j одинаковы) и исправлено до $2^{m-r-1} - 1$ ошибок (исправления корректны, когда число искажённых символов меньше, чем неискажённых).

После того, как $x[K_r]$ определены, их значения подставляют в решаемую систему уравнений (5) и приходят к системе

$$y^{(r-1)}[N] = x[K(r-1)] \odot G[K(r-1), N],$$

где $y^{(r-1)}[N] = y[N] \oplus x[K_r] \odot G[K_r, N]$. Заметим, что $G[K_r, N] = G_r(m)$.

В этой системе тоже определяют старшие компоненты, теперь это $x[K_{r-1}]$, и вновь понижают число уравнений и неизвестных системы. Наконец, приходят к равенству $y^{(0)} = x[0] \odot G[0, N] = x_0\, G_0(m)$, которое определяет $x_0 = x[0]$ по мажоритарному принципу.

Процесс нахождения старших компонент $x[K_r]$ опишем, как это обычно делается, на примере конкретного кода.

Возьмём $RM(2, 4)$. Компоненты вектора x проиндексируем в соответствии со строками матрицы $G_{2,4}$. Компоненты вектора y, как и столбцы матрицы $G_{2,4}$, будут иметь индексы от 0 до 15.

Выпишем первые 4 уравнения решаемой системы:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0, \\ y_1 &= x_0 \oplus x_4, \\ y_2 &= x_0 \oplus x_3, \\ y_3 &= x_0 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_{34}. \end{aligned}$$

Складывая их, получаем

$$y_0 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 = x_{34}.$$

Таким же образом, суммируя остальные три четвёрки уравнений, имеем ещё три равенства для x_{34}:

$$\begin{aligned} y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 &= x_{34}, \\ y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} &= x_{34}, \\ y_{12} \oplus y_{13} \oplus y_{14} \oplus y_{15} &= x_{34}. \end{aligned}$$

Оказывается (см. [2]), что и всякую компоненту вектора x с индексом из K_r в точности 2^{m-r} способами можно представить в виде суммы 2^r компонент вектора y так, что каждая компонента y входит только в одну сумму.

Четвёрки соотношений для всех компонент с индексами из K_2 представлены в таблице:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
x_{12}	+				+				+				+			
		+				+				+				+		
			+				+				+				+	
				+				+				+				+
x_{13}	+		+						+		+					
		+		+						+		+				
					+		+						+		+	
						+		+						+		+
x_{14}	+	+							+	+						
			+	+							+					
					+	+							+	+		
							+	+							+	+
x_{23}	+		+		+		+									
		+		+		+		+								
									+		+		+		+	
										+		+		+		+
x_{24}	+	+			+	+										
			+	+			+	+								
									+	+			+	+		
											+	+			+	+
x_{34}	+	+	+	+												
					+	+	+	+								
									+	+	+	+				
													+	+	+	+

Итак, у нас теперь по 4 независимых соотношения для перечисленных в таблице переменных x_{ij}. Как говорилось выше, из-за возможных ошибок они могут давать разные значения для x_{ij}, и решение принимается по мажоритарному принципу.

ПРИМЕР. Декодируем принятое слово $y' = 1100\ 0001\,0111\,1000$, зная, что был использован код $RM(2,4)$. Заметим, что код с такими параметрами с гарантией исправит ошибку только в одном бите.

Получаем для старших компонент искомого вектора x наборы значений

- для $x_{12}: 0,0,1,0$;
- для $x_{13}: 0,1,1,1$;
- для $x_{14}: 1,0,1,1$;
- для $x_{23}: 1,0,0,0$;

- для $x_{24}: 0, 1, 1, 1$;
- для $x_{34}: 0, 1, 1, 1$.

По мажоритарному принципу принимаем $x_{12} = 0$, $x_{13} = 1$, $x_{14} = 1$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{34} = 1$. Строим для определения остальных компонент вектор

$$y^{(1)} = y' \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot G_2(4) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $y^{(1)} = 1101\,0000\,0000\,1111$.

Решаем систему $x \odot G = y^{(1)}$ относительно $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ с матрицей $G = G_{1,4}$.

Для x_1 существует 8 уравнений:

$$x_1 = y_0^{(1)} \oplus y_8^{(1)} = y_2^{(1)} \oplus y_9^{(1)} = y_3^{(1)} \oplus y_{10}^{(1)} = y_4^{(1)} \oplus y_{11}^{(1)} =$$
$$= y_5^{(1)} \oplus y_{12}^{(1)} = y_6^{(1)} \oplus y_{13}^{(1)} = y_7^{(1)} \oplus y_{14}^{(1)} = y_8^{(1)} \oplus y_{15}^{(1)}.$$

Ниже в таблице приведены все пары соотношений для компонент вектора x с индексами из K_1.

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
x_1	+								+							
		+								+						
			+								+					
				+								+				
					+								+			
						+								+		
							+								+	
								+								+
x_2	+				+											
		+				+										
			+				+									
				+				+								
									+				+			
										+				+		
											+				+	
												+				+
x_3	+		+													
		+		+												
					+		+									
						+		+								
									+		+					
										+		+				
													+		+	
														+		+
x_4	+	+														
			+	+												
					+	+										
							+	+								
									+	+						
											+	+				
													+	+		
															+	+

Имея в виду, что в заголовке таблицы вектор y теперь понимается как $y^{(1)}$ и равен 1101 0000 0000 1111, определяем из этих соотношений наборы значений:

- для $x_1 : 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1,$
- для $x_2 : 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1,$
- для $x_3 : 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$
- для $x_4 : 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0.$

По мажоритарному принципу принимаем $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Строим для определения оставшейся компоненты вектор

$$y^{(0)} = y^{(1)} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot G_1(4) =$$

$$= y^{(1)} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1101\,0000\,0000\,1111 \oplus 0000\,1111\,0000\,1111 = 1101\,1111\,1111\,1111.$$

Имеем для x_0 шестнадцать равенств

$$x_0 = y^{(0)}[j],\ j \in 0:15,$$

из них 15 предлагают брать $x_0 = 1$, что мы и сделаем. Декодированный вектор:

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}) = 1110\ 0011\,001.$$

Описанные алгоритмы являются простыми и наиболее известными из алгоритмов декодирования кодов Рида–Маллера, но не единственными. Получить информацию о других алгоритмах и их сложности и расширить представление о РМ-кодах можно, ознакомившись с литературой из приводимого ниже списка. Список включает классические книги [1, 2, 3], которые могут считаться учебниками по помехоустойчивым кодам, а также литературу, касающуюся

- алгоритмов декодирования кодов Рида–Маллера и некоторых подкодов: [6, 5];
- применения кодов Рида–Маллера в криптографических исследованиях: [4, 5];
- обобщения кодов Рида–Маллера на недвоичный случай: [7] (на эту тему в настоящее время имеется значительное число более поздних публикаций разных авторов).

В [5] содержится обширный список литературы по теме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. *Теория кодов, исправляющих ошибки.* М.: Связь, 1979.
2. Блейхут Р. *Теория и практика кодов, контролирующих ошибки.* М.: Мир, 1986.

3. Питерсон У., Уэлдон Э. *Коды, исправляющие ошибки.* М.: Мир, 1976.

4. Логачёв О. А., Сальников А. А., Ященко В. В. *Булевы функции в теории кодирования и криптологии.* М.: МЦНМО, 2004.

5. Кузнецов Ю. В., Шкарин С. А. *Коды Рида–Маллера (обзор публикаций)* //- Математические вопросы кибернетики. 1996. Вып. 6. С. 5–50.

6. Сидельников В. М. *Теория кодирования.* М.: Физматлит, 2008.

7. Берлекэмп Э. *Алгебраическая теория кодирования.* М.: Мир, 1971.

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ КРЕСТЕНСОНА

М. С. Беспалов

31 марта 2012 г.

В данном докладе конструкция для дискретных функций Уолша, приведённая в докладах В. Н. Малозёмова [1] и М. С. Беспалова [2], переносится из двоичного гармонического анализа в p-ичный. Базовые сведения приведены также в книге [3] и в статье [4], а новые результаты в статье [5].

1°. Двоичный гармонический анализ подразделяют на непрерывный, в рамках которого исследуются *функции Уолша* в нумерациях Пэли, Уолша и Качмажа (см. книгу [6]), и дискретный, где работают с *дискретными функциями Уолша* в нумерациях Пэли, Уолша и Адамара. Для дискретных функций Уолша наиболее востребована нумерация Адамара, приведённая в докладе [1].

Аналогом системы Уолша-Пэли в p-ичном гармоническом анализе служит система Крестенсона-Леви. А p-ичным аналогом дискретных функций Уолша-Пэли и Уолша-Адамара соответственно служат дискретные функции Крестенсона-Леви и Крестенсона-Кронекера соответственно. В книге [3] другая терминология, там дискретные и "непрерывные" (относительно непрерывного аргумента) функции Крестенсона называются ВКФ (Виленкина-Крестенсона функциями) в нумерациях Пэли и Адамара соответственно.

2°. Каждая функция Уолша (за исключением $w_0(x) \equiv 1$) определяется как произведение функций Радемахера. А для функций Радемахера есть (см. книгу [6]) три разных определения, приводящие к построению разных теорий.

Определение $r_k(x) = \operatorname{sign} \sin 2^{k+1}\pi x$ позволяет оставаться в классе регулярных функций, что важно в теории рядов Фурье.

Для прикладников удобнее определять функции Радемахера на полуинтервале $[0,1)$ через начальную функцию $r_0(x) = 1$ при $x \in [0, 1/2)$, $r_0(x) = -1$ при $x \in [1/2, 1)$. Функцию $r_0(x)$ продолжают с периодом 1 на полуось $[0, \infty)$ и задают остальные функции методом двоичного сжатия $r_k(x) = r_0(2^k x)$.

Если все двоично-рациональные точки полуинтервала $[0,1)$ рассматривать как двойные, то от второго определения переходим к определению функций Радемахера (а следовательно и Уолша) на модифицированном отрезке $[0,1]^*$, что соответствует определению функций Уолша на двоичной группе Кантора.

3°. Наиболее приспособленным к p-ичному обобщению, которое первым проделал Леви [7], выглядит второй вариант определения функций Радемахера. Полагаем $\omega = \omega_p = \exp(\frac{2\pi i}{p})$ и определяем *обобщённую начальную функцию Радемахера*:

$$r_0(x) = \omega^k\ , \quad \text{если } x \in \Delta_1^k = \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right)\ ,\ k \in 0 : p-1. \tag{1}$$

Функцию $r_0(x)$ продолжаем с периодом 1 на полуось $[0, \infty)$ и задаем остальные *обобщённые функции Радемахера* методом p-ичного сжатия $r_j(x) = r_{j-1}(px)$. Для обобщённых функций Радемахера применяется прежнее обозначение, так как при $p = 2$ определение (1) совпадает с определением функций Радемахера.

В статье [8] через p-ичное n-значное разложение числа $k \in 0 : p^n - 1$,

$$k = \sum_{j=1}^{n} k_j p^{j-1}, \quad \text{где } 0 \leqslant k_j \leqslant p-1, \tag{2}$$

вводятся *функции Крестенсона-Леви*

$$\psi_k(x) = \prod_{j=1}^{n} (r_{j-1}(x))^{k_j}\ . \tag{3}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [6]). Система функций $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ составляет полную ортонормированную на $[0, 1)$ систему функций.

4°. При заданных p, n через разложение (2) чисел $k, m \in 0 : p^n - 1$ вычисляются значения *дискретных функций Крестенсона* двух основных нумераций

$$\varphi_m(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega^{k_j m_j}, \quad \tau_m(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega^{k_j m_{n-j+1}}, \qquad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}. \tag{4}$$

Фиксированное целое $p > 2$ определяет основание системы, а фиксированное натуральное n задаёт число аргументов p^n дискретной функции. Число n назовём *уровнем* дискретной функции и будем отмечать в фигурных скобках: если для отдельных значений дискретной функции, то после аргумента $\varphi_m(k)\{n\}$, $\tau_m(k)\{n\}$; а для всей функции в виде $\varphi_m\{n\}$, $\tau_m\{n\}$.

Первое знакомство с понятием функции обычно начинают с упоминания трёх способов задания функции: аналитического, графического и табличного. Более простым выглядит табличный способ задания дискретной функции, который при фиксированном порядке аргументов превращается в представление дискретной функции в виде вектора (например, векторы $\varphi_m\{n\}$, $\tau_m\{n\}$).

5°. С дискретными функциями будем работать как с векторами. Для дискретных функций Крестенсона u, v (фиксированного уровня) применяются операции сложения $u + v$ и покоординатного умножения $u \bullet v$, которая для векторов называется *умножением по Адамару*. Заметим, что (применяемое в книге [3]) отождествление функций Крестенсона и дискретных функций Крестенсона вызвано именно необходимостью применения для последних операции умножения (по Адамару).

Другой основной операцией над дискретными функциями Крестенсона, позволяющей от функций уровня m и n переходить к новому уровню $m + n$, служит операция *кронекерова произведения* (определение см. в докладе [2]) матриц (в нашем случае векторов) $u\{m\} \otimes v\{n\}$.

6°. Основным примером векторной формы записи дискретной функции Крестенсона служит следующая запись *дискретной экспоненциальной функции* (в [3] обозначена ДЭФ), где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$:

$$r = (1\ ,\ \omega\ ,\ \omega^2\ , \dots\ \omega^{p-1}). \tag{5}$$

В обозначениях (4) эта функция равна $\varphi_1\{1\} = \tau_1\{1\}$. Степени (по Адамару) этой функции есть следующие ДЭФ:

$$r^{\bullet 2} = r \bullet r = (1\ ,\ \omega^2\ ,\ \omega^4\ , \dots\ \omega^{2p-2}) = \varphi_2\{1\} = \tau_2\{1\},$$

и далее при $j < p$ имеем $r^{\bullet j} = \varphi_j\{1\} = \tau_j\{1\}$.

Заметим, что строки матрицы *дискретного преобразования Фурье* (ДПФ) $F_p = (\omega^{kj})_{k,j=0}^{p-1}$ состоят из всех степеней ДЭФ в естественном порядке

$$r^{\bullet 0}\ , r,\ r^{\bullet 2}, \dots,\ r^{\bullet (p-1)}.$$

7°. Разложению (2) соответствует *простой p-ичный* (n-значный) *код* числа $k \in 0 : p^n - 1$ (обозначение $\tilde{k}$ применяем при фиксированном n)

$$\tilde{k} = k_{\{n\}} = (k_n\ k_{n-1} \dots k_1).$$

Если опустить скобки, то это запись числа в p-ичной системе счисления.

Для того же числа укажем $(n + 1)$-значный простой код

$$k_{\{n+1\}} = (0\ k_n\ k_{n-1} \dots k_1).$$

По простому коду $\tilde{k}$ получаем *обратный код* (он же *реверс* кода, см. [1])

$$\mathrm{rev}\ \tilde{k} = (k_1\ k_2\ \ \dots k_n),$$

с помощью которого вводится (см. [1]) *перестановка реверс* на множестве чисел $Z(p,n) = \{0, 1, 2, \ldots, p^n - 1\}$:

$$\mathrm{rev}_n(k) = \mathrm{rev}(k) = \sum_{j=1}^{n} k_{n-j+1} p^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} k_{n-j} p^j. \tag{6}$$

ЛЕММА 1. *Если* $m < p^n$, *то* $\mathrm{rev}_{n+1}(m) = p \cdot \mathrm{rev}_n(m)$.

Доказательство. Так как $\mathrm{rev}\, m_{\{n+1\}} = (m_1\ m_2\ \ldots m_n\ 0)$, то согласно (6) $\mathrm{rev}_{n+1}(m) = 0 + \sum_{j=1}^{n} m_{n+1-j} p^j = p \sum_{j=1}^{n} m_{n-j+1} p^{j-1}$. □

8°. При фиксированном n через скалярное произведение кодов длины n над кольцом $\mathbb{Z}_p$ введём скалярное произведение элементов множества $Z(p,n)$:

$$(m,k) = (m,k)_n = (\tilde{m}, \tilde{k}) = \sum_{j=1}^{n} m_j k_j \ (mod\ p).$$

Основную операцию *сложения по модулю* p в кольце $\mathbb{Z}_p$ обозначим $\dot{+}$. Легко проверяется следующая

ЛЕММА 2. *Введённая операция скалярного произведения удовлетворяет основным свойствам скалярного произведения: симметрия,* $(m,k) = (k,m)$, *и линейность,* $(m, \alpha k \dot{+} \beta l) = \alpha(m,k) \dot{+} \beta(m,l)$.

При фиксированном p и заданном уровне n определение (4) дискретных функций Крестенсона перепишем в виде (для $m, k \in Z(p,n)$)

$$\varphi_m(k) = \omega^{(m,k)}, \quad \tau_m(k) = \omega^{(\mathrm{rev}(m),k)}. \tag{7}$$

9°. Рассмотрим поведение функций φ_m при изменениии уровня. Тривиально доказывается следующая

ЛЕММА 3. *Если* $0 \leqslant m, k < p^n$, *то* $(m,k)_n = (m,k)_{n+1} = (m,k)_{n+2} = \ldots$, $(m, k + jp^n)_{n+1} = (m,k)_n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $0 \leqslant m, k < p^n$, *то*

$$\varphi_m(k)\{n\} = \varphi_m(k)\{n+1\} = \varphi_m(k)\{n+2\} = \ldots,$$

$$\varphi_m\{n+1\} = \varphi_0\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

В пояснении нуждается только вторая формула. При сквозной нумерации чисел множества $Z(p, n+1)$ индексами $k + jp^n$ при каждом $j \in 0 : p-1$ пробегаем все p^n значений множества $Z(p, n)$, после чего переходим к $j+1$. Согласно (7) и лемме 3

$$\varphi_m(k + jp^n)\{n+1\} = \omega^{(m,k+jp^n)_{n+1}} = \omega^{(m,k)_n} = \varphi_m(k)\{n\}.$$

Получаем блочный вид вектора $\varphi_m\{n+1\}$, что перепишем с помощью символа кронекерова произведения

$$\varphi_m\{n+1\} = (\varphi_m\ \varphi_m\ \ldots \varphi_m\ ) = \varphi_0\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если* $0 \leqslant m < p^n$, $0 \leqslant j < p$, *то*

$$\varphi_{m+jp^n}\{n+1\} = \varphi_j\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

Доказательство. Если $0 \leqslant m, k < p^n$, $0 \leqslant j, l < p$, то в обозначениях $M = m + jp^n$, $K = k + lp^n$ имеем

$$(M, K)_{n+1} = jl \dotplus (m, k)_n, \quad \varphi_M(K)\{n+1\} = \omega^{jl}\varphi_m(k)\{n\}.$$

Так же как в следствии получаем

$$\varphi_M\{n+1\} = (\varphi_m\ \ \omega^j\varphi_m\ \ \ldots \omega^{(p-1)j}\varphi_m\ ) = \varphi_j\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}. \qquad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовём матрицей дискретного преобразования Крестенсона-Кронекера (уровня n) кронекерову степень матрицы дискретного преобразования Фурье, то есть матрицу $F_p^{(n)} = F_p \otimes F_p^{(n-1)}$.

ЛЕММА 4. *Строка с номером* $m + jp^{n-1}$, *где* $0 \leqslant m < p^{n-1}$, $0 \leqslant j < p$, *матрицы* $A \otimes B$ *имеет вид* $A_j \otimes B_m$, *выраженный через строки исходных матриц с указанными индексами.*

Из этой леммы, которая легко проверяется, и предложения 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Строки матрицы* $F_p^{(n)}$ *есть естественно упорядоченный полный набор дискретных функций Крестенсона* $\varphi_m\{n\}$.

10°. Согласно следствию 2 и определению 1 функции (4), упорядоченные как $\varphi_m\{n\}$, назовём *дискретными функциями Крестенсона-Кроненкера.*

Функции (4), упорядоченные как $\tau_m\{n\}$, назовём *дискретными функциями Крестенсона-Леви*, в соответствии со следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Нумерация* (4) *дискретных функций* τ_m *совпадает с нумерацией* (3) *функций Крестенсона-Леви* ψ_m *непрерывного аргумента:*

$$\psi_m(x) = \tau_m(k) \quad \text{при } x \in \Delta_n^k = \left[\frac{k}{p^n}, \frac{k+1}{p^n}\right). \tag{8}$$

Причём построенная по такому правилу ψ_m *не зависит от выбора уровня* n *(такого, что* $m < p^n$*) дискретной функции Крестенсона* τ_m*.*

Доказательство. Во-первых, $\tau_0(k) = 1$ для всех k независимо от уровня. Поэтому и по формуле (8) получаем $\psi_0(x) \equiv 1$.

Для произвольного натурального m возьмём (и зафиксируем) любое n такое, что $m < p^n$. Произвольное $x \in [0, 1)$ разложим в виде $x = \epsilon + \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{p^j}$, где $0 \leqslant \epsilon < \frac{1}{p^n}$. По формуле (1) имеем $r_1(x) = r_0(px) = \omega^{x_2}$, так как $px \in \Delta_1^{x_2}$; аналогично $r_{j-1}(x) = \omega^{x_j}$. Используя разложение (2), рассмотрим

$$\psi_m(x) = \prod_{j=1}^n (r_{j-1}(x))^{m_j} = \prod_{j=1}^n \omega^{x_j m_j} = \omega^{\sum_{j=1}^n x_j m_j}.$$

Если $x \in \Delta_n^k$, то $x = \frac{k}{p^n} + \epsilon$, где $0 \leqslant \epsilon < \frac{1}{p^n}$. Так как простой код числа $k = \sum_{j=1}^n k_j p^{j-1}$ равен $\tilde{k} = (k_n\ k_{n-1} \dots k_1)$, то $x = \epsilon + \sum_{j=1}^n \frac{k_{n-j+1}}{p^j}$. Поэтому $x_j = k_{n-j+1}$, rev $\tilde{k} = (x_n\ x_{n-1} \dots x_1)$ и при $x \in \Delta_n^k$

$$\psi_m(x) = \omega^{(\mathrm{rev}(k), m)} = \tau_m(k)\{n\}. \qquad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если* $m < p^n$*, то* $\tau_m\{n+1\} = \tau_m\{n\} \otimes \tau_0\{1\}$.

Доказательство. Так как $\Delta_n^k = \cup_{s=0}^{p-1} \Delta_{n+1}^{s+kp}$, то при сквозной нумерации индексами $s+kp$ от 0 до $p^{n+1}-1$ значения функции $\psi_m(x)$ на интервалах Δ_{n+1}^{s+kp} при фиксации k повторяются p раз равными $\tau_m(k)\{n\}$. Этот факт и записан с помощью символа кронекерова произведения и вектора $\tau_0 = (1\ 1\ 1 \dots 1)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если* $m < p^n$*, то* $\tau_{m+jp^n}\{n+1\} = \tau_m\{n\} \otimes \tau_j\{1\}$.

Доказательство. При $x \in \Delta_{n+1}^{s+kp}$ как и выше имеем

$$\tau_{m+jp^n}(s+kp)\{n+1\} = \psi_{m+jp^n}(x) = \psi_m(x) \cdot (r_n(x))^j = \tau_m(k)\{n\} \cdot \omega^{sj} = \\ = \tau_m(k) \cdot \tau_j(s)\{1\}. \qquad \square$$

11°. Формулы (4) или (7) служат определением дискретных функций Крестенсона в двух основных нумерациях. Предложим определение этих функций в виде векторов (то есть табличное задание дискретной функции) не привязанное к нумерации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Дискретной функцией Крестенсона уровня* n назовём кронекерово произведение в количестве n сомножителей векторов вида $r^{\bullet j}$, то есть степеней по Адамару дискретной экспоненциальной функции (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При фиксированных* p *и* n (*основании и уровня*) *дискретная функция Крестенсона* Ψ *однозначно задаётся своими* n *значениями на множестве аргументов* $A = \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$. *Основное множество аргументов* A *допускает замену на другое множество аргументов* A'. *Если число* p *простое, то вместо каждого аргумента* p^j *можно при формировании* A' *брать любое число из множества* $\{p^j, p^j + 1, \ldots, p^{j+1} - 1\}$.

