# ЗАЦИКЛИВАНИЕ В СИМПЛЕКС-МЕТОДЕ: МИНИМАЛЬНАЯ ДЛИНА ЦИКЛА РАВНА ШЕСТИ*


И. В. Агафонова

ivagafonovaspb@gmail.com


26 октября 2012 г.

Рассматривается задача линейного программирования в канонической форме:

$$\begin{gathered} f(x) := c[N] \times x[N] \to \min_{x \in \Omega}, \\ \Omega = \{x[N] \mid A[M,N] \times x[N] = b[M],\ x[N] \geqslant \mathbb{O}\}, \\ M = \{1,2,\ldots,m\}, \quad N = \{1,2,\ldots,n\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Элементы векторов $c[N]$ и $b[M]$ и матрицы $A[M,N]$ — произвольные вещественные числа, $\operatorname{rank} A = n$.

Симплекс-метод, решая задачу (1), строит последовательность базисов, каждый из которых однозначно определяет базисный план. Если в этой последовательности на очередной итерации появляется базис, уже в ней встречавшийся, мы говорим, что произошло *зацикливание*. В этом случае на промежуточных итерациях базисный план и целевая функция не менялись, и эта группа базисов может повторяться снова и снова.

В 60-х годах прошлого века Д. Б. Юдин и Е. Г. Гольштейн [1] показали, что если в ходе работы симплекс-метода образовался цикл из $L$ различных базисов, то $L \geqslant 6$. В докладе представлена цепочка последовательно доказываемых утверждений, уточняющих строение цикла и приводящих к доказательству этого неравенства.

**1**°. По каждому базису $P$ можно вычислить *обратную базисную матрицу* $B[P,M] = (A[M,P])^{-1}$ и матрицу

$$\Lambda^P[P,N] = B[P,M] \times A[M,N],$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

которую будем кратко называть *основной матрицей* (она составляет основу симплекс-таблицы в простейшем варианте прямого симплекс-метода). Строки матрицы $\Lambda^P[P,N]$ соответствуют базисным индексам, а столбцы состоят из коэффициентов разложения столбцов матрицы $A$ по её базисным столбцам $A[M,j]$, $j \in P$.

Оценки переменных относительно базиса $P$ вычисляются по формуле

$$\Delta^P[N] = c[P] \times \Lambda^P[P,N] - c[N].$$

Отметим, что

$$\Lambda^P[P,P] = E[P,P] \text{ (единичная матрица)} \tag{2}$$

и что

$$\Delta^P[P] = \mathbb{O}[P]. \tag{3}$$

Пусть два базиса $P$ и $Q$ задачи (1) отличаются только одним индексом: $P \setminus Q = \{p\}$, $Q \setminus P = \{q\}$. Используя для базиса $Q$ обозначения $\Lambda^Q$, $\Delta^Q$, аналогичные введённым выше для $P$, выпишем известные *формулы пересчёта* основной матрицы и оценок:

$$\Lambda^Q[q,N] = \frac{\Lambda^P[p,N]}{\Lambda^P[p,q]}, \tag{4}$$

$$\Lambda^Q[j,N] = \Lambda^P[j,N] - \Lambda^P[j,q]\,\frac{\Lambda^P[p,N]}{\Lambda^P[p,q]} \quad \text{при } j \in P \cap Q, \tag{5}$$

$$\Delta^Q[N] = \Delta^P[N] - \Delta^P[q]\,\frac{\Lambda^P[p,N]}{\Lambda^P[p,q]}. \tag{6}$$

С учётом (4) две последние формулы перепишутся в виде

$$\Lambda^Q[j,N] = \Lambda^P[j,N] - \Lambda^P[j,q]\,\Lambda^Q[q,N] \quad \text{при } j \in P \cap Q, \tag{7}$$

$$\Delta^Q[N] = \Delta^P[N] - \Delta^P[q]\,\Lambda^Q[q,N]. \tag{8}$$

Из (2), (3), (6) получается полезная формула

$$\Delta^Q[p] = -\frac{\Delta^P[q]}{\Lambda^P[