Доказательство. По определению 2 произвольная дискретная функция Крестенсона уровня n имеет вид

$$\Psi = r^{\bullet j_{n-1}} \otimes r^{\bullet j_{n-2}} \otimes \ldots r^{\bullet j_1} \otimes r^{\bullet j_0}. \tag{9}$$

Так как начальное значение любой дискретной функции Крестенсона (нулевая координата) равно 1, то подвектор вектора Ψ, состоящий из его первых p координат, есть вектор $r^{\bullet j_0}$, координата с номером 1 которого равна ω^{j_0}. То есть $\Psi(1) = \omega^{j_0}$. В случае множества A' из простоты p вытекает, что все координаты вектора $r^{\bullet j_0}$ различны, и j_0 восстанавливается по номеру координаты.

Аналогично устанавливается, что подвектор вектора Ψ, состоящий из его первых p^2 координат, есть вектор $r^{\bullet j_1} \otimes r^{\bullet j_0}$, координата с номером p которого равна ω^{j_1}. То есть $\Psi(p) = \omega^{j_1}$. Зная j_0 и номер следующей координаты во множестве A', однозначно вычисляется j_1.

Этот процесс продолжается аналогично. В основном случае $\Psi(p^2) = \omega^{j_2}$. И так далее, $\Psi(p^k) = \omega^{j_k}$. В случае множества A' этот процесс несколько усложняется. □

12°. Комплексно-сопряжённой к дискретной экспоненциальной функции также будет ДЭФ: $\overline{r^{\bullet j}} = r^{\bullet (p-j)}$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 5. *Комплексно-сопряжённая к дискретной функции Крестенсона будет тоже дискретной функцией Крестенсона.*

При цифровой обработке сигналов с помощью ортогональных преобразований используется следующая схема, которую запишем в матричном виде.

По исходному сигналу x (в виде столбца длины N) спектральные характеристики y вычисляются применением *оператора анализа* по формуле

$$y = F^* \cdot x.$$

Восстанавливается сигнал с помощью *оператора синтеза* по формуле

$$x = \frac{1}{N} F \cdot y.$$

В качестве F берут матрицу дискретного преобразования Фурье порядка N, или дискретного преобразования Крестенсона (в нумерации Кронекера или Леви) порядка N, или какого-либо другого ортогонального преобразования.

Введем понятие дискретного преобразования Крестенсона произвольной нумерации. При этом потребуем, чтобы оба оператора анализа и синтеза выполнялись относительно дискретных функций Крестенсона. Соответствующую матрицу преобразования назовём *K-матрицей.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём K-матрицей уровня n такую матрицу, что: все её строчки есть различные дискретные функции Крестенсона уровня n; а также все её столбцы есть различные дискретные функции Крестенсона уровня n.

ТЕОРЕМА 1. *Если p простое, то между множествами невырожденных над полем $\mathbb{Z}_p$ матриц $B = (b_{lj})$ порядка n и K-матриц $V = (v_{rs})$ уровня n существует взаимно-однозначно соответствует по правилу $v_{p^l p^j} = \omega^{b_{lj}}$, где $l, j \in 0 : n-1$. Остальные элементы матрицы V восстанавливаются однозначно.*

Доказательство. Для матриц V, B той же буквой с нижним индексом будем обозначать строку матрицы с указанным номером.

По произвольному ненулевому вектору $B_0 = (b_{00}\ b_{01} \ldots b_{0n-1})$ (в качестве начальной строки B) соответствием $v_{1p^j} = \omega^{b_{0j}}$, где $j \in 0 : n-1$, однозначно определяем координаты строки V_1 с номерами, взятыми из выборки $\alpha = \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$. По предложению 4 восстанавливаем всю строку V_1.

Тогда следующие $(p-2)$ строки матрицы V получаются возведением в степень (по Адамару) этой строки: $V_l = V_1^{\bullet l}$, где $2 \leqslant l < p$.

Опишем индуктивный переход. Предположим, что построены первые p^{k-1} строк матрицы V по первым $(k-1)$ строкам матрицы B.

Строка V_{p^k} строится по предложению 4 через свои координаты с номерами из выборки α, которые в свою очередь вычислены через строку B_k по правилу $v_{p^k p^j} = \omega^{b_{kj}}$.

Линейная независимость строк B_0, B_1, B_2,..., B_k гарантирует то, что среди ранее построенных строк V_0, V_1, ..., $V_{p^{k-1}-1}$ не встречается строка $V_{p^{k-1}}$.

Строка с номером $sp^k + l$, где $l < p^k$, строится по правилу линейной перестановки

$$V_{sp^k+l} = V_{p^k}^{\bullet s} \bullet V_l.$$

Также из линейной независимости выводится, что и эта произвольная строка не могла встретиться среди ранее построенных строк.

Рассмотренный процесс построения обратим. Для произвольной K-матрицы с помощью выборки α выделяется её подматрица, по которой легко восстанавливается матрица B.

В заключении проверяется, что каждый столбец таким образом построенной матрицы есть дискретная функция Крестенсона. □

В этом доказательстве приведена общая схема, но отдельные детали не подробно обоснованы. В [5] предложено другое доказательство этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312`)

2. Беспалов М. С. *Спектральное разложение операторов дискретного преобразования Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 8 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1008`)

3. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975.

4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Обобщённые вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина-Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.

5. Беспалов М. С. *Дискретное преобразование Крестенсона* // Проблемы передачи инф. 2010. Т. 46. Вып. 4. С. 91–115.

6. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* М.: Наука, 1987.

7. Levy P. *Sur une generalisation des fonctions orthogonales de M. Rademacher* // Comment. math. helv. 1944. V. 16. P. 146–152.

8. Chrestenson H. E. *A class of generalized Walsh functions* // Pacific. J. Math. 1955. V. 5. Ch. 1. P. 17–32.

СХОДИМОСТЬ СХЕМЫ SUBDIVISION В СЛУЧАЕ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. В. Чашников

7 апреля 2012 г.

Данный доклад основан на книге [1]. Описан вариант метода subdivision, в котором контрольные точки образуют в пространстве регулярную четырёхугольную сетку. Рассмотрен вопрос сходимости схемы subdivision в случае, когда маска представима в виде тензорного произведения.

1°. Пусть задано семейство вещественных чисел $\{s_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, в котором лишь конечное число членов отлично от нуля. Семейство $\{s_{jk}\}$ можно переписать в эквивалентной форме при помощи мультииндекса $\alpha = (j,k)$: $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}$.

Пусть также задана начальное семейство векторов $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}$ из пространства $\mathbb{R}^3$, в котором только конечное число членов отлично от нуля. Определим последовательности векторов $\{\mathbf{p}^m_\alpha\}$, $m = 1, 2, \ldots$, при помощи рекуррентного соотношения

$$\mathbf{p}^m_\beta = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} s_{\beta-2\alpha}\,\mathbf{p}^{m-1}_\alpha, \qquad \beta\in\mathbb{Z}^2, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Такой метод построения последовательностей векторов $\{\mathbf{p}^m_\alpha\}$ называется *стационарной схемой subdivision с маской* $\{s_\alpha\}$. Векторы $\mathbf{p}^m_\alpha$ называются контрольными точками; $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}$ — начальный набор контрольных точек.

В некоторых случаях удобно рассматривать вместо семейств чисел и векторов производящие функции. Маске $\{s_\alpha\}$ соответствует производящая функция

$$s(z_1, z_2) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} s_{jk}\, z_1^j\, z_2^k.$$

Производящую функцию можно записать в компактной форме

$$s(z) = \sum_\alpha s_\alpha\, z^\alpha,$$

где вектор $z = (z_1, z_2)$ возводится в степень $\alpha = (j,k)$ по формуле $z^\alpha = z_1^j\, z_2^k$. Здесь и далее мы будем опускать пределы суммирование, если суммирование

ведётся по всему множеству $\mathbb{Z}^2$. В действительности в каждой сумме лишь конечное число членов отлично от нуля, так что вопросы сходимости не возникают.

Аналогично вводится производящая функция $\mathbf{p}^m(z)$ для набора контрольных точек $\{\mathbf{p}^m_\alpha\}$:

$$\mathbf{p}^m(z) = \sum_\alpha \mathbf{p}^m_\alpha\, z^\alpha.$$

Соотношение (1) эквивалентно соотношению для производящих функций

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\,\mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Здесь вектор z возводится в квадрат покомпонентно: $z^2 = (z_1, z_2)^2 = (z_1^2, z_2^2)$.

2°. Положим

$$\widehat{N}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{при остальных } t; \end{cases}$$
$$\widehat{N}_2(u_1, u_2) = \widehat{N}(u_1)\widehat{N}(u_2).$$

При $m \geqslant 0$ определим вектор-функцию $\mathbf{P}^m$ по формуле

$$\mathbf{P}^m(u) = \sum_\alpha \mathbf{p}^m_\alpha\, \widehat{N}_2(2^m u - \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Ясно, что $\mathbf{P}^m(u)$ является непрерывной кусочно-билинейной функцией, принимающей значения $\mathbf{p}^m_\alpha$ в точках $\frac{\alpha}{2^m}$.

Определим норму мультииндекса $\alpha = (j, k)$ следующим образом:

$$\|\alpha\| = \max\bigl\{|j|, |k|\bigr\}.$$

ЛЕММА. *Пусть заданы схема subdivision с маской $\{s_\alpha\}$ и начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}$. Положим*

$$A = \max\bigl\{\|\alpha\| \mid s_\alpha \neq 0\bigr\}, \qquad a_0 = \max\bigl\{\|\alpha\| \mid \mathbf{p}^0_\alpha \neq 0\bigr\}.$$

Тогда носители вектор-функций $\mathbf{P}^m$ ограничены в совокупности:

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-(A + a_0 + 1), A + a_0 + 1]^2, \quad m \geqslant 0.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$a_m = \max\{\|\alpha\| \mid \mathbf{p}^m_\alpha \neq 0\}, \quad m \geqslant 1.$$

При $m = 0$ данное обозначение согласуется с обозначением a_0 из формулировки леммы.

Зафиксируем натуральное m и рассмотрим рекуррентное соотношение (1) при $\beta \in \mathbb{Z}^2$. Предположим, что вектор $\mathbf{p}_\beta^m$ отличен от нуля. В таком случае в сумме из правой части (1) есть ненулевое слагаемое. Поэтому найдётся мультииндекс α, удовлетворяющий условиям

$$\|\alpha\| \leqslant a_{m-1} \quad \text{и} \quad \|\beta - 2\alpha\| \leqslant A. \tag{4}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Перепишем неравенства (4) в виде

$$\alpha_1 \in [-a_{m-1}, a_{m-1}], \quad \alpha_1 \in \left[\tfrac{\beta_1 - A}{2}, \tfrac{\beta_1 + A}{2}\right],$$
$$\alpha_2 \in [-a_{m-1}, a_{m-1}], \quad \alpha_2 \in \left[\tfrac{\beta_2 - A}{2}, \tfrac{\beta_2 + A}{2}\right].$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$[-a_{m-1}, a_{m-1}] \cap \left[\tfrac{\beta_1 - A}{2}, \tfrac{\beta_1 + A}{2}\right] \neq \varnothing,$$
$$[-a_{m-1}, a_{m-1}] \cap \left[\tfrac{\beta_2 - A}{2}, \tfrac{\beta_2 + A}{2}\right] \neq \varnothing.$$

Пересечение двух отрезков непусто, только если расстояние между центрами не превосходит полусуммы их длин, поэтому выполняются неравенства

$$|\beta_1/2| \leqslant a_{m-1} + \tfrac{A}{2}, \qquad |\beta_2/2| \leqslant a_{m-1} + \tfrac{A}{2}.$$

Итак, если вектор $\mathbf{p}_\beta^m$ отличен от нуля, то $\|\beta\| \leqslant 2a_{m-1} + A$. Значит,

$$a_m \leqslant 2a_{m-1} + A.$$

Последовательно применяя полученное неравенство, запишем

$$2^{-m} a_m \leqslant 2^{m-1} a_{m-1} + 2^{-m} A \leqslant 2^{m-2} a_{m-2} + 2^{-(m-1)} A + 2^{-m} A \leqslant$$
$$\leqslant \cdots \leqslant a_0 + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} A < a_0 + A.$$

Рассмотрим определение (3) вектор-функции $\mathbf{P}^m(u)$. Носителем функции $\widehat{N}_2(u)$ является квадрат $[-1, 1]^2$. Поэтому значение $\widehat{N}_2(2^m u - \alpha)$ может быть отлично от нуля, только если u принадлежит квадрату

$$[2^{-m}(\alpha_1 - 1), 2^{-m}(\alpha_1 + 1)] \times [2^{-m}(\alpha_2 - 1), 2^{-m}(\alpha_2 + 1)].$$

Носитель функции $\mathbf{P}^m(u)$ содержится в объединении таких квадратов по всем α из множества $(-a_m : a_m)^2$, то есть

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-2^{-m}(a_m + 1),\, 2^{-m}(a_m + 1)]^2 \subset [-(a_0 + A) - 2^{-m},\, a_0 + A + 2^{-m}]^2.$$

Значит, для всех m справедливо включение

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-(A + a_0 + 1), A + a_0 + 1]^2.$$

Лемма доказана. $\square$

3°. Схема subdivision называется *сходящейся*, если для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$ последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(u)$ равномерно сходится. Будем называть схему subdivision *вырожденной*, если для любого начального набора контрольных точек последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(u)$ равномерно сходится к вектор-функции, тождественно равной нулю.

Обозначим через $\mathbf{P}$ предел последовательности вектор-функций $\mathbf{P}^m$. Очевидно, что вектор-функция $\mathbf{P}(u)$ непрерывна. Из леммы следует, что носитель вектор-функции $\mathbf{P}(u)$ ограничен. Кроме того, справедливо неравенство

$$\max_\alpha \|\mathbf{p}_\alpha^m - \mathbf{P}(2^{-m}\alpha)\| = \max_\alpha \|\mathbf{P}^m(2^{-m}\alpha) - \mathbf{P}(2^{-m}\alpha)\| \leqslant \max_{u\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{P}^m(u) - \mathbf{P}(u)\|.$$

Значит, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \max_\alpha \|\mathbf{p}_\alpha^m - \mathbf{P}(2^{-m}\alpha)\| = 0. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_\alpha\}$ сходится и невырождена. Тогда при любом мультииндексе $\delta \in \{0,1\}^2$ справедливо равенство*

$$\sum_\alpha s_{2\alpha+\delta} = 1. \tag{6}$$

Доказательство. Возьмём такой начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$, для которого предельная вектор-функция $\mathbf{P}(u)$ не равна тождественно нулю. Тогда найдётся натуральное число M и $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ такие, что $\mathbf{P}(2^{-M}\alpha) \neq 0$.

Зафиксируем натуральное число $m > M$ и мультииндекс $\delta \in \{0,1\}^2$. В силу рекуррентного соотношения (1) имеем

$$\mathbf{p}^m_{2^{m-M}\alpha+\delta} = \sum_\beta s_{2^{m-M}\alpha+\delta-2\beta}\, \mathbf{p}_\beta^{m-1} = \sum_\gamma s_{2\gamma+\delta}\, \mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}\alpha-\gamma}.$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\mathbf{P}(2^{-M}\alpha + 2^{-m}\delta) - \sum_\gamma s_{2\gamma+\delta}\, \mathbf{P}(2^{-M}\alpha - 2^{-m+1}\gamma) =$$

$$= \big[\mathbf{P}(2^{-M}\alpha + 2^{-m}\delta) - \mathbf{p}^m_{2^{m-M}\alpha+\delta}\big] + \sum_\gamma s_{2\gamma+\delta}\big[\mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}\alpha-\gamma} - \mathbf{P}(2^{-M}\alpha - 2^{-m+1}\gamma)\big].$$

Согласно предельному соотношению (5), первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $m \to \infty$. Разность

$$\mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}\alpha-\gamma} - \mathbf{P}(2^{-M}\alpha - 2^{-m+1}\gamma)$$

также стремится к нулю, а так как коэффициенты $s_{2\gamma+\delta}$ отличны от нуля только для конечного числа мультииндексов γ, то и вся правая часть стремится к нулю. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в левой части и пользуясь непрерывностью вектор-функции $\mathbf{P}(u)$, получаем

$$\mathbf{P}(2^{-M}\alpha)\Big(1 - \sum_{\gamma} s_{2\gamma+\delta}\Big) = 0.$$

Осталось заметить, что $\mathbf{P}(2^{-M}\alpha)$ отлично от нуля, поэтому

$$\sum_{\gamma} s_{2\gamma+\delta} = 1,$$

что и требовалось. □

4°. Пусть заданы последовательности вещественных чисел $\{s_j^1\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{s_k^2\}_{k\in\mathbb{Z}}$, в которых лишь конечное число членов отлично от нуля. Определим семейство чисел $\{s_{jk}\}_{k,j\in\mathbb{Z}}$ формулой

$$s_{jk} = s_j^1\, s_k^2, \quad j,k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Ясно, что в $\{s_{jk}\}$ только конечное число членов отлично от нуля. Обозначим через $s^1(z)$ и $s^2(z)$ производящие функции последовательностей $\{s_j^1\}$ и $\{s_k^2\}$ соответственно. Найдём производящую функцию $s(z_1, z_2)$ для маски subdivision $\{s_{jk}\}$. Согласно формуле (7) имеем

$$s(z_1, z_2) = \sum_{jk} s_{jk}\, z_1^j\, z_2^k = \sum_j s_j^1\, z_1^j \sum_k s_k^2\, z_2^k = s^1(z_1)\, s^2(z_2).$$

Предположим, что схемы subdivision с масками $\{s_j^1\}$ и $\{s_k^2\}$ сходятся. Проведём процесс subdivision с маской $\{s_j^1\}$ и начальным набором контрольных точек, задаваемым равенством

$$f_j^0 = \delta_{j0}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{f_j^m\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге m процесса subdivision, а через $f^m(z)$ — соответствующую производящую функцию. При доказательстве теоремы 1 из [2] было получено явное выражение для $f^m(z)$:

$$f^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s^1(z^{2^j}). \tag{8}$$

Введём кусочно-линейные функции

$$F^m(t) = \sum_j f_j^m \widehat{N}(2^m t - j), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как схема subdivision сходится, существует функция $F(t)$, являющаяся пределом функций $F^m(t)$ при неограниченном увеличении m.

Аналогично, проведём процесс subdivision с маской $\{s_k^2\}$ и начальным набором контрольных точек, задаваемым равенством

$$g_k^0 = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{g_k^m\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге m процесса subdivision, а через $g^m(z)$ — соответствующую производящую функцию, для которой справедлива формула

$$g^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s^2(z^{2^j}). \tag{9}$$

Введём кусочно-линейные функции

$$G^m(t) = \sum_k g_k^m \widehat{N}(2^m\, t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $G(t)$ предел последовательности функций $G^m(t)$ при m, стремящемся к бесконечности.

Зафиксируем произвольный начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$. Применяя рекуррентное соотношение (2), при натуральном m получаем

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = s(z)s(z^2)\mathbf{p}^{m-2}(z^4) = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j})\mathbf{p}^0(z^{2^m}). \tag{10}$$

Проведём процесс subdivision с маской $\{s_{kj}\}$ для начального набора контрольных точек

$$h_{jk}^0 = \delta_{j0}\,\delta_{k0}, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{h_{jk}^m\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге m, а через $h^m(z)$ — соответствующую производящую функцию. Ясно, что $h^0(z) \equiv \equiv 1$. Подставляя $h^0(z)$ в формулу (10) и пользуясь равенствами (8) и (9), получаем

$$h^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j}) = \prod_{j=0}^{m-1} s^1(z_1^{2^j})\, s^2(z_2^{2^j}) = f^m(z_1)\, g^m(z_2). \tag{11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z_1, z_2, приходим к равенству

$$h_{jk}^m = f_j^m\, g_k^m, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Введём кусочно-линейные функции

$$H^m(u) = \sum_\alpha h^m_\alpha \widehat{N}_2(2^m u - \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

В силу (12) имеем

$$H^m(u_1, u_2) = \sum_{j,k} f^m_j \, g^m_k \widehat{N}(2^m u_1 - j) \, \widehat{N}(2^m u_2 - k) = F^m(u_1) \, G^m(u_2).$$

Значит, последовательность функций $H^m(u)$ равномерно сходится к функции $H(u)$, задаваемой равенством

$$H(u_1, u_2) = F(u_1) \, G(u_2). \tag{13}$$

Вернёмся к процессу subdivision с произвольным начальным набором контрольных точек $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}$. Учитывая (11), равенство (10) можно переписать в виде

$$\mathbf{p}^m(z) = h^m(z) \, \mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем

$$\mathbf{p}^m_\alpha = \sum_\beta h^m_{\alpha - 2^m \beta} \, \mathbf{p}^0_\beta.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^m(u) &= \sum_\alpha \mathbf{p}^m_\alpha \widehat{N}_2(2^m u - \alpha) = \sum_\alpha \sum_\beta h^m_{\alpha - 2^m \beta} \, \mathbf{p}^0_\beta \, \widehat{N}_2(2^m u - \alpha) = \\ &= \sum_\beta \mathbf{p}^0_\beta \sum_\gamma h^m_\gamma \widehat{N}_2(2^m u - 2^m \beta - \gamma) = \sum_\beta \mathbf{p}^0_\beta \, H^m(u - \beta). \end{aligned}$$

Делаем вывод, что последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(u)$ равномерно сходится, и для предельной вектор-функции $\mathbf{P}(u)$ справедливо представление

$$\mathbf{P}(u) = \sum_\beta \mathbf{p}^0_\beta \, H(u - \beta). \tag{14}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть схемы subdivision с масками* $\{s^1_j\}$ *и* $\{s^2_k\}$ *сходятся. Тогда схема subdivision с маской* $\{s_{jk}\}$, *определяемой равенством* (7), *также сходится. При этом предельная функция процесса subdivision выражается через начальный набор контрольных точек формулой* (14), *где функция* $H(u)$ *определяется равенством* (13).

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть схемы subdivision с масками* $\{s_j^1\}$ *и* $\{s_k^2\}$ *сходятся, и для каждой маски и любого начального набора контрольных точек предельные вектор-функции процессов subdivision принадлежат пространству* $C^r(\mathbb{R})$ *при некотором* $r \geqslant 0$. *Тогда для любого начального набора контрольных точек предельная вектор-функция процесса subdivision с маской* $\{s_{jk}\}$ *принадлежит пространству* $C^r(\mathbb{R}^2)$.

5°. Перейдём к геометрической интерпретации процесса subdivision в случае двух переменных. Пусть задан набор точек $\{\mathbf{p}_{jk}^0 \mid j \in 0 : M,\ k \in 0 : N\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Положим $\mathbf{p}_{jk}^0 = 0$ при остальных j, k и проведём m шагов процесса subdivision. Полученному набору контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^m\}$ соответствует кусочно-билинейная поверхность, задаваемая вектор-функцией $\mathbf{P}^m(u)$. Сходимость схемы subdivision гарантирует, что при увеличении m полученные поверхности будут стремиться к предельной поверхности. Однако с практической точки зрения удобнее использовать вместо кусочно-билинейной поверхности многогранную поверхность с вершинами $\mathbf{p}_\alpha^m$. Гранями поверхности являются либо четырёхугольники вида

$$(\mathbf{p}_{j,k}^m, \mathbf{p}_{j+1,k}^m, \mathbf{p}_{j+1,k+1}^m, \mathbf{p}_{j,k+1}^m),$$

либо, если вершины такого четырёхугольника не лежат на одной плоскости, треугольники вида

$$(\mathbf{p}_{j,k}^m, \mathbf{p}_{j+1,k}^m, \mathbf{p}_{j,k+1}^m), \quad (\mathbf{p}_{j+1,k+1}^m, \mathbf{p}_{j+1,k}^m, \mathbf{p}_{j,k+1}^m).$$

При достаточно больших m грани малы, поэтому разница между кусочно-билинейной и многогранной поверхностями несущественна. Как и в случае одной переменной [2, пункт 4], рассматриваются только те вершины $\mathbf{p}_\alpha^m$, на значения которых не повлияли искусственно добавленные в начальный набор векторов $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$ нулевые элементы.

Известно, что в случае одной переменной схема subdivsion с маской $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ сходится, и для любого начального набора контрольных точек предельная вектор-функция принадлежит пространству C^1 (см. [3]). Определим маску $\{s_{jk}\}$ по формуле (7), взяв в качестве $\{s_j^1\}$ и $\{s_k^2\}$ указанную маску. Ненулевые члены $\{s_{jk}\}$ образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Согласно следствию из теоремы 2, процесс subdivision, задаваемый маской (15), сходится к гладкой вектор-функции при любом начальном наборе контрольных точек.

Приведём пример построения поверхности методом subdivision. На рис. 1 изображена многогранная поверхность, задаваемая начальным набором контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$. На рис. 2–4 показаны поверхности, получаемые после первого, второго и третьего шага процесса subdivision с маской (15).

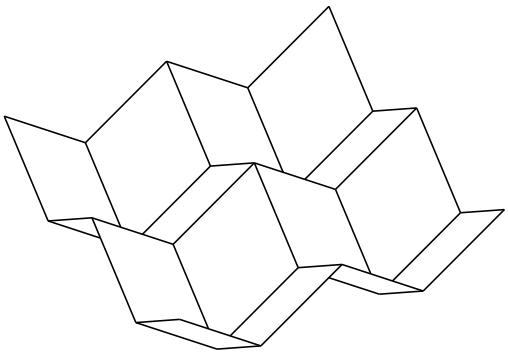


Рис. 1. $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$

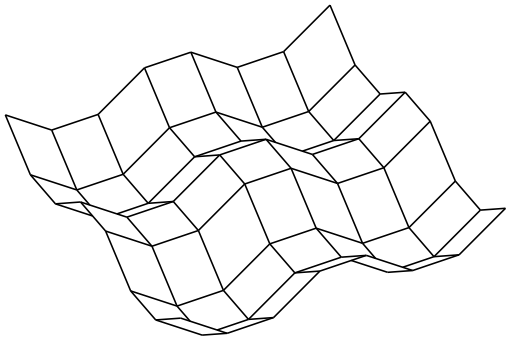


Рис. 2. $\{\mathbf{p}_\alpha^1\}$

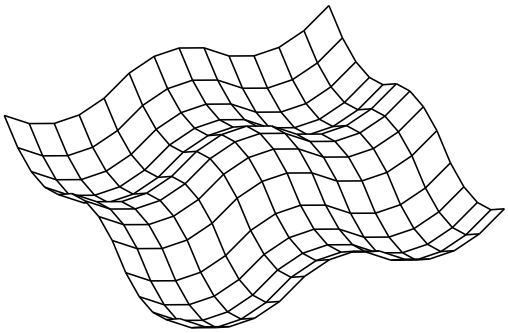


Рис. 3. $\{\mathbf{p}_\alpha^2\}$

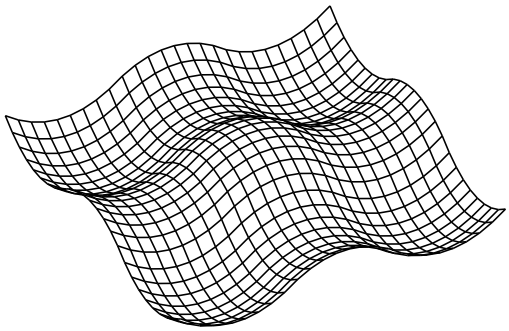


Рис. 4. $\{\mathbf{p}_\alpha^3\}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersson L. E., Stewart N. F. *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces.* SIAM, 2010.

2. Чашников Н. В. *Предельные теоремы для схемы subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 11 февраля 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0211`).

3. Чашников Н. В. *Построение кривых методом subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1001`).

ОБОБЩЁННЫЕ ПОЛИНОМЫ ШАПИРО И МАТРИЦЫ PONS

И. С. Стояноска

19 мая 2012 г.

1°. Обобщённые полиномы Шапиро были введены в работе [1] с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} P_{m+1,4j}(x) &= P_{m,2j}(x) + x^{2^m} P_{m,2j+1}(x), \\ P_{m+1,4j+1}(x) &= P_{m,2j}(x) - x^{2^m} P_{m,2j+1}(x), \\ P_{m+1,4j+2}(x) &= P_{m,2j+1}(x) + x^{2^m} P_{m,2j}(x), \\ P_{m+1,4j+3}(x) &= -P_{m,2j+1}(x) + x^{2^m} P_{m,2j}(x), \\ m = 1, 2, \ldots; &\quad j \in 0 : 2^{m-1} - 1, \end{aligned} \tag{1}$$

и начальных условий

$$P_{1,0}(x) = 1 + x, \quad P_{1,1}(x) = 1 - x.$$

В докладе мы коснёмся некоторых свойств таких полиномов.

2°. Из (1), в частности, следует, что при $m = 1$ (и $j = 0$)

$$\begin{aligned} P_{2,0}(x) &= 1 + x + x^2 - x^3, \\ P_{2,1}(x) &= 1 + x - x^2 + x^3, \\ P_{2,2}(x) &= 1 - x + x^2 + x^3, \\ P_{2,3}(x) &= -1 + x + x^2 + x^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Ясно, что полиномы $P_{m,k}(x)$ определены при $k \in 0 : 2^m - 1$, их степень равна $2^m - 1$ и все коэффициенты принимают значения ± 1. Эти полиномы полностью задаются набором знаков своих коэффициентов. Так формулы (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_{2,0} &= (+++-), \\ P_{2,1} &= (++-+), \\ P_{2,2} &= (+-++), \\ P_{2,3} &= (-+++). \end{aligned}$$

Представим в аналогичном виде полиномы $P_{3,k}(x)$, $k \in 0:7$. На основании формул (1) при $m = 2$ и $j \in 0:1$ имеем

$$\begin{aligned}
P_{3,0} &= (+++-++-+),\\
P_{3,1} &= (+++---+-),\\
P_{3,2} &= (++-++++-),\\
P_{3,3} &= (--+-++++-),\\
P_{3,4} &= (+-++-+++),\\
P_{3,5} &= (+-+++---),\\
P_{3,6} &= (-+++++-++),\\
P_{3,7} &= (+---+-++).
\end{aligned} \tag{3}$$

3°. Из определения обобщённых полиномов Шапиро непосредственно следует, что при всех комплексных z с $|z| = 1$ выполняется неравенство

$$|P_{m,2j}(z)|^2 + |P_{m,2j+1}(z)|^2 \leqslant 2^{m+1}.$$

На самом деле, справедлив более тонкий результат, отмеченный в [1].

ТЕОРЕМА 1. *При всех $m \geqslant 1$, $j \in 0 : 2^{m-1} - 1$ и комплексных z с $|z| = 1$ справедливо тождество*

$$|P_{m,2j}(z)|^2 + |P_{m,2j+1}(z)|^2 \equiv 2^{m+1}. \tag{4}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством, справедливым для любых комплексных чисел z_1, z_2:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

При $m = 1$ ($j = 0$) и $|z| = 1$ получим

$$|P_{1,0}(z)|^2 + |P_{1,1}(z)|^2 = |1 + z|^2 + |1 - z|^2 \equiv 4.$$

Сделаем индукционный переход от m к $m + 1$, считая, что $m \geqslant 1$.

Индекс $j \in 0 : 2^m - 1$ можно представить в виде $j = 2j'$ или $j = 2j' + 1$, где $j' \in 0 : 2^{m-1} - 1$. В первом случае на основании (1) и индукционного предположения имеем

$$\begin{aligned}
|P_{m+1,2j}(z)|^2 + |P_{m+1,2j+1}(z)|^2 &= |P_{m+1,4j'}(z)|^2 + |P_{m+1,4j'+1}(z)|^2 =\\
&= \left|P_{m,2j'}(z) + z^{2^m} P_{m,2j'+1}(z)\right|^2 + \left|P_{m,2j'}(z) - z^{2^m} P_{m,2j'+1}(z)\right|^2 =\\
&= 2\left(|P_{m,2j'}(z)|^2 + |P_{m,2j'+1}(z)|^2\right) \equiv 2^{m+2}.
\end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай $j = 2j' + 1$.

Теорема доказана. □

4°. Выделим из (1) первые два соотношения при $j = 0$:

$$\begin{gathered} P_{m+1,0}(x) = P_{m,0}(x) + x^{2^m} P_{m,1}(x), \\ P_{m+1,1}(x) = P_{m,0}(x) - x^{2^m} P_{m,1}(x), \\ m = 1, 2, \ldots. \end{gathered}$$

К этому добавим начальные условия

$$P_{1,0}(x) = 1 + x, \quad P_{1,1}(x) = 1 - x.$$

Вспоминаем (см. [2]), что такие же рекуррентные соотношения определяют полиномы Шапиро. Значит,

$$P_{m,0}(x) = P_m(x), \quad P_{m,1}(x) = Q_m(x).$$

Известно, что векторы коэффициентов полиномов Шапиро $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ ортогональны. Аналогичное свойство имеет место и для обобщённых полиномов Шапиро.

Обозначим через $\mathbf{a}_{m,k}$ вектор коэффициентов полинома $P_{m,k}(x)$.

ТЕОРЕМА 2. *Векторы* $\mathbf{a}_{m,k}$, $k \in 0 : 2^m - 1$, *попарно ортогональны и* $\|\mathbf{a}_{m,k}\|^2 = 2^m$.

Доказательство. Напомним, что координаты обобщённых полиномов Шапиро принимают значения ± 1, поэтому $\|\mathbf{a}_{m,k}\|^2 = 2^m$. Проверим ортогональность. При $m = 1$ она очевидна. Сделаем индукционный переход от m к $m + 1$. Для этого перепишем соотношения (1) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{m+1,4j} &= (\mathbf{a}_{m,2j}, \mathbf{a}_{m,2j+1}), \\ \mathbf{a}_{m+1,4j+1} &= (\mathbf{a}_{m,2j}, -\mathbf{a}_{m,2j+1}), \\ \mathbf{a}_{m+1,2j+2} &= (\mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j}), \\ \mathbf{a}_{m+1,4j+3} &= (-\mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j}). \end{aligned}$$

По индукционному предположению, $\langle \mathbf{a}_{m,k}, \mathbf{a}_{m,k'} \rangle = 0$ при $k \neq k'$. Значит,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_{m+1,4j}, \mathbf{a}_{m+1,4j+1} \rangle &= \langle \mathbf{a}_{m,2j}, \mathbf{a}_{m,2j} \rangle - \langle \mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j+1} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{a}_{m+1,4j}, \mathbf{a}_{m+1,4j+2} \rangle &= \langle \mathbf{a}_{m,2j}, \mathbf{a}_{m,2j+1} \rangle + \langle \mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\langle \mathbf{a}_{m+1,4j+\sigma}, \mathbf{a}_{m+1,4j'+\sigma'} \rangle = 0 \quad \text{при } (j, \sigma) \neq (j', \sigma').$$

Теорема доказана. □

5°. Квадратная матрица $\mathcal{P}_m$ порядка 2^m со строками

$$\mathbf{a}_{m,0}, \mathbf{a}_{m,1}, \ldots, \mathbf{a}_{m,2^m-1}$$

называется матрицей PONS [3]. Формула (3) даёт представление о матрице $\mathcal{P}_3$. Матрица $\mathcal{P}_4$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}_4 = \begin{bmatrix}
+ & + & + & - & + & + & - & + & + & + & + & - & - & - & + & - \\
+ & + & + & - & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + & - & + \\
+ & + & + & - & - & - & + & - & + & + & + & - & + & + & - & + \\
- & - & - & + & + & + & - & + & + & + & + & - & + & + & - & + \\
+ & + & - & + & + & + & + & - & - & - & + & - & + & + & + & - \\
+ & + & - & + & + & + & + & - & + & + & - & + & - & - & - & + \\
- & - & + & - & + & + & + & - & + & + & - & + & + & + & + & - \\
+ & + & - & + & - & - & - & + & + & + & - & + & + & + & + & - \\
+ & - & + & + & - & + & + & + & + & - & + & + & + & - & - & - \\
+ & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + \\
+ & - & + & + & + & - & - & - & + & - & + & + & - & + & + & + \\
- & + & - & - & - & + & + & + & + & - & + & + & - & + & + & + \\
- & + & + & + & + & - & + & + & + & - & - & - & + & - & + & + \\
- & + & + & + & + & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & - \\
+ & - & - & - & + & - & + & + & - & + & + & + & + & - & + & + \\
- & + & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + & + & - & + & +
\end{bmatrix}.$$

Строку с индексом k матрицы $\mathcal{P}_m$ можно воспринимать как значения дискретного сигнала

$$p_k(j) = \mathbf{a}_{m,k}(j), \quad k, j \in 0 : 2^m - 1.$$

Согласно теореме 2 сигналы p_k попарно ортогональны и $\|p_k\|^2 = 2^m$ при всех $k \in 0 : 2^m - 1$. Это позволяет включить систему сигналов $\{p_k\}$ в аппарат дискретного гармонического анализа.

На рис. 1 изображены графики функций $p_k(j)$ при $m = 3$.

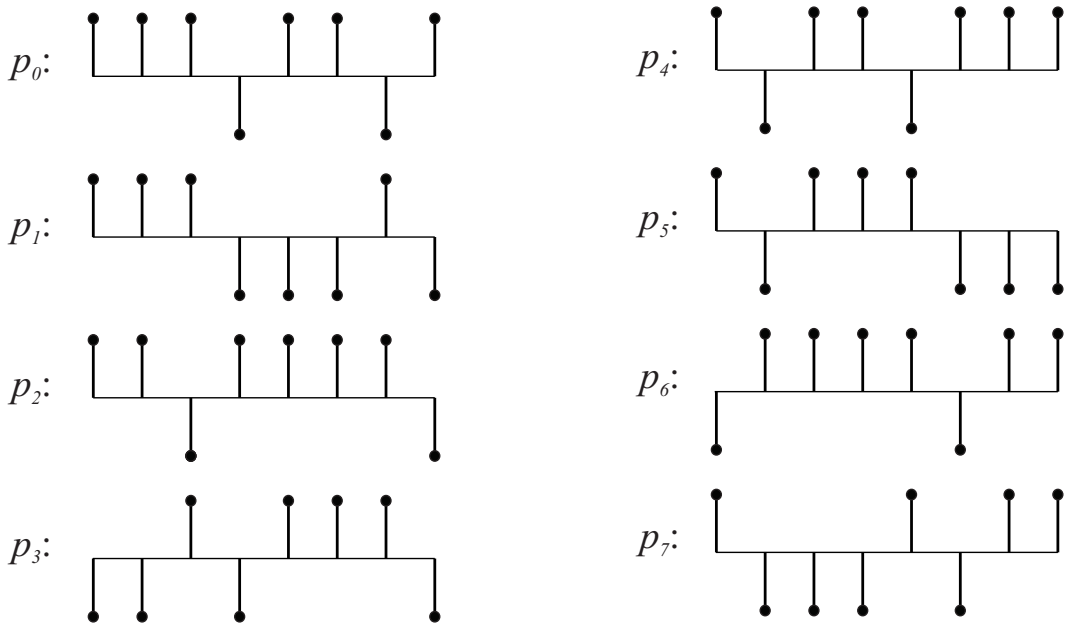


Рис. 1

Сформулируем две гипотезы.

ГИПОТЕЗА 1. *Матрицы $\mathcal{P}_m$ при всех $m \geqslant 1$ симметричны.*

При $m = 1, 2, 3$ симметричность проверяется непосредственно. Симметричность матриц $\mathcal{P}_m$ до $m = 10$ была проверена с помощью компьютерной программы.

Положим $n = 2^m$. Через $k = (k_{m-2}, k_{m-3}, \ldots, k_0)_2$ обозначим двоичный код числа $k \in 0 : \frac{n}{2} - 1$.

ГИПОТЕЗА 2. *При всех $m \geqslant 2$ и $k, k' \in 0 : \frac{n}{2} - 1$, справедливо соотношение*

$$p_k(j)p_{k'}(j) = \alpha^m_{k,k'}\, p_{\frac{n}{2}+k}(j)p_{\frac{n}{2}+k'}(j), \quad j \in 0 : n-1, \tag{5}$$

где

$$\alpha^m_{k,k'} = (-1)^{k_{m-2}+k'_{m-2}}.$$

При $m = 3$ матрица коэффициентов $\{\alpha^3_{k,k'}\}$ выглядит так:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Справедливость формулы (5) при $m = 2, 3$ проверяется непосредственно, а при $m = 4, 5, \ldots, 10$ — с помощью компьютерной программы.

6°. Любой вещественный сигнал $x = x(j)$, $j \in 0 : n-1$, можно разложить по PONS-базису $\{p_k(j)\}_{k=0}^{n-1}$:

$$x(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, p_k \rangle \, p_k(j), \quad j \in 0 : n-1.$$

Рассмотрим частные суммы

$$x_\nu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\nu-1} \langle x, p_k \rangle \, p_k, \quad \nu \in 1 : n. \tag{6}$$

Они допускают представление

$$x_\nu = D_{m,\nu} \, x, \tag{7}$$

где $D_{m,\nu}$ — квадратные матрицы вида

$$D_{m,\nu} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\nu-1} \mathbf{a}^\top_{m,k} \, \mathbf{a}_{m,k}.$$

Мы воспользовались определением сигналов p_k и тем, что $\mathbf{a}_{m,k}$ — вектор-строки. Отметим, что формула (6) — это равенство строк, а формула (7) — равенство столбцов.

Константой Лебега называется норма матрицы $D_{m,\nu}$, согласованная с равномерной нормой сигнала. Обозначим её $L_{m,\nu}$. По определению

$$L_{m,\nu} = \max_{i \in 0:n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \bigl| D_{m,\nu}[i,k] \bigr|.$$

Сформулируем еще две гипотезы.

ГИПОТЕЗА 3. *Константы Лебега $L_{m,\nu}$ не зависят от m.*

Табл. поясняет эту гипотезу.

Таблица

m	$L_{m,\nu}, \quad \nu \in 1:2^m$															
2	1	1	$\frac{3}{2}$	1												
3	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1								
4	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	1
5	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	1

ГИПОТЕЗА 4. *При $m \geqslant 2$ верны формулы*

$$L_{m,2^s} = 1, \quad s \in 0:m; \tag{8}$$

$$L_{m,2^s+j} = L_{m,2^s-j} + \frac{j}{2^s}, \quad j \in 1:2^s-1,\ s = 1,2,\ldots,m-1. \tag{9}$$

Справедливость этой гипотезы до $m = 6$ проверена на компьютере. Полученное мной предварительное доказательство гипотезы 4 опирается на гипотезы 1, 2 и 3.

Формулы (8), (9) позволяют вычислить значения $L_{m,\nu}$ при всех $\nu \in 1:n$. Согласно (8), $L_{m,1} = L_{m,2} = 1$. При $s = 1$ и $j = 1$ в силу (9) находим $L_{m,3}$. При каждом следующем s вычисляются значения $L_{m,\nu}$ при ν от 2^s до $2^{s+1} - 1$.

На рис. 2 изображён график $L_{m,\nu}$ как функции от ν при $m = 6$.

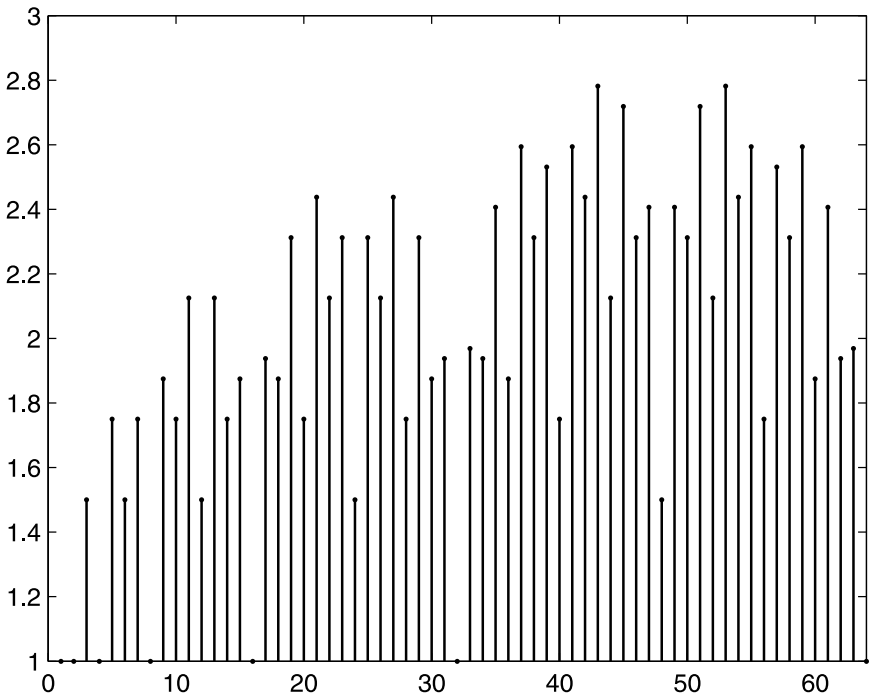


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Byrnes J. S. *Quadrature mirror filters, low crest factor arrays, functions achieving optimal uncertainty principle bounds, and complete orthonormal sequences — a unified approach* // Applied and Computational Harmonic Analysis. 1994. Vol. 1, P. 261–266.

2. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Полиномы Шапиро и коды Рида-Маллера* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 26 ноября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1126`)

3. An M., Byrnes J., Moran W., Saffari B., Shapiro H. S., Tolimieri R. *PONS, Reed-Muller codes, and group algebras* // NATO Advanced Study Institute: Computational Noncommutative Algebra and Applications. Tuscany, Italy. July 2003. P. 155–197.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М. С. БЕСПАЛОВА О ФРЕЙМАХ ПАРСЕВАЛЯ

М. Н. Юркина

9 июня 2012 г.

1°. Существуют четыре определения жёсткого фрейма в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. [1]). Мы воспользуемся двумя из них.

Система ненулевых n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ при $m > n$ называется жёстким фреймом, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

1) *матрица Φ со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ удовлетворяет соотношению*

$$\Phi\Phi^T = AI_n,$$

где I_n — единичная матрица порядка n и

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2;$$

2) *справедливо равенство*

$$\sum_{i,j=1}^{m} |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|^2 = nA^2. \tag{1}$$

Вычислим квадрат сферической нормы матрицы Φ. По определению

$$\|\Phi\|^2 := \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \big|\Phi[s,k]\big|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2 = nA. \tag{2}$$

Введём матрицу Грама $G = \Phi^T\Phi$ и вычислим квадрат её сферической нормы:

$$\|G\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|^2. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) позволяют переписать равенство (1), определяющее жёсткий фрейм, в другом виде

$$\|G\|^2 = nA^2 = \frac{1}{n}(nA)^2 = \frac{1}{n}\|\Phi\|^4. \tag{4}$$

2°. *Фреймом Парсеваля* называется жёсткий фрейм с константой фрейма A, равной единице, $A = 1$. Таким образом, фрейм Парсеваля определяется условием

$$\Phi\Phi^T = I_n. \tag{5}$$

Согласно (2) и (4) для фрейма Парсеваля выполняются соотношения

$$\|\Phi\|^2 = n, \qquad \|G\|^2 = n.$$

По свойству ранга матрицы (см., например, [2], с. 18)

$$\operatorname{rank}(\Phi\Phi^T) = \operatorname{rank}(\Phi^T\Phi) = \operatorname{rank}(\Phi).$$

Учитывая (5) и тот факт, что $\operatorname{rank}(I_n) = n$, заключаем, что

$$\operatorname{rank}(\Phi) = \operatorname{rank}(\Phi\Phi^T) = \operatorname{rank}(I_n) = n.$$

По той же причине

$$\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(\Phi^T\Phi) = \operatorname{rank}(\Phi) = n.$$

Подведём итоги.

ТЕОРЕМА 1 (М. С. Беспалов [3]). *Для фрейма Парсеваля справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\Phi &= n, \qquad \|\Phi\|^2 = n; \\ \operatorname{rank}G &= n, \qquad \|G\|^2 = n. \end{aligned}$$

3°. Напомним способ построения дополнительного фрейма Парсеваля [4]. Пусть, как и раньше, Φ — $(n \times m)$-матрица со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, образующими фрейм Парсеваля. Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Согласно (5)

$$\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Дополним систему $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ строками $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m$ так, чтобы все m строк составили ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$. Матрицу со строками $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ обозначим Γ. Это квадратная матрица порядка m, имеющая вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix},$$

где Ψ — $((m-n) \times m)$-матрица. В силу ортонормированности строк матрица Γ будет ортогональной, $\Gamma\Gamma^T = I_m$. Через $\psi_1, \ldots, \psi_m$ обозначим столбцы матрицы Ψ. Поскольку $\Psi\Psi^T = I_{m-n}$, то система $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$. Он называется *дополнительным фреймом Парсеваля.*

По теореме 1 для дополнительного фрейма Парсеваля справедливы равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\Psi) &= m-n, & \|\Psi\|^2 &= m-n; \\ \operatorname{rank}(\Psi^T\Psi) &= m-n, & \|\Psi^T\Psi\|^2 &= m-n. \end{aligned} \tag{6}$$

С помощью дополнительного фрейма установим ещё одно свойство матрицы Грама $G = \Phi^T\Phi$.

ТЕОРЕМА 2 (М. С. Беспалов [3]). *Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^n$, Φ — матрица со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и $G = \Phi^T\Phi$. Тогда*

$$\operatorname{rank}(I_m - G) = m-n, \qquad \|I_m - G\|^2 = m-n.$$

Доказательство. Наряду с равенством $\Gamma\Gamma^T = I_m$ выполняется равенство $\Gamma^T\Gamma = I_m$. Значит, столбцы $\binom{\varphi_k}{\psi_k}$ матрицы Γ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^m$. Этот факт можно записать так:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle + \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in 1:m. \tag{7}$$

Обозначим $G_1 = \Psi^T\Psi$. Согласно (7)

$$G + G_1 = I_m.$$

Имеем $I_m - G = G_1$. Теперь заключение теоремы следует из формул (6). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Четвёртое определение жёсткого фрейма* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 мая 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530`)

2. Малоземов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.

3. Беспалов М. С. *Фреймы Парсеваля и ортопроекторы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1021`)

4. Истомина М. Н., Максименко В. В., Певный А. Б. *Дополнительные жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0401`)

Неравенства для точек на единичной сфере в n-мерном пространстве

Н. О. Котелина А. Б. Певный

8 сентября 2012 г.

В докладе обобщается неравенство Б. Б. Венкова на случай произвольных весов. Устанавливаются условия достижения равенства в обобщённом неравенстве Б. Б. Венкова. Даётся определение и приводится пример взвешенного сферического полудизайна.

1°. Введение. Б. Б. Венков на своих лекциях [1] в университете Бордо в 1996 году рассматривал системы из m векторов $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ на единичной сфере S^{n-1} в пространстве $\mathbb{R}^n$. Он ввёл понятие t-потенциала

$$P_t(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j \rangle\big]^t,$$

где t — чётное натуральное число, $\langle x_i, x_j \rangle$ — скалярное произведение векторов x_i, x_j, и доказал неравенство

$$P_t(X) \geqslant c_t\, m^2,$$

в котором константа c_t имеет вид

$$c_t = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}. \tag{1}$$

Здесь мы обобщим неравенство Б. Б. Венкова. При $t = 2$ потенциал $P_2(X)$ был рассмотрен в статье [2] и назван *фреймовым потенциалом*. Неравенства для фреймового потенциала $P_2(X)$ были установлены в [3] и [6].

2°. Основные сведения и результаты. Зафиксируем натуральные числа $n \geqslant 2$, m и чётное t. Для системы векторов $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ рассмотрим квадратную матрицу A порядка m с элементами $a_{ij} = \big[\langle x_i, x_j \rangle\big]^t$, $i,\ j \in 1 : m$. Эта матрица была введена Б. Б. Венковым в работе [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Матрица A неотрицательно определена:*

$$\langle AW, W\rangle \geqslant 0, \qquad W \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$. По полиномиальной формуле имеем

$$\big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t = \sum_{|k|=t} c(k)\, x_i^k\, x_j^k, \tag{3}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами (мультииндекс), $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $x_i^k = x_{i1}^{k_1} x_{i2}^{k_2} \cdots x_{in}^{k_n}$, $c(k) = t!/(k_1! k_2! \cdots k_n!)$. На основании (3) для всех векторов $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$ получим

$$\langle AW, W\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t W_i\, W_j = \sum_{|k|=t} c(k) \sum_{i,j=1}^{m} W_i\, x_i^k\, W_j\, x_j^k =$$
$$= \sum_{|k|=t} c(k) \Big[\sum_{i=1}^{m} W_i\, x_i^k\Big]^2 \geqslant 0.$$

Предложение доказано. □

Возникает вопрос, когда неравенство (2) является строгим. Рассмотрим вектор $W^0 = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^m$. Венков [1] доказал неравенство

$$\langle AW^0, W^0\rangle \geqslant c_t,$$

где константа c_t определена с помощью формулы (1).

Возьмём произвольный вектор $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Не требуем, чтобы веса W_i были неотрицательными.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо следующее неравенство*

$$\langle AW, W\rangle \geqslant c_t. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в п. 5°.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для всех $W \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство*

$$\langle AW, W\rangle \geqslant c_t (W_1 + W_2 + \dots + W_m)^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любых точек $x_1, \dots, x_m \in S^{n-1}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^2 \geqslant \frac{m^2}{n}. \tag{5}$$

Для доказательства следствия 2 нужно в (4) положить $t = 2$, $W_i = \frac{1}{m}$, $i \in 1 : m$, и учесть, что $c_2 = \frac{1}{n}$. Доказательство неравенства (5) приводится также в докладе [6].

Покажем теперь, что константа c_t в (4) точная, и установим условия, при которых в неравенстве (4) будет равенство.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы выполнялось равенство $\langle AW, W\rangle = c_t$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{m} W_i \big[\langle x_i, x\rangle\big]^t = c_t \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$. Соотношение (5) превращается в равенство тогда и только тогда, когда система $\{x_1, \dots, x_m\}$ является жёстким фреймом.*

Доказательство. Пусть в теореме 2 будет $t = 2$, $W = W^0 = \big(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\big)$. Тогда равенство $\langle AW^0, W^0\rangle = c_2 = \frac{1}{n}$ равносильно тождеству

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x_i, x\rangle\big]^2 = \frac{m}{n}\|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

которое характеризует систему $\{x_1, \dots, x_m\}$ как жёсткий фрейм. □

Следствие 3 доказывалось также в докладе [6]. Доказательство теоремы 2 приведено в п. 6°.

Далее мы будем называть тождество (6) тождеством Варинга. Е. Варинг (1734–1798) занимался представлением формы $\|x\|^t = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{t/2}$ в виде суммы степеней порядка t линейных форм (см. [4]).

3°. Взвешенные сферические полудизайны. Пусть t — натуральное чётное число. Теорема 2 делает естественным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Система точек $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ называется взвешенным сферическим полудизайном порядка t с вектором весов $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, если выполнено тождество (6).*

Соотношения между сферическими дизайнами и полудизайнами обсуждаются в статье [5].

Теорема 2 может быть переформулирована следующим образом: *неравенство (4) обращается в равенство на взвешенных сферических полудизайнах порядка t и только на них.*

Дадим пример взвешенного сферического полудизайна.

ПРИМЕР. В [4, с. 103] приводится тождество Лукаса (1877) для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$8\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \sum (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = 12\|x\|^4. \tag{7}$$

Вторая сумма содержит 4 возможных комбинации знаков $+$ и $-$. Из тождества (7) получим тождество Варинга при $t = 4$. Для $n = 3$ константа c_4 равна $\frac{1}{5}$. Перепишем (7) следующим образом

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^{3}\big[\langle e_i, x\rangle\big]^4 + \frac{3}{20}\sum_{i=1}^{4}\big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

где $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, а векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ имеют вид $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, \pm 1, \pm 1)$. Таким образом, система $X = \{e_1, e_2, e_3, \varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$ является взвешенным сферическим полудизайном порядка 4 с вектором весов $W = \left(\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right)$.

4°. Предварительные сведения для доказательства теорем. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_{n,t}$ однородных полиномов степени t от n переменных. Каждый такой полином может быть записан в виде:

$$f(x) = \sum_{|k|=t} a(k)x^k,$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, $a(k)$ — произвольные вещественные коэффициенты. Для произвольных полиномов $f(x)$, $g(x) = \sum_{|k|=t} b(k)x^k$ определим скалярное произведение формулой

$$[f, g] = \sum_{|k|=t} \frac{a(k)b(k)}{c(k)},$$

где $c(k) = t!/(k_1! \cdots k_n!)$. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим полином

$$\rho_y(x) = \big[\langle y, x\rangle\big]^t = [y_1x_1 + \cdots + y_nx_n]^t.$$

По полиномиальной формуле

$$\rho_y(x) = \sum_{|k|=t} c(k)\, y^k\, x^k.$$

Отсюда для любого $f \in \mathcal{P}_{n,t}$ получаем

$$[\rho_y, f] = \sum_{|k|=t} \frac{c(k)\, y^k a(k)}{c(k)} = f(y). \tag{8}$$

Пусть t — натуральное чётное число. Обозначим

$$\omega_t(x) = \|x\|^t = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{t/2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство* $[\omega_t, \omega_t] = 1/c_t$, *где константа* c_t *определена формулой* (1).

Доказательство можно найти в [4, с. 107].

5°. Доказательство теоремы 1. Используя скалярное произведение $[f, g]$, запишем очевидное неравенство

$$Q := \Big[\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i} - c_t\, \omega_t, \sum_{j=1}^m W_j\, \rho_{x_j} - c_t\, \omega_t\Big] \geqslant 0. \tag{9}$$

Имеем

$$Q = \sum_{i,j=1}^m W_i\, W_j \big[\rho_{x_i}, \rho_{x_j}\big] - 2c_t \Big[\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i}, \omega_t\Big] + c_t^2 [\omega_t, \omega_t].$$

В силу (8), $\big[\rho_{x_i}, \rho_{x_j}\big] = \rho_{x_j}(x_i) = \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t$. Далее, учитывая условия $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, $x_i \in S^{n-1}$, получаем

$$\Big[\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i}, \omega_t\Big] = \sum_{i=1}^m W_i\, \omega_t(x_i) = \sum_{i=1}^m W_i\, \|x_i\|^t = 1.$$

С учётом предложения 2 справедливо неравенство

$$Q = \sum_{i,j=1}^m W_i\, W_j \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t - 2c_t + c_t^2 \cdot \frac{1}{c_t} \geqslant 0. \tag{10}$$

Отсюда следует $\langle AW, W\rangle \geqslant c_t$, что и требовалось доказать. □

6°. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть система точек $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ лежит на сфере S^{n-1} и на некотором векторе весов $W = (W_1, \ldots, W_m)$, таком, что $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, выполняется равенство

$$\langle AW, W\rangle := \sum_{i,j=1}^m \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t W_i\, W_j = c_t.$$

Тогда неравенства (9) и (10) также будут выполняться как равенства. Как следствие,

$$\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i} - c_t\, \omega_t = 0,$$

что эквивалентно тождеству (6).

Достаточность. Пусть выполняется тождество (6). Подставим $x = x_j$ в (6). Так как $\|x_j\| = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{m} W_i \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t = c_t, \qquad j \in 1:m. \tag{11}$$

Умножим обе части (11) на W_j, $\sum_{j=1}^{m} W_j = 1$, и просуммируем по $j \in 1:m$. Получим равенство $\langle AW, W\rangle = c_t$. □

7°. Ещё одно неравенство. Для натурального чётного t справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t \geqslant c_t \Big[\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^t\Big]^2 \tag{12}$$

для всех $x_i \in \mathbb{R}^n$. Здесь константа c_t определена с помощью (1).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Неравенство (12) было установлено в [5], для $t = 2$ — в [3] и [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Venkov B. *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, L'Enseignement mathématique Monograph, Géneve. 2001. No. 37. P. 10–86.

2. Benedetto J. J., Fickus M. *Finite normalized tight frames* // Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. P. 357–385.

3. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 68–86.

4. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No. 463. P. 1–155.

5. Котелина Н. О., Певный А. Б. *Экстремальные свойства сферических полудизайнов* // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 162–170.

6. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Четвёртое определение жёсткого фрейма* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 мая 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530`).

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ

М. Н. Юркина

20 октября 2012 г.

Впервые о циклических фреймах на семинаре было рассказано в докладе В. Н. Малозёмова [1]. В настоящем докладе мы используем другой подход, предложенный в книге [2].

Напомним, что система ненулевых векторов

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m\} \tag{1}$$

пространства $\mathbb{R}^n$ при $m > n$ называется *фреймом Парсеваля*, если матрица Φ, составленная из столбцов $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m$, удовлетворяет условию

$$\Phi\Phi^T = I_n, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Умножив (2) справа на произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^n$, получим эквивалентное определение

$$x = \sum_{k=1}^{m} \langle x,\ \varphi_k\rangle \varphi_k. \tag{3}$$

Согласно [1], фрейм Парсеваля (1) будет *циклическим*, если

$$\langle \varphi_{k+1},\ \varphi_{j+1}\rangle = \langle \varphi_k,\ \varphi_j\rangle, \quad k,\ j \in 1:m, \tag{4}$$

где $\varphi_{m+1} = \varphi_1$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы фрейм Парсеваля* (1) *был циклическим, необходимо и достаточно, чтобы существовала ортогональная матрица P порядка n, такая, что $P^m = I_n$ и*

$$\varphi_{k+1} = P\varphi_k, \quad k \in 1:m-1. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Матрицу P можно задать явно:

$$P = \Phi\, S\, \Phi^T, \tag{6}$$

где S — матрица перестановок порядка m вида

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для произвольного $j \in 1 : m$ согласно (4) и (2) имеем

$$\begin{aligned} P\varphi_j &= \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_k,\, \varphi_j \rangle (\Phi S)_k = \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_k,\, \varphi_j \rangle\, \varphi_{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \langle \varphi_{k+1},\, \varphi_{j+1} \rangle\, \varphi_{k+1} + \langle \varphi_1,\, \varphi_{j+1} \rangle\, \varphi_1 = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_{j+1},\, \varphi_k \rangle\, \varphi_k = \varphi_{j+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда, в частности, следует (5). Саму формулу (7) можно переписать в виде

$$P\Phi = \Phi S. \tag{8}$$

Разберёмся со свойствами матрицы P. Умножив (6) на Φ справа, получим $P\Phi = \Phi\, S\, \Phi^T \Phi$, что вместе с (8) приводит к равенству

$$\Phi\, S\, \Phi^T \Phi = \Phi S. \tag{9}$$

Отметим также очевидные соотношения

$$S\, S^T = I_m, \qquad S^m = I_m.$$

Согласно (9) и (2) имеем

$$P\, P^T = (\Phi\, S\, \Phi^T \Phi) S^T \Phi^T = \Phi (S\, S^T) \Phi^T = \Phi\, \Phi^T = I_n.$$

Установлена ортогональность матрицы P.

Остаётся проверить равенство $P^m = I_n$. Справедлива общая формула

$$P^\alpha = \Phi\, S^\alpha \Phi^T, \quad \alpha = 1,\, 2, \dots \tag{10}$$

Действительно, при $\alpha = 1$ эта формула совпадает с (6). Сделаем индукционный переход от α к $\alpha + 1$. В силу (9) имеем

$$P^{\alpha+1} = P\, P^\alpha = (\Phi\, S\, \Phi^T \Phi) S^\alpha \Phi^T = \Phi (S\, S^\alpha) \Phi^T = \Phi\, S^{\alpha+1} \Phi^T,$$

что и требовалось доказать. При $\alpha = m$ из (10) следует, что

$$P^m = \Phi S^m \Phi^T = \Phi\,\Phi^T = I_n.$$

Достаточность. Согласно (5),

$$\varphi_{k+1} = P^k \varphi_1, \quad k \in 1 : m-1.$$

Формально положим $\varphi_{m+1} = P^m \varphi_1$. По условию $P^m = I_n$, поэтому $\varphi_{m+1} = \varphi_1$. Теперь при всех $k,\ j \in 1 : m$ в силу ортогональности матрицы P имеем

$$\langle \varphi_{k+1},\, \varphi_{j+1} \rangle = \langle P\varphi_k,\, P\varphi_j \rangle = \langle P^T P \varphi_k,\, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_k,\, \varphi_j \rangle,$$

что соответствует (4).

Теорема доказана. □

Замечание. В книге [2] данная теорема установлена в частном случае, для обобщённых гармонических фреймов (теорема 8.8). Для таких фреймов в [2] построена ортогональная матрица P, для которой наряду с равенством $P^m = I_n$ выполняется соотношение $P^\alpha \neq I_n$ при $\alpha \in 1 : m-1$. В случае фреймов Парсеваля последнее соотношение может, вообще говоря, не выполняться.

ПРИМЕР. В пространстве $\mathbb{R}^n$ при $m = 2n$ рассмотрим систему векторов

$$\{\tfrac{1}{\sqrt{2}} e_1,\ \ldots,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_n,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_1,\ \ldots,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_n\}, \tag{11}$$

где e_k — орты в $\mathbb{R}^n$. Эта система образует фрейм Парсеваля. Действительно, положив

$$\varphi_k = \varphi_{k+n} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_k, \quad k \in 1 : n,$$

для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ получим

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x,\, e_k \rangle\, e_k = 2 \sum_{k=1}^{n} \langle x,\, \tfrac{e_k}{\sqrt{2}} \rangle\, \tfrac{e_k}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^{2n} \langle x,\, \varphi_k \rangle\, \varphi_k.$$

Покажем, что фрейм Парсеваля (11) является циклическим. В качестве матрицы P возьмём матрицу перестановок S указанного ранее вида, на этот раз имеющую порядок n. В силу свойства $P^n = I_n$ для системы векторов (11) справедлива формула (5). Матрица P — ортогональная и $P^m = P^{2n} = I_n$. Доказанная теорема гарантирует цикличность фрейма (11). Вместе с тем, соотношение $P^\alpha \neq I_n$ при всех $\alpha \in 1 : m-1$ не выполняется ($P^n = I_n$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0121`)

2. Han D., Kornelson K., Larson D., Weber E. *Frames for undergraduetes.* Providence, RI: AMS, 2007. 259 pp.

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ВИЛЕНКИНА

М. С. Беспалов

7 февраля 2013 г.

Доклад служит продолжением доклада [1], в котором были приведены основы дискретного p-ичного гармонического анализа, и содержит дальнейшее обобщение на случай смешанных кодов. Некоторые элементы этого обобщения на случай дискретных функций Виленкина рассмотрены в докладе [2].

1°. Начнём с *функций Виленкина*. Считается, что они введены в 1947 г. в статье [3], а широкое внимание к себе привлекли после публикации обзора [4], в котором Н. Я. Виленкин упоминает про статьи Леви (1944) и Крестенсона (1955). Есть работы, где данную систему функций называют системой Прайса (статья которого вышла в 1957 г). В книге [5] предпочитают термин *мультипликативная система функций*. Но в зарубежной [6] и технической литературе применяют всё же термин *функции Виленкина*. Причем в технической литературе [7] этот термин применяют как для функций Виленкина, так и для дискретных функций Виленкина, не отмечая между ними различия.

Система функций Виленкина строится по последовательности $P = \{p_j\}$ простых чисел p_j. По ней строится другая возрастающая последовательность

$$m_0 = 1, \quad m_j = p_j m_{j-1}.$$

Аналогично построенному в [1] p-ичному разложению строится P-ичное n-значное разложение числа k (где $0 \leqslant k < m_n$):

$$k = \sum_{j=1}^{n} k_j\, m_{j-1}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant k_j < p_j. \tag{1}$$

Для произвольного $x \in [0,1)$ вычисляется его P-ичное разложение (где применён знак целой части числа):

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad \text{где} \quad x_j = \lfloor x \cdot m_j \rfloor \ (mod\ p_j). \tag{2}$$

Отметим, что для P-ично рациональных, то есть чисел вида $\frac{k}{m_j}$, возможны два представления вида (2): финитное разложение, где встречается 0 в периоде (называют *правильным разложением*); и *особое разложение*, при котором начиная с некоторого разряда встречаются только максимально возможные разрядные значения $x_j = p_j - 1$. По указанному в (2) правилу $x_j = \lfloor x \cdot m_j \rfloor \ (mod\ p_j)$ получается правильное разложение. Если исключим все особые разложения P-ично рациональных чисел, то представление (2) для всех чисел единственно.

Часто [5, 6, 4] оставляют два представления для каждого P-ично рационального числа, что соответствует рассмотрению на модифицированном отрезке $[0,1]^*$, а не на полуинтервале $[0,1)$.

По разложениям $(1,2)$ *функции Виленкина* определяются так:

$$\psi_k(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{2\pi i \frac{x_j k_j}{p_j}} = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j x_j}. \tag{3}$$

В случае одинаковых $p_j > 2$ это определение совпадает с функциями Крестенсона-Леви, а при $p_j \equiv 2$ это функции Уолша-Пэли (см. [5]) .

2°. Перейдём к *дискретным функциям Виленкина.* При заданном упорядоченном наборе $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ через разложение (1) чисел $k, s \in 0 : m_n - 1$ вычисляются значения дискретных функций Виленкина

$$\varphi_s(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j s_j}, \qquad \text{где} \quad \omega_{p_j} = e^{\frac{2\pi i}{p_j}}, \tag{4}$$

в нумерации, отличной от предложенной Виленкиным [4].

В работах А. В. Ефимова и его учеников (см. [5]) *дискретные мультипликативные функции* τ_s (то есть дискретные функции Виленкина в нумерации Виленкина [4]) определяют через функции Виленкина (3):

$$\tau_s(k) = \psi_s(x) \qquad \text{при} \quad x \in \Delta_n^k = \Big[\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}\Big), \ s < m_n. \tag{5}$$

Возможен способ введения дискретных мультипликативных функций τ_s по формуле, аналогичной (4).

3°. Разложению (1) соответствует P_n*-ичный код* числа $k \in 0 : m_n - 1$:

$$\tilde{k} = (k_n\ k_{n-1} \ldots k_1),$$

и *обратный код* (он же *реверс* кода)

$$\mathrm{rev}\ \tilde{k} = (k_1\ k_2\ \ldots k_n),$$

являющийся P'_n-ичным кодом того же числа k, то есть вычисленным по той же формуле (1), но относительно *противоположного упорядоченного набора* $P'_n = \{p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1\}$. В кортежах $\tilde{k}$ и $\mathrm{rev}\,\tilde{k}$ младший разряд полагаем справа, а в наборах P_n и P'_n наоборот слева.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Правило, указанное в формуле (2), можно заменить на следующий алгоритм вычисления, где последовательность $P = \{p_j\}$ предполагается заданной.

Пусть $l_0 := x$; $i := 1$.

Далее повторяем следующие вычисления:

$$x_i := \lfloor p_i \cdot l_{i-1} \rfloor, \quad l_i := p_i \cdot l_{i-1} - x_i, \quad i := i + 1.$$

Предложим аналогичный алгоритм вычисления прямого кода $\tilde{k}$ для числа $k \in 0 : m_n - 1$ по заданному набору $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Пусть $r_1 := k$. Для i от 1 до n выполняем:

$$k_i := r_i \ (mod\ p_i), \quad r_{i+1} := (r_i - k_i)/p_i.$$

Другой альтернативный алгоритм вычисления кода числа k.

Полагаем $t_n := k$.

Для j от n до 1 выполняем: находим k_j — частное от деления t_j на m_{j-1} и t_{j-1} — остаток от этого деления. То есть $t_j = k_j m_{j-1} + t_{j-1}$, $t_{j-1} < m_{j-1}$.

4°. Множество $M_n = \{0, 1, 2, \ldots, m_n - 1\}$ можно упорядочить в соответствии с возрастанием обратного кода и получить перестановку $\mathrm{rev} : M_n \to M_n$ этого множества. Так как перестановка реверс определяется по упорядоченному набору P_n *показателей разрядов*, то отметим это в обозначениях $\mathrm{rev}_{P_n}(k)$. Отображение $\mathrm{rev}_{P_n} : M_n \to M_n$ определим следующим образом.

По противоположному упорядоченному набору $P'_n = \{p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1\}$ аналогично получаем набор

$$m'_0 = 1, \quad m'_1 = p_n, \quad m'_2 = p_{n-1} m'_1, \ \ldots, \ m'_{j+1} = p_{n-j} m'_j, \ \ldots, \ m'_n = p_1 m'_{n-1}.$$

Тогда для $k \in M_n$ вида (1) вычисляем

$$\mathrm{rev}_{P_n}(k) = k_1 m'_{n-1} + k_2 m'_{n-2} + \ldots + k_{n-1} m'_1 + k_n. \tag{6}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Построенное отображение $\mathrm{rev}_{P_n} : M_n \to M_n$ биективно.

Любое биективное отображение конечного множества задает перестановку этого множества. Применяются развернутая и сокращенная формы записи

перестановки. Например, перестановка *реверс* множества $M_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ относительно набора $P_2 = \{2, 3\}$ в развернутом виде записывается так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

а в сокращенном виде — $\mathrm{rev} = (0\ 2\ 4\ 1\ 3\ 5)$. Степень перестановки определяется как композиция отображений. Поэтому, для рассмотренной перестановки $\mathrm{rev}^2 = (0\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5)$, $\mathrm{rev}^3 = (0\ 3\ 1\ 4\ 2\ 5)$ и лишь rev^4 есть тождественная перестановка.

Доказали на примере, что в отличии от случая дискретных функций Крестенсона, для смешанных кодов $\mathrm{rev}(\mathrm{rev}(k)) \neq k$ в общем случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В смешанных кодах обратная перестановка к перестановке реверс есть перестановка реверс относительно противоположного набора показателей разрядов*

$$(\mathrm{rev}_{P_n})^{-1} = \mathrm{rev}_{P'_n}\,.$$

Доказательство. Если $m = \mathrm{rev}_{P_n}(k)$, то процедура вычисления такая:

1) по заданному набору P_n вычисляем разрядные числа m_j;
2) представим k по формуле (1) относительно чисел m_j и вычисляем код $\tilde{k}$;
3) переставляя элементы в обратном порядке, записываем $\mathrm{rev}\,\tilde{k}$;
4) по противоположному набору P'_n вычисляются новые разрядные числа m'_j;
5) по формуле (6) вычисляем $m = \mathrm{rev}_{P_n}(k)$.

Опишем процедуру восстановления по числу m исходного числа k:

1) по набору P'_n вычисляем разрядные числа m'_j;
2) представим m по формуле (6) относительно чисел m'_j и вычисляем код $\tilde{m}$;
3) переставляя элементы в обратном порядке, записываем $\mathrm{rev}\,\tilde{m} = \tilde{k}$;
4) по противоположному набору P_n вычисляем новые разрядные числа m_j;
5) по формуле (1) вычисляем $k = \mathrm{rev}_{P'_n}(m)$. □

При более подробном доказательстве можно применить утверждение 1.

5°. Так как в формуле (5) приведен способ определения только первых m_n дискретных мультипликативных функций, то считаем, что и они задаются по конечному набору P_n. Для задания всей системы функций (3) этот набор может быть продолжен любым способом, что не влияет на определение (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Дискретные функции Виленкина* (4), *построенные по упорядоченному набору* P_n, *и дискретные мультипликативные функции* (5), *построенные по противоположному набору* P'_n, *выражаются одна из другой через разные перестановки реверс*

$$\tau_z = \varphi_s; \qquad \text{где} \quad z = \mathrm{rev}_{P_n}(s),\ s = \mathrm{rev}_{P'_n}(z).$$

Доказательство. Для произвольного номера $s = \sum_{j=1}^{n} s_j\, m_{j-1}$ функции (4) имеем по (6):

$$\mathrm{rev}_{P_n}(s) = \sum_{j=1}^{n} s_j\, m'_{m-j} = \sum_{t=1}^{n} s_{n-t+1}\, m'_{t-1}.$$

Возьмём произвольное $k \in 0 : m_n - 1$ вида (1) и представим $x \in \Delta_n^k$ в виде $x = \frac{k}{m_n} + \delta$, где $\delta < m_n^{-1}$. Для этого x имеем

$$x = m_n^{-1} \sum_{j=1}^{n} k_j\, m_{j-1} + \delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{p_j p_{j+1} \ldots p_n} + \delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{m'_{n-j+1}} + \delta.$$

То есть коэффициенты x'_{n-j+1} разложения (2) числа x по набору P'_n совпадают с коэффициентами разложения (1) числа k: $k_j = x'_{n-j+1}$. Подставим в (4):

$$\varphi_s(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{x'_{n-j+1} s_j} = \prod_{l=1}^{n} \omega_{p_{n-l+1}}^{x'_l s_{n-l+1}} = \prod_{t=1}^{n} \omega_{p'_t}^{x'_t z_t},$$

где обозначили $z_t = s_{n-t+1}$. Последнее равенство вытекает из взаимосвязи $p'_t = p_{n-t+1}$ элементов наборов P_n и P'_n.

Рассуждая относительно P'_n по формуле (3) имеем

$$\tau_z(k) = \psi_z(x) = \prod_{t=1}^{n} \omega_{p'_t}^{z_t x'_t},$$

где $z = \sum_{t=1}^{n} z_t m'_{n-1}$.

Доказали, что из равенства $\tau_z(k) = \varphi_s(k)$ вытекает $z_t = s_{n-t+1}$, то есть $z = \mathrm{rev}_{P_n}(s)$.

Обратное соотношение доказывается с помощью предложения 1. И здесь надо помнить, что дискретные функции Виленкина вида (4) и (5) определяются по разным (взаимно-противоположным) упорядоченным наборам P_n и P'_n. □

6°. Отметим свойства дискретных функций Виленкина в основных нумерациях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для функций вида (4) очевидно $\varphi_s(k) = \varphi_k(s)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для функций вида (5) в общем случае соотношение $\tau_s(k) = \tau_k(s)$ не верно.

Справедливость утверждения 4 легко увидеть из приведенного ниже примера матрицы $F_2 \oslash F_3$.

Векторы одинаковой длины допускают покоординатное умножение (умножение по Адамару) $\bullet$. В качестве таких векторов рассмотрим векторы φ_s и τ_s, представляющие собой набор значений дискретных функций Виленкина вида (4) и (5). Для P_n-ичных кодов введем операцию $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_j на j-м разряде, через которую определяется операция $\dot{+}$ на элементах множества $\{0, 1, 2, \ldots, m_n - 1\}$, зависящая от выбора P_n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для дискретных функций Виленкина любой из двух основных нумераций выполняется мультипликативность как по индексу*

$$\varphi_{s\dot{+}l} = \varphi_s \bullet \varphi_l, \quad \tau_{s\dot{+}l} = \tau_s \bullet \tau_l \ ,$$

так и по аргументу

$$\varphi_s(k \dot{+} l) = \varphi_s(k) \cdot \varphi_s(l), \quad \tau_s(k \dot{+} l) = \tau_s(k) \cdot \tau_s(l) \ ,$$

для всех $s \in 0 : m_n - 1$.

Доказательство. По определению (4) на каждом аргументе

$$\varphi_{s\dot{+}l}(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j(s_j+l_j)} = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j s_j} \cdot \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j l_j} = \varphi_s(k) \cdot \varphi_l(k).$$

По утверждению 3 перепишем свойство $\varphi_s(k \dot{+} l) = \varphi_s(k) \cdot \varphi_s(l)$.

Из предложения 2 вытекает, что мультипликативность по аргументу верна и для функций τ_s. Мультипликативность по индексу, согласно (1) и (3), верна и для функций Виленкина $\psi_s(x)$: $\psi_{s\dot{+}l}(x) = \psi_s(x) \cdot \psi_l(x)$.

По определению (5) это свойство переносится на дискретные мультипликативные функции: $\tau_{s\dot{+}l} = \tau_s \bullet \tau_l$. □

ЛЕММА 1. *Обратная (то есть минус первая степень) любой дискретной функции Виленкина есть дискретная функция Виленкина того же класса.*

Доказательство см. в [2], где отмечены также свойства обратной операции к $\dot{+}$. В следующем пункте дано определение, из которого лемма 1 вытекает.

Из предложения 3 и леммы 1 следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Множество дискретных функций Виленкина, построенных по упорядоченному набору P_n, составляет группу характеров.

7°. Напомним данное в книге [7] понятие *дискретной экспоненциальной функции* (ДЭФ)

$$r_p = (1\ \omega_p\ \omega_p^2 \ldots \omega_p^{p-1}), \quad \text{где} \quad \omega_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}, \tag{7}$$

которое теперь (в отличие от [1]) рассматриваем для разных p, а потому и разной длины. Векторы одинаковой длины допускают покоординатное умножение (умножение по Адамару) $\bullet$. Поэтому для функций (7) определены их степени (по Адамару), которые также назовем ДЭФ. В частности, $r_p^{\bullet 0} = (1\ 1 \ldots 1)$,

$$r_p^{\bullet 2} = (1\ \omega_p^2\ \omega_p^4 \ldots \omega_p^{2p-2}), \ldots, r_p^{\bullet p-1} = (1\ \omega_p^{(p-1)}\ \omega_p^{2(p-1)} \ldots \omega_p^{(p-1)^2}). \tag{8}$$

Среди дискретных функций Уолша и Крестенсона выделяли [1] класс векторов *фиксированного уровня* n (фиксация значения p подразумевалась). В случае дискретных функций Виленкина единый класс составляют функции вида (4) построенные по *заданному упорядоченному набору* P_n. Этот класс совпадает с функциями (5) *с противоположным упорядоченным набором* P'_n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Называем *дискретной функцией Виленкина класса* $P_n = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ кронекерово произведение дискретных экспоненциальных функций (7) или (8) вида

$$\Psi = r_{p_1}^{\bullet j_1} \otimes r_{p_2}^{\bullet j_2} \otimes \ldots \otimes r_{p_n}^{\bullet j_n}, \qquad \text{где } 0 \leqslant j_k < p_k. \tag{9}$$

Условие $0 \leqslant j_k < p_k$ несущественное, так как ДЭФ обладают свойством периодичности.

Существует два основных *лексикографических* способа нумерации функций (9): слева направо и справа налево.

Например, при нумерации слева направо начальные p_1 $(0 \leqslant j < p_1)$ функций имеют вид

$$r_{p_1}^{\bullet j} \otimes r_{p_2}^{\bullet 0} \otimes \ldots \otimes r_{p_n}^{\bullet 0} = r_{p_1}^{\bullet j} \otimes r_{m'_{n-1}}^{\bullet 0}.$$

По формулам (3) и (5) легко проверяется, что это и есть функция τ_j.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В общем случае формулы* (9) *верно*

$$\tau_j = \Psi\ , \qquad \textit{если} \quad j = \sum_{k=1}^{n} j_k m_{k-1}.$$

Данное предложене есть аналог предлолжения 3 из [1].

При нумерации в (9) справа налево начальные p_n $(0 \leqslant j < p_n)$ функций имеют вид

$$r_{p_1}^{\bullet 0} \otimes r_{p_2}^{\bullet 0} \otimes \ldots \otimes r_{p_{n-1}}^{\bullet 0} \otimes r_{p_n}^{\bullet j} = r_{m_{n-1}}^{\bullet 0} \otimes r_{p_n}^{\bullet j} = \varphi_j.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *В общем случае формулы* (9) *верно*

$$\varphi_s = \Psi\ , \quad \text{если } s = j_n + \sum_{k=1}^{n-1} j_{n-k}(p_n p_{n-1} \dots p_{n-k+1}) = \sum_{k=1}^{n} j_{n-k+1} m'_{k-1} = \mathrm{rev}_{P'_n}(j).$$

Выводится из предложения 4 с помощью предложения 2.

8°. Установим связь дискретных функций Виленкина с дискретными преобразованиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Дискретным преобразованием Виленкина-Кронекера класса* $P_n = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ назовём преобразование с матрицей в виде кронекерова произведения матриц дискретного преобразования Фурье указанных в наборе P_n порядков

$$V = F_{p_1} \otimes F_{p_2} \otimes \dots \otimes F_{p_n}. \tag{10}$$

В книге [8] предлагается новый вариант (отличный от кронекерова) тензорного произведения матриц, который назовём *b-произведением* и будем обозначать значком $\oslash$. Продемонстрируем этот вид тензорного произведения на примере b-произведения матриц дискретного преобразования Фурье порядка 2 и 3 (здесь $q = e^{\frac{2\pi i}{3}}$):

$$F_2 \oslash F_3 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q & q^2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q & q^2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q^2 & q\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q^2 & q\end{pmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & q & q^2 & 1 & q & q^2 \\ 1 & q & q^2 & -1 & -q & -q^2 \\ 1 & q^2 & q & 1 & q^2 & q \\ 1 & q^2 & q & -1 & -q^2 & -q \end{bmatrix}.$$

В строках данной матрицы записаны те же дискретные функции Виленкина класса $P_2 = \{2, 3\}$, что и в строках матрицы $F_2 \otimes F_3$, но в другом порядке: τ_0, $\tau_1 = r_2 \otimes r_3^{\bullet 0} = \varphi_3$, $\tau_2 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3 = \varphi_1$, $\tau_3 = r_2 \otimes r_3 = \varphi_4$, $\tau_4 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3^{\bullet 2} = \varphi_2$, $\tau_5 = r_2 \otimes r_3^{\bullet 2} = \varphi_5$.

В столбцах данной матрицы записаны дискретные функции Виленкина другого класса $P'_2 = \{3, 2\}$.

Порядок дискретных функций Виленкина в матрице $F_2 \otimes F_3$ соответствует порядку (4). Поэтому функции, упорядоченные как φ_s, можно называть *дискретными функциями Виленкина-Кронекера* (добавляя указание нумерации).

Порядок дискретных функций Виленкина как в строках, так и в столбцах, матрицы $F_2 \oslash F_3$ соответствует порядку (5). В книге [5] матрица $F_2 \oslash F_3$ рассматривается (без упоминания нового варианта тензорного произведения) как частный случай матрицы *дискретного мультипликативного преобразования Фурье*; поэтому функции упорядоченные как τ_s назвали *дискретными мультипликативными функциями.* Но это те же самые дискретные функции Виленкина, но в другой нумерации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Дискретным мультипликативным преобразованием Фурье класса* $P_n = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ назовём преобразование с матрицей в виде b-произведения матриц дискретного преобразования Фурье указанных в наборе P_n порядков

$$M = F_{p_1} \oslash F_{p_2} \oslash \ldots \oslash F_{p_n}. \tag{11}$$

Предлагается сравнить формулы (10) и (11).

9°. В определении (9) (а также в определениях (4) и (5) для основных нумераций) дискретных функций Виленкина требование простоты образующих чисел p_j не обязательное. Это требование становится полезным при следующем определении линейных перестановок матриц дискретных мультипликативных преобразований Фурье.

Считаем, что все p_j простые, но не обязательно различные. Опишем построение *правильной* линейной перестановки матрицы дискретного мультипликативного преобразования Фурье.

У дискретной функции Виленкина вида (9) какие-то показатели степени у указанных в записи (9) ДЭФ могут быть нулевыми $r_{p_k}^{\bullet 0} = (1\ 1\ 1 \ldots 1)$. Набор соответствующих оснований p_k зафиксируем и назовем *незначимыми.* Остальные основания p_k назовем *значимыми.* Назовем *допустимой* дискретную функцию Виленкина, у которой все значимые основания p_k различны.

Например, в классе $P_5 = (2, 3, 5, 2, 2)$ функция $\Psi_1 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3^{\bullet 2} \otimes r_5^{\bullet 3} \otimes r_2 \otimes r_2^{\bullet 0}$ допустимая, а функция $\Psi_2 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3^{\bullet 2} \otimes r_5^{\bullet 3} \otimes r_2 \otimes r_2$ недопустимая. Функция Ψ_1 служит образующей группы порядка 30, так как в предложенном примере значимые основания 2, 3, 5.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Допустимая функция служит образующей конечной группы *(относительно операции $\bullet$)* дискретных функций Виленкина вида (9) с нулевыми показателями при выбранных незначимых основаниях. Порядок этой группы равен произведению значимых оснований.

В основе доказательств лежит следующая очевидная лемма.

ЛЕММА 2. *Если матрицы u, v, w, t таких размеров, что допустимы указанные ниже умножения по Адамару, то*

$$(u \otimes v) \bullet (w \otimes t) = (u \bullet w) \otimes (v \bullet t).$$

Определим матрицу T линейной перестановки матрицы дискретного мультипликативного преобразования Фурье (11) заданием строк T_j формируемой матрицы. Полагаем $T_0 = r_{m_n}^{\bullet 0} = (1\ 1\ 1 \ldots 1)$.

В качестве образующей строки $T_1 = T_{m'_0}$ возьмём любую допустимую функцию вида (9). Обозначим p'_1 порядок группы с выбранной образующей. Все элементы этой группы, начиная с нейтрального элемента T_0, составляют начальные строки формируемой матрицы

$$T_{k_1} = T_1^{\bullet k_1}, \quad k_1 \in 0 : p'_1 - 1.$$

В качестве следующей образующей строки $T_{m'_1}$ возьмем любую допустимую функцию, не встречающуюся среди ранее построенных T_k с номерами $k < m'_1 = p'_1$. Определим $m'_2 = p'_2 \cdot m'_1$, где p'_2 равно произведению p_k с ненулевыми показателями степени j_k у выбранной допустимой функции.

Очередные $m'_2 - m'_1$ функций (строки) строятся как следующее произведение (по Адамару), где при $k_2 = 0$ учтены ранее построенные строки:

$$T_{k_2 m'_1 + k_1 m'_0} = T_{m'_0}^{\bullet k_1} \bullet T_{m'_1}^{\bullet k_2}, \quad k_2 \in 1 : p'_2 - 1. \tag{12}$$

И так далее, пока не будут построены все m_n дискретных функций Виленкина.

Отметим, что функции (5) построены через функции (4) по этой же схеме. И наоборот, функции (4) построены через функции (5) по схеме (12).

Возможен общий подход без требования простоты образующих чисел p_j. В этом случае изменяется определение допустимых функций, что алгебраическими методами легко осуществляется. При определении линейной перестановки приходится делать много оговорок.

Доклад подготовлен в рамках проекта ДРПННиТ № 1.1348.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беспалов М. С. *Дискретные функции Крестенсона* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 31 марта 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0331`)

2. Малозёмов В. Н., Просеков О. В., Сабаев А. Н. *Дискретные функции Виленкина-Крестенсона* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 января 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0116`)

3. Виленкин Н. Я. *Об одном классе полных ортогональных систем* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1947. Т. 11. С. 363–400.

4. Виленкин Н. Я. *Дополнения.* В книге Качмаж С., Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов.* М.: Физматлит, 1958. С. 458–507.

5. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* М.: Наука, 1987.

6. Schipp F., Wade W. R., Simon P., Pal J. *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis.* Budapest: Acad. Kiado, 1990.

7. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975.

8. Беспалов М. С. *Математические методы в информатике и вычислительной технике.* В 2-х ч. Ч. 2. *Введение в прикладной гармонический анализ.* Владимир: ВлГУ, 2007.

К СТОЛЕТИЮ ОТКРЫТИЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

В. С. Виденский

14 марта 2013 г.

Videnskii V. S. The centenary of the discovery of Bernstein polynomials. In 1912 S. Bernstein found a very elegant explicit representation for approximation polynomials $B_n f$. In our paper we discuss the history of this discovery.

В 1912 г. С. Н. Бернштейн опубликовал конструкцию своих знаменитых полиномов и при помощи соображений из теории вероятностей доказал теорему Вейерштрасса о приближении непрерывных функций. В настоящей статье сделана попытка проследить почти десятилетний путь к этому открытию.

В феврале 2012 г. в СПбГУ состоялась международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения Л. В. Канторовича. В частности, я делал доклад о его работах по полиномам Бернштейна. Тогда же я заметил, что эти полиномы были открыты ровно 100 лет тому назад. Мне показалось, впрочем, что не сто́ит отвлекать внимание слушателей и смешивать обе темы, а лучше обсудить вторую из них отдельно.

Эти полиномы были введены в очень краткой заметке С. Н. Бернштейна "Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей". Как известно, они определяются так:

$$B_n\big(f(t);x\big) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})\, p_{nk}(x), \tag{1}$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2}$$

Опираясь на эти полиномы, С. Н. Бернштейн доказал теорему Вейерштрасса в такой форме.

ТЕОРЕМА 1. *Если f — функция, непрерывная на отрезке $[0,1]$, то последовательность полиномов $B_n f$ при $n \to \infty$ сходится к ней равномерно на $[0,1]$.*

Доказательство получилось простое, понять его легко. По биному Ньютона имеем

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1; \qquad \sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{n}\, p_{nk}(x) = x, \tag{3}$$

Из (3) легко выводится тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{4}$$

Остаётся воспользоваться неравенством Чебышева, применяемым для вывода закона больших чисел. □

Рассуждение ясно и красиво, однако, оно совершенно неожиданно — как будто с неба свалилось.

К концу марта или началу апреля 1952 г. первый том Собрания сочинений С. Н. Бернштейна был вполне готов, и наступило время подписать его к печати. В какой-то момент редактор издательства профессор Д. А. Райков, по-видимому, чтобы заполнить паузу, возникшую в деловой беседе, спросил Сергея Натановича, как ему удалось построить такие оригинальные полиномы для доказательства теоремы Вейерштрасса. Сергей Натанович на мгновение задумался, а затем сухо и иронично ответил, что в 1911 году имело место такое прогрессивное явление, как студенческие забастовки, благодаря чему у него оставалось довольно много времени для размышлений. Разумеется, мы ожидали, что Сергей Натанович войдёт в какие-нибудь интересные подробности или расскажет о каком-нибудь поразительном озарении. Но он не открыл нам никакой великой тайны, — быть может, её и не было.

Во всяком случае, С. Н. Бернштейн начал думать и публиковать статьи о приближении непрерывных функций рядами, по форме сходными с полиномами (1), ещё в 1903 г., когда приступил к решению 19-й проблемы Гильберта. Мы попытаемся восстановить в общих чертах его дорогу к полиномам, которые носят его имя и которые привели к принципиально новому доказательству теоремы Вейерштрасса.

Девятнадцатая проблема Гильберта относится к дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка эллиптического типа, задаваемых аналитическими функциями, с двумя независимыми переменными. Иными словами, речь идёт об уравнении

$$F(r, s, t, p, q, u, x, y) = 0, \tag{5}$$

где F — аналитическая функция всех восьми переменных, и выполняется неравенство

$$4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0. \tag{6}$$

Требовалось доказать, что все решения этого уравнения являются аналитическими функциями, причём предполагается, что решение уравнения u непрерывно дифференцируемо σ раз, $\sigma \geqslant 2$. Уравнение Лапласа было рассмотрено ещё Коши, а случай линейных уравнений — Пикаром. Оба они применяли метод последовательных приближений, что при переходе от декартовых координат к полярным приводило к некоторым степенным рядам. Лично Гильберт предложил молодому Бернштейну заняться проблемой в общем случае. Естественно было начать с метода последовательных приближений и дальнейшего перехода к полярным координатам. Однако оказалось, что это приводит не к степенным рядам, а к более сложным двойным рядам вида

$$f(x) = \sum_{l,m} a_{lm}\, x^l (1-x)^m.$$

Если они сходятся абсолютно и равномерно, то С. Н. Бернштейн назвал их нормальными рядами.

Число σ непрерывных производных от решения u уравнения (5), которое нужно потребовать первоначально, зависит от класса функций f, разлагаемых в нормальные ряды. Если бы оказалось, что любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция f представима суммой нормального ряда, то было бы достаточно требовать от решения u, чтобы его вторые частные производные удовлетворяли условию Липшица с $\alpha > 0.5$.

Но представимость любой непрерывной функции f нормальным рядом удалось доказать не сразу. Сначала приходилось требовать от функции f большей гладкости. Приведём рассуждение для дважды непрерывно дифференцируемой функции, данное в магистерской диссертации (1908 г., Сочинения, т. 3, стр. 49). Проверим, что справедливо тождество

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)|x-t|\,dt + A + Bx, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{7}$$

Действительно, если мы напишем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)|x-t|\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^x f''(t)(x-t)\,dt - \tfrac{1}{2}\int_x^1 f''(t)(x-t)\,dt$$

и проинтегрируем по частям, то получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)|x-t|\,dt = f(x) - \tfrac{1}{2}\big(f(1)+f(0)-f'(1)\big) - \tfrac{1}{2}\big(f'(1)+f'(0)\big)x.$$

Разложим функцию $|x-t|$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ в ряд

$$\begin{aligned}|x-t| &= \bigl(1-\bigl(1-(x-t)^2\bigr)\bigr)^{1/2} = \\ &= \bigl(1+t^2-(1-x^2+2tx)\bigr)^{1/2} = (1+t^2)^{1/2}\Bigl(1-\frac{1-x^2+2tx}{1+t^2}\Bigr)^{1/2} = \\ &= (1+t^2)^{1/2}\Bigl(1-\frac{1}{2}\,\frac{1-x^2+2tx}{1+t^2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{k!\,2^k}\,\frac{(1-x^2+2tx)^k}{(1+t^2)^k}\Bigr). \qquad (8)\end{aligned}$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \sum_{p,q} A_{pq}\, x^p (1-x^2)^q. \qquad (9)$$

Ясно, что (9) — нормальный ряд, так как

$$(1-x^2)^q = (1-x)^q \sum_{k=0}^{q} C_q^k\, x^k.$$

Затем С. Н. Бернштейн показывает, что приведенный результат остаётся справедливым для любой непрерывно дифференцируемой (только один раз) функции.

Вернёмся, однако, к плодотворному 1911 г., как сказано в ответе Д. А. Райкову. Как раз в 1910 г. академия наук Бельгии объявила конкурс по теме, предложенной Валле Пуссеном, — о наилучшем приближении функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, +1]$ полиномами степени $\leqslant n$. Эта задача была в стиле проблем Гильберта: просто формулируется; не кажется ни слишком лёгкой, ни совершенно неприступной; можно надеяться, что её решение будет полезным также для исследования иных тем.

С. Н. Бернштейн с большой скоростью — к лету 1911 года — дал полное решение поставленной проблемы. Для этой цели он создал общую теорию наилучшего приближения непрерывных функций многочленами, приведя во взаимодействие идеи и методы Вейерштрасса и Чебышева. Работа была премирована бельгийской академией наук.

На Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 г. С. Н. Бернштейн в своём докладе сказал: “Пример задачи о наилучшем приближении $f(x) = |x|$, предложенный Валле Пуссеном, даёт ещё одно подтверждение того факта, что хорошо поставленный частный вопрос способен быть отправной точкой для далеко идущих теорий”.

Эти исследования С. Н. Бернштейна составили также его докторскую диссертацию, защищённую в Харьковском университете (Сочинения, т. 1, № 3). В неё было включено Добавление, в котором доказывалось, что любая непрерывная на $[0, 1]$ функция f представима нормальным рядом. В основу была

положена простая идея. Так как система функций $\{x^k(1-x)^{n-k}\}_{k=0}^n$ линейно независима, то любой многочлен

$$P_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu$$

степени $m \leqslant n$ можно однозначно представить в виде

$$P_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu\, x^\nu \big((1-x)+x\big)^{n-\nu} = \sum_{k=0}^{n} A_{nk}\, x^k (1-x)^{n-k}. \tag{10}$$

У С. Н. Бернштейна явно вычислены A_{nk} через a_ν, но проще рассматривать отдельно

$$x^\nu = x^\nu \big((1-x)+x\big)^{n-\nu} = \sum_{k=\nu}^{n} C_{n-\nu}^{k-\nu}\, x^k (1-x)^{n-k}. \tag{11}$$

Для применения к (10) удобно формулу (11) переписать по полиномам p_{nk} (2):

$$x^\nu = \sum_{k=\nu}^{n} \frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k}\, p_{nk}(x). \tag{12}$$

Мы имеем

$$\frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k} = \frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)} = \left(\tfrac{k}{n}\right)^\nu \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)}. \tag{13}$$

Учитывая формулы (12) и (13) и применяя обозначения, принятые в наше время, можем написать приближающий полином для x^ν так:

$$B_n(t^\nu; x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^\nu p_{nk}(x). \tag{14}$$

При помощи (13) и достаточно тонких вычислений С. Н. Бернштейн получает такую оценку разности

$$\big|x^\nu - B_n(t^\nu; x)\big| < \frac{K_\nu}{n}, \qquad \nu \leqslant m,$$

где K_ν зависит только от ν. Отсюда для многочлена P_m (10) имеем

$$B\big(P_m(t); x\big) = \sum_{k=0}^{n} P_m\left(\tfrac{k}{n}\right) p_{nk}(x),$$

$$\left|B_n(P_m(t);x)-P_m(x)\right|<\frac{K_m}{n},\qquad m\leqslant n. \tag{15}$$

Заметим, между прочим, что неравенство (15) можно получить почти без вычислений и без применения неравенства Чебышева. Воспользуемся для этого одним тождеством, которое я недавно вывел для других целей. $B_n(1;x)$ и $B_n(t;x)$ даются формулами (3). Покажем, что при $\nu\geqslant 1$ справедливо тождество

$$B_n(t^{\nu+1};x)=B_n(t^{\nu};x)-\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{\nu}(1-x)B_{n-1}(t^{\nu};x). \tag{$*$}$$

Напишем явно

$$B_n(t^{\nu+1};x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{k}{n}\right)^{\nu+1}C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k}$$

и преобразуем общий член, стоящий под знаком суммы

$$\left(\tfrac{k}{n}\right)^{\nu+1}C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k}=\left(\tfrac{k}{n}\right)^{\nu}\left(1-(1-\tfrac{k}{n})\right)C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$=\left(\tfrac{k}{n}\right)^{\nu}C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k}-\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{\nu}(1-x)\left(\tfrac{k}{n}\right)^{\nu-1}C_{n-1}^k\,x^k(1-x)^{n-1-k}.$$

Равенство $(*)$ доказано. При $\nu=1$, используя (3), получим

$$B_n(t^2;x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}. \tag{$**$}$$

Предположим по индукции, что имеет место

$$B_n(t^{\nu};x)=x^{\nu}+O\Big(\frac{x(1-x)}{n}\Big)\quad\text{при}\quad \nu=1,2,\ldots,m,$$

где константа в O зависит только от m, и примéним $(*)$. Тогда

$$B_n(t^{m+1};x)=x^{m+1}+\left(1-\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{m}\right)x^m(1-x)+$$
$$+O\Big(\frac{x(1-x)}{n}\Big)=x^{m+1}+O\Big(\frac{x(1-x)}{n}\Big).$$

Напомним, что теорема о приближении непрерывных функций полиномами самим Вейерштрассом была доказана как теорема существования. Используя её в такой форме и применяя неравенство (15), С. Н. Бернштейн доказал два важных следствия.

ТЕОРЕМА 2. *Любая непрерывная на отрезке* $[0,1]$ *функция* f *разлагается в нормальный ряд.*

Доказательство. В самом деле, по теореме Вейерштрасса для любого натурального s существует полином P_{m_s} $(m_s > m_{s-1})$ такой, что

$$\bigl|f(x) - P_{m_s}(x)\bigr| < \frac{1}{2^{s+2}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

а по неравенству (15) существует $n_s > n_{s-1}$ такое, что

$$\bigl|B_{n_s}(P_{m_s}; x) - P_{m_s}(x)\bigr| < \frac{1}{2^{s+2}},$$
$$\bigl|B_{n_s}(P_{m_s}; x) - f(x)\bigr| < \frac{1}{2^{s+1}}.$$

Значит, f разлагается в нормальный ряд

$$f(x) = \sum B_{n_{s+1}}\bigl(P_{m_{s+1}}; x\bigr) - B_{n_s}\bigl(P_{m_s}; x\bigr). \qquad \square$$

ТЕОРЕМА 3. *Для любой непрерывной на отрезке* $[0,1]$ *функции* f *последовательность* $B_n(f;x)$ *сходится к ней равномерно.*

Для *доказательства* теоремы 3 применяется теорема Вейерштрасса, так что теорема 3 слабее теоремы 1. Обозначим через (P_m) последовательность полиномов, которая сходится к f. По теореме Вейерштрасса и неравенству (15) для фиксированного $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n и m имеем

$$\bigl|P_m(x) - f(x)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \bigl|B_n(P_m; x) - P_m(x)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\bigl|B_n(f,x) - f(x)\bigr| < B\bigl(\bigl|f - P_m\bigr|; x\bigr) + \bigl|B_n(P_m; x) - P_m(x)\bigr| + \bigl|P_m(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x). \tag{16}$$

В тексте С. Н. Бернштейном сказано, что “формула (16) выведена мною при помощи теории вероятностей в заметке, помещённой в «Сообщениях Харьковского математического общества, т. 13, № 1, 1912 г.»”.

Мне кажется несомненным, что С. Н. Бернштейн доказал теорему 1 после теоремы 3, но следует признать, что он этого нигде не пишет!

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. *Собрание сочинений.* М.: АН СССР. Т. 1, № 3, с. 79–84; № 4. Т. 2, №№ 57, 64, 65, 81. Т. 3, № 1, № 9, с. 49–53.

РАВНОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ

А. Б. Певный М. Н. Юркина

11 апреля 2013 г.

Установлено, что равноугольный жёсткий фрейм, состоящий из m единичных векторов в n-мерном евклидовом пространстве, является полудизайном 4-го порядка тогда и только тогда, когда $m = n(n+1)/2$. Рассматривается важный пример равноугольного жёсткого фрейма, состоящего из $n+1$ вершин правильного симплекса, вписанного в единичную сферу (фрейм Мерседес-Бенц). Строится новая система векторов, состоящая из проекций середин ребер симплекса на сферу. Показывается, что эта система будет жёстким фреймом для любого $n \geqslant 2$, а равноугольной этой система будет только при $n = 2$ и $n = 7$. В последних двух случаях получаем равноугольный полудизайн 4-го порядка.

1°. Равноугольные жёсткие фреймы. Напомним определение равноугольной системы векторов (см. [1, 2, 3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система векторов $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathbb{R}^n$ называется равноугольной, если

$$\|x_k\| = 1, \quad k \in 1 : m; \tag{1}$$

$$|\langle x_i, x_j \rangle| = c \quad \text{при } i \neq j, \tag{2}$$

где c — константа, $0 \leqslant c < 1$.

Поясним смысл условия (2). Для каждого вектора x_i рассмотрим прямую $L_i = \{x = \lambda x_i \mid \lambda \in (-\infty, \infty)\}$. Между прямыми L_i и L_j есть два угла α_{ij} и β_{ij}, $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = \pi$. Будем считать, что $\alpha_{ij} \in [0, \pi/2]$, $\beta_{ij} \in [\pi/2, \pi]$. Тогда $|\langle x_i, x_j \rangle| = \cos \alpha_{ij}$. Условие (2) означает, что все углы α_{ij} равны между собой.

Число элементов равноугольной системы не может быть неограниченным. Справедливо неравенство

$$m \leqslant \tfrac{1}{2} n(n+1). \tag{3}$$

Оно впервые установлено в [1], простое доказательство см. в [3].

Далее будем рассматривать жёсткие фреймы, состоящие из единичных векторов. Введем обозначение для единичной сферы: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ называется жёстким фреймом, если

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x_i, x\rangle\big]^2 = \tfrac{m}{n}\,\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Для жёсткого фрейма необходимо выполняется неравенство $m \geqslant n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Равноугольная система $\{x_1, \dots, x_m\}$ будет жёстким фреймом тогда и только тогда, когда $m \geqslant n$ и выполняется равенство*

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}. \tag{5}$$

По поводу доказательства см. [3].

2°. Сферические полудизайны. Обобщением жёстких фреймов являются сферические полудизайны порядка t, где t — чётное число, $t \geqslant 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$ на сфере S^{n-1} называется сферическим полудизайном порядка t, если выполнены тождества

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x_i, x\rangle\big]^p = c_p \|x\|^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ p = 2, 4, \dots, t, \tag{6}$$

где

$$c_p = \frac{(p-1)!!}{n(n+2)\dots(n+p-2)}.$$

Заметим, что $c_2 = \frac{1}{n}$ и сферический полудизайн второго порядка является жёстким фреймом (по определению 2).

В [4] доказан следующий критерий сферического полудизайна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ является сферическим полудизайном порядка t тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t = c_t. \tag{7}$$

Выясним, при каких условиях равноугольный жёсткий фрейм является сферическим полудизайном 4-го порядка.

ТЕОРЕМА 1. *Чтобы равноугольный жёсткий фрейм $\{x_1, \ldots, x_m\}$ был сферическим полудизайном 4-го порядка необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$m = \tfrac{1}{2}n(n+1). \tag{8}$$

Доказательство. Будем проверять равенство (7) при $t = 4$, где

$$c_4 = \frac{3}{n(n+2)}.$$

Для равноугольного жёсткого фрейма по формуле (5) имеем

$$|\langle x_i, x_j\rangle| = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}, \quad i \neq j.$$

Если же $i = j$, то $\langle x_i, x_i\rangle = 1$. Из (7) при $t = 4$ следует соотношение

$$m + (m^2 - m)\frac{(m-n)^2}{n^2(m-1)^2} = c_4 m^2 = \frac{3m^2}{n(n+2)}.$$

Это эквивалентно равенствам

$$n + \frac{(m-n)^2}{n(m-1)} = \frac{3m}{n+2},$$
$$(n^2 + m - 2n)(n+2) = 3n(m-1).$$

Отсюда m выражается через n по формуле $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. □

Применение теоремы 1 затруднено тем, что равноугольные жёсткие фреймы существуют не для всех пар (m, n). А при дополнительном условии $m = \frac{1}{2}n(n+1)$ они существуют ещё реже. Поэтому приходится довольствоваться редкими примерами.

Начнем с простейшего примера — фрейма Мерседес-Бенц на плоскости.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим три единичных вектора в $\mathbb{R}^2$: $\varphi_1 = (0, 1)$, $\varphi_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\varphi_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Легко проверить, что это жёсткий фрейм и $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = -\frac{1}{2}$ при $i \neq j$. Значит, углы между векторами φ_i равны $120°$. Этот равноугольный жёсткий фрейм известен как фрейм Мерседес-Бенц ([5]). Здесь $n = 2$, $m = 3$ и $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. По теореме 1, $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — сферический полудизайн 4-го порядка.

ПРИМЕР 2. При $n = 3$, $m = 6$ равноугольный жёсткий фрейм можно получить из 12 вершин икосаэдра, вписанного в сферу S^2. Можно выбрать 6 вершин $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ так, что

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В силу предложения 1 система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ будет равноугольным жёстким фреймом, а по теореме 1 — сферическим полудизайном 4-го порядка.

Еще один интересный пример связан с серединами ребер правильного симплекса.

3°. Жёсткие фреймы, образованные из середин ребер правильных симплексов.

3.1. В [5, 3] введено понятие системы Мерседес-Бенц в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности $n \geqslant 2$. Система из $n+1$ единичных векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ называется системой Мерседес-Бенц, если

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\tfrac{1}{n} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Такая система является равноугольным жёстким фреймом. В [5, 3] предложен конструктивный способ ее построения.

Выпуклая оболочка точек $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ является правильным симплексом. В [6] рассматриваются ребра этого симплекса и проекции середин ребер на сферу S^{n-1} берутся в качестве узлов кубатурной формулы.

Рассмотрим середины ребер симплекса

$$x_{ij} = \tfrac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_j), \quad i < j.$$

Все эти векторы имеют одинаковые нормы, так как

$$\|x_{ij}\|^2 = \tfrac{1}{4}\big[2 + 2\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big] = \frac{n-1}{2n}.$$

Рассмотрим проекции векторов x_{ij} на единичную сферу:

$$X_{ij} = \frac{x_{ij}}{\|x_{ij}\|}, \quad i < j.$$

Количество таких векторов равно $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$, то есть ровно столько, сколько требуется в теореме 1. Но нужно ещё проверить, что система $\{X_{ij} : i < j\}$ будет равноугольным жёстким фреймом.

ТЕОРЕМА 2. *Система $\{X_{ij} : i < j\}$ является жёстким фреймом при любом натуральном $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Воспользуемся четвёртым определением жёсткого фрейма (см. [3]). Нужно проверить равенство

$$S := \sum \big[\langle X_{ij}, X_{kl} \rangle\big]^2 = \frac{m^2}{n} = \tfrac{1}{4}n(n+1)^2. \tag{9}$$

Всего в сумме m^2 слагаемых, где $m = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Слагаемые могут быть трех видов:

1) m скалярных произведений $\langle X_{ij}, X_{ij}\rangle = 1$;

2) p скалярных произведений $\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle$, где i, j, k, l попарно различны. В этом случае

$$\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle = \tfrac{1}{4}\big[\langle \varphi_i, \varphi_k\rangle + \langle \varphi_j, \varphi_k\rangle + \langle \varphi_i, \varphi_l\rangle + \langle \varphi_j, \varphi_l\rangle\big] = -\tfrac{1}{n}, \tag{10}$$
$$\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle = \frac{2n}{n-1}\Big(-\frac{1}{n}\Big) = -\frac{2}{n-1}.$$

3) q скалярных произведений $\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle$, где отрезки $[\varphi_i, \varphi_j]$ и $[\varphi_k, \varphi_l]$ имеют одну общую концевую точку. Пусть для определенности $j = k$. Тогда

$$\langle x_{ij}, x_{jl}\rangle = \tfrac{1}{4}\big[-\tfrac{1}{n} + 1 - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}\big] = \frac{n-3}{4n}, \tag{11}$$
$$\langle X_{ij}, X_{jl}\rangle = \frac{2n}{n-1}\frac{n-3}{4n} = \frac{n-3}{2(n-1)}.$$

Число q равно числу троек (i, j, l), причем индексы i, j, l можно переставлять. Такое число называется числом размещений:

$$q = A^3_{n+1} = \binom{n+1}{3}3! = (n+1)n(n-1).$$

Имеем

$$p = m^2 - m - q = m(m - 2n + 1).$$

Отсюда

$$S = m + p\big(\tfrac{2}{n-1}\big)^2 + q\big(\tfrac{n-3}{2(n-1)}\big)^2 =$$
$$= \frac{m}{(n-1)^2}\big[(n-1)^2 + 4(m - 2n + 1) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)^2\big].$$

Остается подставить $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. Получим

$$S = \tfrac{1}{4}n(n+1)^2 = \frac{m^2}{n}.$$

□

3.2. Выясним, при каких n построенный жёсткий фрейм $\{X_{ij} : 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\}$ будет равноугольным. У нас $X_{ij} = x_{ij}/\|x_{ij}\|$ и нормы $\|x_{ij}\|$ равны между собой. Поэтому условие равноугольности записывается в виде

$$|\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle| = \beta \quad \text{при} \quad (i,j) \neq (k,l), \tag{12}$$

где β — некоторая константа. При проверке условия (12) возможны два случая:

1) Индексы i, j, k, l попарно различны. Тогда по формуле (10)

$$\langle x_{ij}, x_{kl} \rangle = -\tfrac{1}{n}.$$

2) Среди концевых точек отрезков $[\varphi_i, \varphi_j]$ и $[\varphi_k, \varphi_l]$ есть одна общая точка. Тогда по формуле (11)

$$\langle x_{ij}, x_{kl} \rangle = \frac{n-3}{4n} > -\tfrac{1}{n}. \tag{13}$$

Чтобы выполнить условие (12) надо $\langle x_{ij}, x_{kl} \rangle$ приравнять к $1/n$:

$$\langle x_{ij}, x_{kl} \rangle = \frac{n-3}{4n} = \tfrac{1}{n},$$

откуда $n = 7$. Есть еще случай $n = 2$, когда все скалярные произведения вычисляются по формуле (13).

Итак, система $\{X_{ij} : \ 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\}$ является равноугольной только при $n = 2$ и $n = 7$. Случай $n = 2$ уже был рассмотрен в примере 1. При $n = 7$ получаем

ПРИМЕР 3. Система векторов $\{X_{ij} : \ 1 \leqslant i < j \leqslant 8\}$ в пространстве $\mathbb{R}^7$ состоит из 28 единичных векторов и является равноугольным сферическим полудизайном 4-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lemmens P. W. H., Seidel J. J. *Equiangular lines* // J. Algebra. V. 24. 1973. №3. С. 494–512.

2. Casazza P. G., Redmond D. and Tremain J. C. *Real equiangular frames* (`http://www.math.missouri.edu/~pete`)

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа. Вып. 39. 2009. С. 3—25.

4. Котелина Н. О., Певный А. Б. *Экстремальные свойства сферических полудизайнов* // Алгебра и анализ. Вып. 22. 2010. №5. С. 162–170.

5. Истомина М. Н., Певный А. Б. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // Вестник Сыктывкарского университета, Сер. 1. Вып. 6. 2006. С. 217–222.

6. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука. 1981.

СИММЕТРИЧНОСТЬ МАТРИЦ PONS

И. А. Крепкий С. М. Машарский

18 мая 2013 г.

1°. Матрицы PONS введены в работе [1]. Это рекуррентная последовательность квадратных матриц $P_1, P_2, \ldots$, каждая из которых имеет вдвое больший порядок, чем предыдущая. Начинается последовательность с матрицы Адамара

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для перехода от матрицы P_{n-1} к P_n строки исходной матрицы разбиваются на пары и каждые *две* строки матрицы P_{n-1} порождают *четыре* строки матрицы P_n вдвое большей длины по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \ldots \\ A \\ B \\ \ldots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ A & B \\ A & -B \\ B & A \\ -B & A \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{1}$$

В частности,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В докладе [2] в качестве гипотезы сформулирована, но не доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *При каждом $n = 1, 2, \ldots$ матрица P_n симметрична.*

Симметричность матриц P_1 и P_2 очевидна. Нетрудно проверить и симметричность матрицы P_3. Для доказательства общего случая потребуется некоторая подготовка.

2°. Квадратная матрица P_n имеет порядок 2^n. Представим индексы k, $j \in 0 : 2^n - 1$ элемента матрицы $P_n[k, j]$ в виде

$$k = 4m + m', \quad m \in 0 : 2^{n-2} - 1, \ m' \in 0 : 3;$$

$$j = l + 2^{n-1}l', \quad l \in 0 : 2^{n-1} - 1, \ l' \in 0 : 1.$$

Тогда соотношение (1) можно представить в виде набора равенств

$$\begin{aligned}
P_n[4m, l] &= P_{n-1}[2m, l], \\
P_n[4m, l + 2^{n-1}] &= P_{n-1}[2m + 1, l], \\
P_n[4m + 1, l] &= P_{n-1}[2m, l], \\
P_n[4m + 1, l + 2^{n-1}] &= -P_{n-1}[2m + 1, l], \\
P_n[4m + 2, l] &= P_{n-1}[2m + 1, l], \\
P_n[4m + 2, l + 2^{n-1}] &= P_{n-1}[2m, l], \\
P_n[4m + 3, l] &= P_{n-1}[2m + 1, l], \\
P_n[4m + 3, l + 2^{n-1}] &= -P_{n-1}[2m, l], \\
m \in 0 : 2^{n-2} - 1, &\quad l \in 0 : 2^{n-1} - 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Формулы (2) можно компактно записать одной строкой, если воспользоваться представлением индексов в двоичном коде

$$k = (k_{n-1}, \ldots, k_0)_2, \quad j = (j_{n-1}, \ldots, j_0)_2, \quad k_\nu, j_\nu \in 0 : 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&P_n[(k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1, k_0)_2, (j_{n-1}, j_{n-2}, \ldots, j_0)_2] = \\
&\qquad = (-1)^{k_0(k_1 + j_{n-1})} P_{n-1}[(k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 \oplus j_{n-1})_2, (j_{n-2}, \ldots, j_0)_2],
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\oplus$ — операция сложения по модулю 2.

3°. С помощью двоичных кодов также можно записать явный вид для элементов матрицы P_n. Очевидно, что

$$P_1[k,j] = P_1[(k_0)_2, (j_0)_2] = (-1)^{k_0 j_0}. \tag{4}$$

Чуть менее очевидно, что

$$P_2[k,j] = P_1[(k_1,k_0)_2, (j_1,j_0)_2] = (-1)^{(k_0+j_0)(k_1+j_1)}. \tag{5}$$

Ответ на вопрос, как же выглядит формула для элемента $P_n[k,j]$ в общем виде, дает следующая лемма.

ЛЕММА 1. *При каждом $n = 1, 2, \ldots$ справедлива формула*

$$P_n[k,j] = \prod_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{(k_\nu + j_{n-\nu})(k_{\nu+1} + j_{n-1-\nu})}, \tag{6}$$

где для удобства положено $k_n = j_n := 0$.

Доказательство. Будем доказывать справедливость равенства (6) индукцией по n. При $n = 1$ и $n = 2$ равенство (6) совпадает с (4) и (5) соответственно. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к n, $n \geqslant 3$.

Зафиксируем индексы $k, j \in 0 : 2^n - 1$, $k = (k_{n-1}, \ldots, k_0)_2$, $j = (j_{n-1}, \ldots, j_0)_2$. Положим

$$k'_0 := k_1 \oplus j_{n-1},$$

$$k'_\nu := k_{\nu+1}, \quad \nu \in 1 : n-1;$$

$$j'_\nu := j_\nu, \quad \nu \in 0 : n-2,$$

$$j'_{n-1} := 0.$$

С учетом этих обозначений и индукционного предположения правую часть равенства (3) можно переписать в виде

$$(-1)^{k_0(k_1+j_{n-1})} P_{n-1}[(k'_{n-2}, \ldots, k'_1, k'_0)_2, (j'_{n-2}, \ldots, j'_0)_2] =$$

$$= (-1)^{k_0(k_1+j_{n-1})} \prod_{\nu=0}^{n-2} (-1)^{(k'_\nu + j'_{n-1-\nu})(k'_{\nu+1} + j'_{n-2-\nu})} =$$

$$= (-1)^{k_0(k_1+j_{n-1})} (-1)^{(k_1 \oplus j_{n-1})(k_2+j_{n-2})} \prod_{\nu=1}^{n-2} (-1)^{(k_{\nu+1}+j_{n-1-\nu})(k_{\nu+2}+j_{n-2-\nu})}.$$

Подставляя это в формулу (3) и замечая, что $(-1)^{a \oplus b} = (-1)^{a+b}$, получаем:

$$P_n[k,j] = (-1)^{(k_0+j_n)(k_1+j_{n-1})} (-1)^{(k_1+j_{n-1})(k_2+j_{n-2})} \prod_{\nu'=2}^{n-1} (-1)^{(k_{\nu'}+j_{n-\nu'})(k_{\nu'+1}+j_{n-1-\nu'})},$$

что равносильно (6).

Лемма доказана. □

4°. Обратимся к доказательству теоремы. По существу, нужно проверить, что при каждом $n = 1, 2, \ldots$ выполняются равенства

$$P_n[k, j] = P_n[j, k], \quad k, j \in 0 : 2^n - 1.$$

С помощью формулы (6) это проверяется непосредственно. Имеем

$$P_n[j, k] = \prod_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{(j_\nu + k_{n-\nu})(j_{\nu+1} + k_{n-1-\nu})} =$$

$$= \prod_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{(j_{n-1-\mu} + k_{\mu+1})(j_{n-\mu} + k_\mu)} = P_n[k, j].$$

Теорема доказана. □

5°. Пусть $N = 2^n$. Обозначим k-ю строку матрицы P_n символом p_k и будем ее рассматривать как сигнал из пространства $\mathbb{C}_N$, заданный на основном периоде:

$$p_k(j) = P_n[k, j], \quad j \in 0 : N - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

В докладе [2] сформулирована еще одна гипотеза, которую мы представим здесь как теорему.

ТЕОРЕМА 2. *При всех $n \geqslant 2$ и $k, k' \in 0 : \frac{N}{2} - 1$ справедливо соотношение*

$$p_k(j) p_{k'}(j) = \alpha^n_{k,k'} \, p_{\frac{N}{2}+k}(j) p_{\frac{N}{2}+k'}(j), \quad j \in 0 : N - 1, \tag{7}$$

где

$$\alpha^n_{k,k'} = (-1)^{k_{n-2} + k'_{n-2}}.$$

При $n = 2$ формула (7) принимает вид

$$p_k(j) p_{k'}(j) = (-1)^{k+k'} \, p_{k+1}(j) p_{k'+1}(j), \quad j \in 0 : 3, \quad k, k' \in 0 : 1.$$

В справедливости этого равенства можно убедиться непосредственно.

Доказательство теоремы при $n \geqslant 3$ вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

ЛЕММА 2. *При всех $n \geqslant 3$ и $k \in 0 : \frac{N}{2} - 1$ справедливо равенство*

$$p_k(j) = (-1)^{(k_{n-2} + j_2 + j_0)} p_{\frac{N}{2}+k}(j), \quad j \in 0 : N - 1. \tag{8}$$

Доказательство. Перепишем формулу (6), выделив из произведения два последних сомножителя:

$$P_n[k,j] = (-1)^{(k_{n-1}+j_1)j_0}(-1)^{(k_{n-2}+j_2)(k_{n-1}+j_1)}\prod_{\nu=0}^{n-3}(-1)^{(k_\nu+j_{n-\nu})(k_{\nu+1}+j_{n-1-\nu})} =$$
$$= (-1)^{(k_{n-1}+j_1)(k_{n-2}+j_2+j_0)}\varphi_k^n(j), \tag{9}$$

где для краткости обозначено

$$\varphi_k^n(j) = \prod_{\nu=0}^{n-3}(-1)^{(k_\nu+j_{n-\nu})(k_{\nu+1}+j_{n-1-\nu})}.$$

Зафиксируем $k \in 0 : \frac{N}{2}-1$, $k = (0, k_{n-2}, \ldots, k_0)_2$. Тогда двоичный код числа $\frac{N}{2}+k$ будет иметь вид $k = (1, k_{n-2}, \ldots, k_0)_2$. В соответствии с (9) имеем

$$p_k(j) = (-1)^{j_1(k_{n-2}+j_2+j_0)}\varphi_k^n(j),$$
$$p_{\frac{N}{2}+k}(j) = (-1)^{(j_1+1)(k_{n-2}+j_2+j_0)}\varphi_{\frac{N}{2}+k}^n(j).$$

Осталось заметить, что в определение φ_k^n входят только младшие биты $k_0, k_1, \ldots, k_{n-2}$ числа k, так что $\varphi_{\frac{N}{2}+k}^n(j) \equiv \varphi_k^n(j)$. Справедливость равенства (8) установлена. □

6°. Следствием из теоремы 1 является тот факт, что матрицы PONS можно формировать не по строкам, а по столбцам. По аналогии со схемой (1), для перехода от матрицы P_{n-1} к P_n столбцы исходной матрицы разбиваются на пары и каждые два столбца матрицы P_{n-1} порождают четыре столбца матрицы P_n вдвое большей высоты по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \vdots & A & B & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots & A & A & B & -B & \vdots \\ \vdots & B & -B & A & A & \vdots \end{pmatrix} \tag{10}$$

Схема (10) представляется более перспективной с точки зрения доказательства двух оставшихся гипотез, сформулированных в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. An M., Byrnes J., Moran W., Saffari B., Shapiro H. S., Tolimieri R. *PONS, Reed-Muller codes, and group algebras* // NATO Advanced Study Institute: Computational Noncommutative Algebra and Applications. Tscany, Italy. July 2003. P. 155–197.

2. Стояноска И. С. *Обобщенные полиномы Шапиро и матрицы PONS* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 19 мая 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0519`)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

И. В. Агафонова В. Н. Малозёмов

25 мая 2013 г.

1°. Функция n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *булевой*, если её аргументы и сама она могут принимать только два значения, 0 или 1.

Вектор булевых переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ имеет $N = 2^n$ различных значений $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(N-1)}$. Их можно перечислить. Например, при $n = 1$ и $n = 2$ таблицы аргументов выглядят так:

№	x_1
0	0
1	1

№	x_1	x_2
0	0	0
1	1	0
2	0	1
3	1	1

Переход от таблицы с n аргументами к таблице с $n+1$ аргументом осуществляется по следующей схеме:

№	x_1 $\ldots$ x_n
0	
1	A
$\vdots$	
$2^n - 1$	

$\longrightarrow$

№	x_1 $\ldots$ x_n	x_{n+1}
0		0
1	A	$\vdots$
$\vdots$		
$2^n - 1$		0
2^n		1
$2^n + 1$	A	$\vdots$
$\vdots$		
$2^{n+1} - 1$		1

Каждому вектору аргументов $x^{(k)}$ сопоставляется значение булевой функции $f[k] = f(x^{(k)})$. Ниже приводится полная таблица булевой функции при $n = 3$.

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	$f[0]$
1	1	0	0	$f[1]$
2	0	1	0	$f[2]$
3	1	1	0	$f[3]$
4	0	0	1	$f[4]$
5	1	0	1	$f[5]$
6	0	1	1	$f[6]$
7	1	1	1	$f[7]$

Общее количество булевых функций n переменных равно количеству различных двоичных векторов $f[0 : N-1]$ длины $N = 2^n$, то есть 2^{2^n}.

2°. Принципиальный факт заключается в том, что любую булеву функцию можно составить из её аргументов и константы 1 с помощью двух операций — сложения по модулю 2 и умножения. Эти операции определяются так:

$$0 \oplus 0 = 0, \qquad 0 \oplus 1 = 1, \qquad 1 \oplus 0 = 1, \qquad 1 \oplus 1 = 0;$$
$$0 \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot 1 = 0, \qquad 1 \cdot 0 = 0, \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

Знак умножения (точку) часто опускают: вместо $x_1 \cdot x_2$ пишут $x_1 x_2$.

Отметим, что для булевой переменной a справедливо равенство

$$a \oplus a = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим булеву функцию одной переменной $f(x_1)$. С учётом (1) имеем

$$f(x_1) = f(0) \oplus [f(0) \oplus f(1)]x_1 = a_0^1 \oplus a_1^1\, x_1.$$

Это равенство верно как при $x_1 = 0$, так и при $x_1 = 1$. Аналогично для булевой функции двух переменных получаем

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) \oplus [f(x_1, 0) \oplus f(x_1, 1)]x_2 = a_0^2 \oplus a_1^2\, x_1 \oplus [a_2^2 \oplus a_{12}^2\, x_1]x_2 =$$
$$= a_0^2 \oplus a_1^2\, x_1 \oplus a_2^2\, x_2 \oplus a_{12}^2\, x_1\, x_2.$$

В общем случае

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \oplus [f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \oplus f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)]x_n =$$
$$= a_0^n \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,\\ k \in 1:n}} a_{i_1, \ldots, i_k}^n\, x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \tag{2}$$

где коэффициенты принимают значения 0 или 1. Это и есть алгебраическая нормальная форма булевой функции.

Выражение, стоящее в правой части равенства (2), называется *полиномом Жегалкина* [1]. Верхний индекс n у коэффициентов полинома Жегалкина обычно опускают.

Подведём итог.

ТЕОРЕМА. *Любая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина.*

3°. Количество коэффициентов у полинома Жегалкина равно

$$1 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Оно совпадает с количеством значений вектора аргументов булевой функции. По значениям $f[0], f[1], \ldots, f[N-1]$ булевой функции нетрудно вычислить коэффициенты соответствующего полинома Жегалкина. Программа вычислений выглядит так:

$$\begin{aligned}
&\text{for } k := 0 \text{ to } 2^n - 1 \text{ do}\\
&\quad a[k] := f[k];\\
&\text{for } i := 1 \text{ to } n \text{ do}\\
&\text{for } s := 0 \text{ to } 2^{n-i} - 1 \text{ do}\\
&\text{for } l := 0 \text{ to } 2^{i-1} - 1 \text{ do}\\
&\quad a[2^i s + 2^{i-1} + l] := a[2^i s + l] \oplus a[2^i s + 2^{i-1} + l]
\end{aligned} \tag{3}$$

После работы программы в массиве $a[0 : 2^n - 1]$ будут находиться коэффициенты полинома Жегалкина.

Разберёмся в схеме (3) более детально. При $i = 1$ ($l = 0$) вычисляем

$$\begin{aligned}
&\text{for } s := 0 \text{ to } 2^{n-1} - 1 \text{ do}\\
&\quad a[2s + 1] := a[2s] \oplus a[2s + 1]
\end{aligned}$$

При $i = 2$

$$\begin{aligned}
&\text{for } s := 0 \text{ to } 2^{n-2} - 1 \text{ do}\\
&\text{for } l := 0 \text{ to } 1 \text{ do}\\
&\quad a[4s + 2 + l] := a[4s + l] \oplus a[4s + 2 + l]
\end{aligned}$$

и так далее. При $i = n$ ($s = 0$)

$$\begin{aligned}
&\text{for } l := 0 \text{ to } 2^{n-1} - 1 \text{ do}\\
&\quad a[2^{n-1} + l] := a[l] \oplus a[2^{n-1} + l]
\end{aligned}$$

Схема (3) называется *быстрым алгоритмом вычисления коэффициентов полинома Жегалкина.* В ней используется только операция сложения по модулю 2 в количестве

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}2^{i-1} = n2^{n-1} = \frac{1}{2}N\log_2 N \text{ операций.}$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений по схеме (3) для конкретной булевой функции трёх переменных. В последнем столбце перечислены все мономы от трёх переменных, а в предпоследнем — найденные значения коэффициентов при этих мономах.

№	x_1	x_2	x_3	f	$i=1$	$i=2$	$i=3$	мономы
0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	x_1
2	0	1	0	1	1	0	0	x_2
3	1	1	0	0	1	0	0	x_1x_2
4	0	0	1	0	0	0	1	x_3
5	1	0	1	1	1	1	0	x_1x_3
6	0	1	1	1	1	1	1	x_2x_3
7	1	1	1	0	1	0	0	$x_1x_2x_3$

Таблица 1

Получаем представление

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_2x_3. \tag{4}$$

Отметим, что индексы переменных, входящих в мономы, согласованы со значениями аргументов булевой функции.

4°. Рассмотрим обратную задачу — вычисление значений полинома Жегалкина (2). Она решается просто, так как соотношения (3) обратимы. Удивительным является тот факт, что значения полинома Жегалкина будут найдены, если воспользоваться самой схемой (3), поменяв в ней местами идентификаторы f и a (см. [2]).

В табл. 2 приведены результаты вычисления значений полинома (4) по схеме (3).

В последнем столбце указаны значения полинома (4).

№	x_1	x_2	x_3	a	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	1
3	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0
5	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	0	1	0	0

Таблица 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалкин И. И. *Арифметизация символической логики.* //Матем. сб. 1928. Т. 35. С. 311—377.

2. Carlet C. *Boolean functions for cryptography and error correcting codes* // In: Boolean Models and Methods in Mathematics, Computer Science and Engineering. Cambridge Univ. Press. Y. Crama and P. L. Hammer (eds.). 2010. P. 257–397.

НЕРАВЕНСТВО СИДЕЛЬНИКОВА

Н. О. Котелина А. Б. Певный

25 октября 2013 г.

Интегральное неравенство В. М. Сидельникова было установлено в 1974 г. с очень трудным доказательством. Дискретный вариант неравенства Сидельникова изучали Гётальс, Зайдель (1979) и Б. Б. Венков (2001). В их работах установлены условия, при которых дискретное неравенство обращается в равенство. Предлагается простое доказательство неравенства Сидельникова, основанное на идее Венкова.

1°. Неравенство Сидельникова. Пусть $\langle x,\, y\rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $\|x\|^2 = \langle x,\, x\rangle$. Пусть t — натуральное число, $U \subset \mathbb{R}^n$ и μ — мера на U такая, что $\int_U \|x\|^t\, d\mu_x < \infty$.

В. М. Сидельников [1] установил два неравенства. Первое очень простое, второе (для чётного t) — трудное и содержательное.

Для проивольного натурального t справедливо неравенство

$$\int_U \int_U \langle x,\, y\rangle^t\, d\mu_x\, d\mu_y \geqslant 0. \tag{1}$$

Это легко доказать с помощью мультииндексной техники. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geqslant 0$. Обозначим

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Неравенство (1) доказывается в одну строчку

$$\int_U \int_U \langle x,\, y\rangle^t\, d\mu_x\, d\mu_y = \int_U \int_U \Big(\sum_{|\alpha|=t} \frac{t!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha\Big)\, d\mu_x\, d\mu_y = \sum_{|\alpha|=t} \frac{t!}{\alpha!} \Big(\int_U x^\alpha\, d\mu_x\Big)^2 \geqslant 0.$$

Пусть далее t — чётное число.

ТЕОРЕМА 1 (В. М. Сидельников [1]). *Справедливо неравенство*

$$\int_U \int_U \langle x,\, y\rangle^t \, d\mu_x \, d\mu_y \geqslant c_t \Big(\int_U \|x\|^t \, d\mu_x \Big)^2, \tag{2}$$

где

$$c_t = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} \xi_1^t \, dS_\xi \tag{3}$$

— среднее значение функции $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \xi_1^t$ *на единичной сфере* S^{n-1} *в* $\mathbb{R}^n$, σ_n *— площадь сферы* S^{n-1}, $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Это сильный результат, но доказательство в [1] весьма сложное. Мы приведём более простое доказательство.

ЛЕММА 1. *Для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *справедливо тождество*

$$\int_{S^{n-1}} \langle x,\, \xi\rangle^t \, dS_\xi = \sigma_n c_t \|x\|^t. \tag{4}$$

Доказательство. Константу (3) можно записать в виде

$$c_t = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} \langle \eta,\, \xi\rangle^t \, dS_\xi,$$

где η — произвольный вектор из S^{n-1}. Подставив $\eta = x/\|x\|$, получим тождество (4). □

Пусть $\mathrm{Hom}(t)$ — пространство однородных полиномов степени t над $\mathbb{R}$ от n переменных. Следуя Б. Б. Венкову [6], введём в $\mathrm{Hom}(t)$ скалярное произведение. Для полиномов

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha x^\alpha, \; g(x) = \sum_{|\alpha|=t} b_\alpha x^\alpha$$

из $\mathrm{Hom}(t)$ положим

$$[f,\, g] = \sum_{|\alpha|=t} \frac{\alpha!}{t!} a_\alpha b_\alpha.$$

Для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ введём полином $\rho_y(x) = \langle y,\, x\rangle^t$. Легко проверить, что

$$[\rho_y,\, f] = f(y), \quad f \in \mathrm{Hom}(t). \tag{5}$$

Действительно,

$$[\rho_y,\, f] = \sum_{|\alpha|=t} \frac{\alpha!}{t!} \frac{t!}{\alpha!} y^\alpha a_\alpha = f(y).$$

ЛЕММА 2. *Для полинома* $\omega_t(x) = \|x\|^t$ *справедливо равенство*

$$[\omega_t,\, \omega_t] = \frac{1}{c_t}. \tag{6}$$

Доказательство. Обе части тождества (4) умножим скалярно на $\omega_t(x)$. Получим

$$\int_{S^{n-1}} \big[\langle x,\, \xi\rangle^t,\, \omega_t(x)\big]\, dS_\xi = \sigma_n c_t[\omega_t,\, \omega_t].$$

По воспроизводящему свойству (5) $\big[\langle x,\, \xi\rangle^t,\, \omega_t(x)\big] = \omega_t(\xi) = 1$, так как $\|\xi\| = 1$. Поэтому интеграл равен σ_n. Получаем равенство $1 = c_t[\omega_t, \omega_t]$. □

Доказательство теоремы 1. Оказывается, что неравенство (2) есть ни что иное, как неравенство Коши-Шварца

$$[A,\, A][\omega_t,\, \omega_t] \geqslant [A,\, \omega_t]^2 \tag{7}$$

для полиномов

$$A(x) = \int_U \langle y,\, x\rangle^t\, d\mu_y, \quad \omega_t(x) = \|x\|^t.$$

Представим $A(x)$ в виде

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=t} \frac{t!}{\alpha!} M_\alpha x^\alpha,$$

где $M_\alpha = \int_U y^\alpha\, d\mu_y$. Вычислим скалярные произведения $[A,\, A]$ и $[A,\, \omega_t]$. Для этого заметим, что для любого полинома $f(x) = \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha x^\alpha$ справедливы равенства

$$[A,\, f] = \sum_{|\alpha|=t} \frac{\alpha!}{t!}\frac{t!}{\alpha!} M_\alpha a_\alpha = \int_U \sum_{|\alpha|=t} y^\alpha a_\alpha\, d\mu_y = \int_U f(y)\, d\mu_y.$$

Отсюда получаем

$$[A,\, A] = \int_U A(z)\, d\mu_z = \int_U \int_U \langle y,\, z\rangle^t\, d\mu_y\, d\mu_z,$$
$$[A,\, \omega_t] = \int_U \omega_t(y)\, d\mu_y = \int_U \|y\|^t\, d\mu_y.$$

Кроме того, $[\omega_t,\, \omega_t] = 1/c_t$ по лемме 2. Подставим скалярные произведения в (7) и умножим неравенство на c_t. Получим (2). □

Из доказательства следует условие, при котором неравенство (2) обращается в равенство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* $I_t = \int_U \|x\|^t \, d\mu_x$. *Неравенство* (2) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$\int_U \langle y, x\rangle^t \, d\mu_y \equiv c_t I_t \|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Доказательство. Допустим, что в (2) имеет место равенство. Тогда равенство будет и в неравенстве Коши-Шварца (7). Поэтому существует константа λ такая, что $A = \lambda\omega_t$. Умножим это равенство скалярно на ω_t. Получим соотношение $[A, \omega_t] = \lambda[\omega_t, \omega_t]$. При доказательстве теоремы 1 было отмечено, что $[A, \omega_t] = I_t$, $[\omega_t, \omega_t] = 1/c_t$. Отсюда следуют равенства $\lambda = c_t I_t$ и $A = c_t I_t \omega_t$. Последнее в развёрнутом виде представляет собой тождество (8).

Обратно, если выполнено (8), то $A = c_t I_t \omega_t$. Отсюда следует, что в (7) и (2) будут равенства. □

Отметим частный случай $U = S^{n-1}$ и μ — обычная мера Лебега на сфере, $\mu(S^{n-1}) = \sigma_n$. Тогда

$$I_t = \int_{S_{n-1}} \|x\|^t \, d\mu_x = \int_{S^{n-1}} d\mu_x = \sigma_n.$$

Теперь тождество (8) выполняется по лемме 1. Значит, при $U = S^{n-1}$ неравенство (2) обращается в равенство. Этот факт отмечен в [1]. Другой частный случай — дискретное множество U — рассматривается в пункте 2.

Вычисление константы c_t. Необходимо вычислить интеграл (3), но мы вычислим более общий интеграл, так как он будет использован в дальнейшем.

ЛЕММА 3. *Пусть в мультииндексе* $k = (k_1, \dots, k_n)$ *все* k_j *— чётные,* $|k| = t$. *Тогда*

$$I(k) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \, dS = \frac{(k_1-1)!! \cdots (k_n-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}. \tag{9}$$

Здесь $(-1)!! = 1$ *и при* $t = 2$ *множитель* $n+2$ *отсутствует.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл $V = \int_{\mathbb{R}^n} x^k e^{-\|x\|^2} \, dx$. Он распадается на произведение одномерных интегралов: $V = \Gamma(\frac{k_1+1}{2}) \cdots \Gamma(\frac{k_n+1}{2})$. А после перехода к сферическим координатам приходим к равенству $V = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{t+n}{2})\sigma_n I(k)$. Отсюда получаем выражение для $I(k)$, которое легко приводится к виду (9). □

Другой способ вывода формулы (9) можно найти в [8, 9]. Выражение для c_t получается из (9) как частный случай:

$$c_t = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x_1^t \, dS = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}. \tag{10}$$

2°. Дискретный вариант неравенства Сидельникова. Интересный вариант неравенства Сидельникова получается, когда U — конечное множество, $U = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\mu\big(\{x_i\}\big) = 1$, $i = 1, \dots, m$. Тогда по теореме 1 справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i, x_j\rangle^t \geqslant c_t\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^t\right)^2. \tag{11}$$

Напомним, что t — чётное число. В неравенстве (11) векторы $x_1, \dots, x_m$ не обязательно попарно различны, поэтому вместо множества U можно говорить о конечной последовательности.

Некоторые авторы, не зная работы [1], получали неравенство (11) самостоятельно. При $t = 2$ неравенство (11) доказывалось в [2], а при $t \geqslant 4$ — в [3]. При этом в [2, 3] исследовался вопрос, когда в (11) будет равенство.

Вопрос о достижении равенства нас интересует особо. Формулировки получатся более выразительными, если считать, что последовательность $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ лежит на сфере S^{n-1}. Из теоремы 1 и Предложения из пункта 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Для любой последовательности $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ точек сферы S^{n-1} справедливо неравенство*

$$\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m}\langle x_i,\, x_j\rangle^t \geqslant c_t. \tag{12}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle x_i,\, x\rangle^t \equiv c_t\|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Примем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность точек $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ на сфере S^{n-1} называется *сферическим полудизайном порядка* t, если выполнено тождество (13).

Теорема 2 утверждает, что неравенство (12) обращается в равенство на сферических полудизайнах и только на них.

Тождество (13) будем называть тождеством Варинга по имени английского математика Э. Варинга (1734-1798), который интересовался представлением формы $\|x\|^t$ в виде суммы линейных форм, возведённых в степень t. Многие математики 19-го века получали тождества Варинга при разных n, t, m. Коллекция таких тождеств приведена в [5, p. 103].

ПРИМЕР (E. Lucas, 1876)**.** Легко проверяется тождество

$$6\|\xi\|^4 = \sum_{i<j}(\xi_i \pm \xi_j)^4$$

для любого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_4)$ из $\mathbb{R}^4$. В нём $2\binom{4}{2} = 12$ слагаемых. Нетрудно выписать векторы $x_1, \dots, x_{12} \in S^3$, для которых выполнено (13) при $m = 12$, $n = 4$, $t = 4$. Эти 12 векторов образуют сферический полудизайн порядка 4.

Характеризация полудизайнов с помощью интегралов по сфере. Общепринятым является определение сферического дизайна порядка t как системы точек на сфере S^{n-1} такой, что для любого полинома степени не выше t среднее по сфере равно среднему по дизайну (см. [7]).

Аналогичная характеризация может быть дана для сферических полудизайнов.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть t чётное, $t \geqslant 2$. Для того, чтобы последовательность $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ точек сферы S^{n-1} была сферическим полудизайном порядка t, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Q(x_i) \tag{14}$$

для любого однородного полинома степени t.

Однородный полином степени t можно представить формулой $Q(x) = \sum_{|k|=t} a_k x^k$, где $k = (k_1, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ — полудизайн порядка t. Тогда выполнено тождество (13). Имеем

$$S(x) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \langle x_i,\, x\rangle^t = \sum_{|k|=t}\frac{t!}{k!}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i^k\right)x^k.$$

Положим $s = t/2$. Тогда правая часть (13) записывается в виде

$$R(x) := c_t\|x\|^t = c_t\sum_{|l|=s}\frac{s!}{l!}x^{2l}.$$

Поскольку $S(x) \equiv R(x)$, то коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$ и хоть одно k_j нечётно. Тогда

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i^k = 0. \tag{15}$$

Пусть все k_j чётные, $k_j = 2l_j$. Тогда $k = 2l$ и

$$\frac{t!}{k!}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^k\right) = c_t\frac{s!}{l!}. \tag{16}$$

Достаточно проверить равенство (14) для $Q(x) = x^k$, $|k| = t$. Если хоть одно k_j нечётно, то в силу (15) имеем

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} x^k\,dS = 0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^k.$$

Пусть теперь $k = 2l$, где $|l| = s$. Тогда по лемме 3

$$I(k) := \frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} x^k\,dS = \frac{(k_1-1)!!\cdots(k_n-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}.$$

В силу (16) в правой части (14) получаем сумму

$$T(k) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^k = \frac{k!}{t!}c_t\frac{s!}{l!} = \frac{k!}{t!}\frac{s!}{l!}\frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}.$$

Проведя совершенно элементарные выкладки, получим, что $I(k) = T(k)$. Значит, для $Q(x) = x^k$ выполняется (14).
Достаточность. Доказывается рассуждениями в “обратном порядке”. □

Из теорем 2 и 3 вытекает теорема, которую впервые доказали Гётальс, Зайдель [4]. Это частный случай неравенства Сидельникова, но впервые указаны условия достижения равенства.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой последовательности $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ точек сферы справедливо неравенство* (12). *Равенство достигается тогда и только тогда, когда выполнено условие* (14) *для любого однородного полинома $Q(x)$ степени t.*

Ввиду теоремы 3 опять приходим к выводу, что неравенство (12) обращается в равенство на сферических полудизайнах и только на них.

Дополнительные сведения о полудизайнах можно найти в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидельников В. М., *Новые оценки для плотнейшей упаковки шаров в n-мерном эвклидовом пространстве* // Матем. сб. 1974. Т. 95(135). № 1(9). С. 148–158.

2. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Wavelets, Frames and Operator Theory. Contemp. Math. V. 345. Providence, RI, 2004. P. 68–86.

3. Котелина Н. О., Певный А. Б. *Экстремальные свойства сферических полудизайнов*// Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 162–170.

4. Goethals J. M., Seidel J. J. *Spherical designs* // Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 1979. V. 34. P. 255–272.

5. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No. 463. 155 pp.

6. Venkov B. *Réseaux et designs sphériques*// Réseaux Euclidiens, Designs Sphériques et Formes Modulaires. Monogr. Enseign. Math. Genève. 2001. V. 37. P. 10–86.

7. Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J., *Spherical codes and designs* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. No. 3. P. 363–388.

8. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA&CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0515`)

9. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н. *Вычисление интеграла Гильберта-Сонина* // Семинар «DHA&CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0904`)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ, ГЕНЕРИРУЮЩИХ ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША

М. С. Беспалов

21 ноября 2013 г.

1°. В докладе В. Н. Малозёмова [1] приведены определения и основные свойства *дискретных функций Уолша в нумерации Адамара*. Они связаны с *матрицами Сильвестра-Адамара*

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{при } n = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Матрицы (1) введены Дж. Сильвестром [2], получили популярность как *матрицы дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара* и служат простым частным случаем матриц Адамара, о которых подробнее см. в книге [3].

Рекуррентную формулу (1) можно переписать через *кронекерово произведение* $H_n = H \otimes H_{n-1}$ или как *кронекерову степень* $H_n = H^{(n)}$, где $H = H_1$.

Таблично заданная дискретная функция представляет собой вектор своих значений. В докладе в качестве упорядоченного набора дискретных функций Уолша *уровня* n будем рассматривать набор вектор-столбцов матрицы H_n.

Решается задача — для любого n построить оператор C_n, орбитой которого служит данный упорядоченный набор.

2°. Данная задача появилась в результате ознакомления с рядом публикаций докладов семинара [4, 5, 6, 7, 8], в которых говорится о циклическом свойстве фреймов. Как вытекает из доклада [9], матрица конечного фрейма получается из невырожденной матрицы удалением строк. Удалённые строки составляют матрицу дополнительного фрейма. Поэтому изучение циклических свойств фреймов сводится к изучению аналогичных свойств столбцов невырожденной матрицы.

Общая задача — для произвольной невырожденной матрицы A построить *циклический оператор* C, орбитой которого служит упорядоченный набор столбцов матрицы A. Если $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ есть упорядоченный набор столбцов

матрицы A, то

$$Cf_{j-1} = f_j \quad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N-1\,, \quad Cf_{N-1} = f_0. \tag{2}$$

В простейшем случае единичной матрицы E в качестве A матрицей данного циклического оператора с орбитой в виде *стандартного базиса* служит перестановочная матрица с единицами на диагонали под главной и в правом верхнем углу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Если единицу в правом верхнем углу считать тоже диагональю параллельной главной, то последовательные степени матрицы P получаются смещением этих двух диагоналей параллельно главной вниз и влево.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любой невырожденной матрицы A циклический оператор для её столбцов имеет вид, выраженный через матрицу* (3)

$$C = A \cdot P \cdot A^{-1}. \tag{4}$$

Для степеней этого оператора справедлива формула

$$C^k = A \cdot P^k \cdot A^{-1}.$$

Доказательство. Как отмечено в [10], перемещение начального столбца матрицы A в конец записывается в виде умножения на перестановочную матрицу (3) справа: AP. Поэтому действие оператора C на столбцы матрицы A по правилу (2) в матричном виде запишем $C \cdot A = A \cdot P$, что эквивалентно (4). Из этого соотношения выводится формула для степеней C^k. □

3°. В докладе [1] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Нормированная матрица Адамара-Сильвестра $\frac{1}{\sqrt{N}} H_n$ ортогональна. А именно (при $N = 2^n$):*

$$(H_n)^2 = N \cdot E.$$

Столбцы h_j симметричной матрицы H_n ортогональны. А именно, (здесь скалярное произведение столбцов записано в матричном виде)

$$h_j^T \cdot h_k = N \cdot \delta_{jk}, \quad \text{где } \delta_{jk} \text{ — символ Кронекера.}$$

Набор столбцов $\{h_j\}_{j=0}^{N-1}$ матрицы H_n составляет ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^N$.

По формуле (1) легко получаем представление начального столбца h_0 и конечной строки h_{N-1}^T матрицы H_n в виде кронекеровой степени:

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{(n)}, \qquad h_{N-1}^T = (1,\, -1)^{(n)}. \tag{5}$$

ЛЕММА 1. *Оператор с матрицей*

$$A_n = \frac{1}{N} \cdot h_0 \cdot h_{N-1}^T = \frac{1}{2^n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{(n)} \cdot (1,\, -1)^{(n)} = A_1^{(n)}, \quad \text{где } A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

действует по правилу

$$A_n \cdot h_j = 0 \ \text{ при } \ j \in 0 : N-2, \qquad A_n \cdot h_{N-1} = h_0.$$

Доказательство. По предложению 2 и ассоциативности умножения матриц имеем

$$A_n \cdot h_j = \frac{1}{N} \cdot h_0 \cdot h_{N-1}^T \cdot h_j = h_0 \cdot \delta_{N-1\,j}. \qquad \square$$

4°. Легко проверить, что

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

есть матрица циклического оператора для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра H_1. Орбитой оператора C_1 служат столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ТЕОРЕМА 1. *Если C_n есть матрица циклического оператора для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра H_n, то циклический оператор для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра H_{n+1} имеет вид блочной матрицы*

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $B_n = C_n - 2A_n$ и матрицы справа вычислены по формулам (6), (7) *и* (8).

Доказательство. Если формально обозначим $C_0 = -B_0 = (1)$, то формула (7) составляет базу индукции.

Обозначим f_j столбцы матрицы H_n. Тогда столбцы h_j матрицы H_{n+1} выражаются через них согласно (1):

$$h_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes f_j, \quad h_{j+2^n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes f_j, \quad j \in 0 : 2^n - 1.$$

По индукционному предположению и лемме 1 при $j \in 0 : 2^n - 2$ имеем

$$B_n \cdot f_j = C_n \cdot f_j - 2A_n \cdot f_j = C_n \cdot f_j - 0 = f_{j+1},$$
$$C_{n+1} \cdot h_j = \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_j \\ f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n \cdot f_j \\ B_n \cdot f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{j+1} \\ f_{j+1} \end{pmatrix} = h_{j+1},$$
$$C_{n+1} \cdot h_{j+2^n} = \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_j \\ -f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes f_{j+1} = h_{j+2^n+1}.$$

А для последнего столбца матрицы H_n применение леммы 1 даёт

$$B_n \cdot f_{2^n-1} = C_n \cdot f_{2^n-1} - 2A_n \cdot f_{2^n-1} = f_0 - 2f_0.$$

Поэтому

$$C_{n+1} \cdot h_{2^n-1} = \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{2^n-1} \\ f_{2^n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ -f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes f_0 = h_{2^n},$$

$$C_{n+1} \cdot h_{2^{n+1}-1} = \begin{pmatrix} C_n \cdot f_{2^n-1} \\ -B_n \cdot f_{2^n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = h_0. \qquad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Циклический оператор для столбцов матрицы H_n имеет вид блочно-диагональной матрицы*

$$C_n = \operatorname{diag}(C_0, B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}). \tag{9}$$

Приведём вид первых блоков: $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5°. Предложим алгоритм быстрого вычисления степеней матрицы циклического оператора C_n.

ЛЕММА 2. *Если обозначим P_n матрицу вида* (3) *порядка 2^n, то*

$$(P_n)^2 = P_{n-1} \otimes E, \quad (P_n)^{2s} = P_{n-1}^s \otimes E, \quad (P_n)^{2^k} = P_{n-k} \otimes E^{(k)}, \quad k \in 1 : n-1,$$

где E — единичная матрица второго порядка.

Доказательство. Матрицу

$$(P_n)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

разобьём на квадратные блоки порядка 2 и получим

$$(P_n)^2 = P_{n-1} \otimes E. \tag{10}$$

Формула $(P_n)^{2s} = P_{n-1}^s \otimes E$ для произвольной чётной степени доказывается аналогично, ориентируясь на внешний вид полученной перестановочной матрицы.

Общий порядок вывода следующей формулы продемонстрируем для простейшего случая, который можно было бы получить по предыдущей формуле. По формуле (10) имеем

$$(P_n^2)^2 = (P_{n-1} \otimes E) \cdot (P_{n-1} \otimes E).$$

Применим известное свойство [11] кронекерова произведения (для матриц, допускающих, по размерам, соответствующие произведения)

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D) \tag{11}$$

и получим выражение, к которому снова применим (10):

$$P_n^{2^2} = P_{n-1}^2 \otimes E^2 = P_{n-2} \otimes E \otimes E = P_{n-2} \otimes E^{(2)}.$$

Аналогично совершаем индукционный переход:

$$(P_n^{2^{k-1}})^2 = (P_{n-k+1} \otimes E^{(k-1)})^2 = (P_{n-k} \otimes E) \otimes (E^{(k-1)})^2 = P_{n-k} \otimes E^{(k)}. \qquad \square$$

Отметим, что формула (4) предложения 1 в случае циклического оператора для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра приобретает вид

$$C_n = \frac{1}{2^n} H_n \cdot P_n \cdot H_n. \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 2. *Чётная степень матрицы* (8) *или* (12) *выражается через меньшую степень этой матрицы предыдущего уровня рекуррентной формулой*

$$(C_n)^{2k} = (C_{n-1})^k \otimes E, \tag{13}$$

где E — единичная матрица второго порядка.

Доказательство. Применим предложение 1 к (12):

$$(C_n)^k = \frac{1}{2^n} H_n \cdot (P_n)^k \cdot H_n. \tag{14}$$

В случае чётной степени применим к выражению 14 лемму 2, формулу (11) и снова (14). Получим

$$\begin{aligned} 2^n \cdot (C_n)^{2k} &= H_n \cdot (P_n)^{2k} \cdot H_n = (H_{n-1} \otimes H) \cdot ((P_{n-1})^k \otimes E) \cdot (H_{n-1} \otimes H) = \\ &= (H_{n-1} \cdot (P_{n-1})^k \cdot H_{n-1}) \otimes (H \cdot E \cdot H) = 2^{n-1} \cdot (C_{n-1})^k \otimes (2 \cdot E). \end{aligned}$$

Остаётся сократить на числовой множитель 2^n. □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если возводим в степень двойки, то*

$$(C_n)^{2^s} = C_{n-s} \otimes E^{(s)} \qquad (s \leqslant n),$$

в частности, $(C_n)^{2^{n-1}} = C_1 \otimes E^{(n-1)}$, $(C_n)^{2^n} = E^{(n)}$. *Относительно блочно-диагонального вида* (9) *получим*

$$(C_n)^2 = \operatorname{diag}(E, B_0 \otimes E, B_1 \otimes E, \ldots, B_{n-2} \otimes E),$$

при этом $(B_k)^2 = B_{k-1} \otimes E$, $(B_k)^{2^{k+1}} = E^{(k)}$.

Это следствие рассматриваем как быстрый алгоритм вычисления степени матрицы C_n (или B_n). Для этого раскладываем показатель степени в двоичной системе счисления и перемножаем матрицы соответствующих степеней двойки, которые имеют более простой вид.

6°. Продолжим изучение свойств циклического оператора C_n. *Характеристическим многочленом* для матрицы B называется [11] определитель матрицы $xE - B$. *След матрицы* равен сумме диагональных элементов.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого натурального* n *след матриц* B_n *и* C_n *равен* 0, *а для определителей справедливы формулы*

$$|B_n| = 1, \quad |C_n| = -1;$$

характеристические многочлены матриц равны ($N = 2^n$):

$$x^N + 1 \quad \text{для матрицы } B_n, \quad x^N - 1 \quad \text{для матрицы } C_n.$$

Существует унитарная матрица U_n *такая, что (здесь* $\omega = e^{\frac{\pi i}{N}}$, $N = 2^n$*)*

$$B_n = U_n^* \cdot D_n \cdot U_n, \quad \text{где } D_n = \operatorname{diag}(\omega^1, \omega^3, \omega^5, \ldots, \omega^{2N-1}).$$

Кроме того, существует унитарная матрица U, имеющая следующий блочно-диагональный вид $U = \mathrm{diag}(E, U_1, \ldots, U_{n-1})$, такая, что

$$C_n = U^* \cdot D_n \cdot U,$$

где

$$D_n = \mathrm{diag}(1, \omega^N, \omega^{N/2}, \omega^{3N/2}, \omega^{N/4}, \omega^{3N/4}, \omega^{5N/4}, \omega^{7N/4}, \ldots, \omega^2, \omega^6, \omega^{10}, \ldots, \omega^{2N-2}),$$

то есть на диагонали стоят значения $1, \omega^2, \omega^4, \omega^6, \ldots, \omega^{2N-2}$ в соответствующем порядке.

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{Tr}\, C_1 = 0$, $\mathrm{Tr}\, B_1 = 0$, $\mathrm{Tr}\, A_1 = 0$. Отсюда для кронекеровой степени $\mathrm{Tr}\, A_n = 0$. Если $\mathrm{Tr}\, C_{n-1} = 0$, $\mathrm{Tr}\, B_{n-1} = 0$, то по формуле (8) и $\mathrm{Tr}\, C_n = 0$, а далее $\mathrm{Tr}\, B_n = 0$.

Рассмотрим мономиальную матрицу M, которая получается из матрицы P вида (3) заменой единицы, стоящей в правом верхнем углу, на -1. Класс *мономиальных матриц* включает в себя класс перестановочных матриц. По определению [3] любая мономиальная матрица получается из перестановочной заменой какого-то количества элементов, равных 1, на -1. По той же схеме, как была получена формула (12), получаем выражение для матрицы B_n:

$$B_n = \frac{1}{2^n} H_n \cdot M \cdot H_n.$$

Очевидно, что как определитель, так и характеристический многочлен матриц P вида (3) и M, равны соответственно $|P| = -1$, $|M| = 1$, $x^N - 1$ и $x^N + 1$.

В [11] отмечено, что при преобразовании (4) с унитарной матрицей A определитель и характеристический многочлен не меняются. Поэтому $|C_n| = -1$, $|B_n| = 1$ и характеристические многочлены имеют вид $x^N - 1$ для C_n и $x^N + 1$ для B_n.

Характеристические многочлены в поле комплексных чисел раскладываются на произведение одночленов, откуда и вычисляем собственные числа преобразований. По общему правилу диагонализации оператора получаем диагональную форму операторов C_n и B_n, включающую некую унитарную матрицу. Вид унитарной матрицы для C_n уточняется, исходя из блочно-диагонального структуры C_n. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312`)

2. Sylvester J.J. Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous simgsuccessions, and tessalated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers // Phil. Mag. 1867. V. 34. P. 461–475.

3. Холл М. *Комбинаторика.* М.: Мир, 1970.

4. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0121`)

5. Малозёмов В. Н., Соловьева Н. А. *Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 сентября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0912`)

6. Истомина М. Н., Певный А. Б. *Система Мерседес-Бенц как орбита циклических групп* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 декабря 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#1212`)

7. Дурягин А. М., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Циклическое свойство вещественных гармонических фреймов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 13 февраля 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0213`)

8. Юркина М. Н. *Циклические фреймы Парсеваля* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 20 октября 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#1020`)

9. Истомина М. Н., Максименко В. В., Певный А. Б. *Дополнительные жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0401`)

10. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная форма.* СПб.: Изд-во С.-Петрерб. ун-та, 1997.

11. Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* М.: Наука, 1972.

Список участников семинара

- Агафонова Ирина Витальевна (кандидат физ.-мат. наук, доцент)
  ivagafonovaspb@gmail.com
- Афонин Роман Евгеньевич (студент)
  snedekorr@gmail.com
- Беспалов Михаил Сергеевич (доктор физ.-мат. наук, профессор)
  bespalov@vlsu.ru
- Виденский Виктор Соломонович (доктор физ.-мат. наук, профессор)
  ilya.viden@gmail.com
- Габр Мохамед Валид Салх Отман (кандидат физ.-мат. наук)
  mwaleed73@yahoo.com
- Демьянович Юрий Казимирович (доктор физ.-мат. наук, профессор)
  Yuri.Demjanovich@JD16531.spb.edu
- Дурягин Александр Максимович (аспирант)
  duriagin@syktsu.ru
- Котелина Надежда Олеговна (кандидат физ.-мат. наук)
  nad7175@yandex.ru
- Крепкий Илья Александрович (аспирант)
  feb418@gmail.com
- Макаров Антон Александрович (доктор физ.-мат. наук)
  Antony.Makarov@gmail.com
- Максименко Владимир Валерьевич (аспирант)
  xupypr@xupypr.com
- Малозёмов Василий Николаевич (доктор физ.-мат. наук, профессор)
  malv@math.spbu.ru
- Машарский Сергей Михайлович (кандидат физ.-мат. наук, доцент)
  smash@scientist.com
- Певный Александр Борисович (доктор физ.-мат. наук, профессор)
  pevnyi@syktsu.ru
- Петухова Янина Викторовна (студентка)
  ya.petukhova@mail.ru
- Сабаев Анатолий Николаевич (аспирант)

- Соловьёва Наталья Анатольевна (кандидат физ.-мат. наук)
  vinyo@mail.ru
- Стояноска Ирена Славьевна (магистр)
  irena.stoyanoska@gmail.com
- Чашников Николай Викторович (кандидат физ.-мат. наук)
  nikolay.chashnikov@gmail.com
- Юркина (Истомина) Марина Николаевна (аспирантка)
  istomina@syktsu.ru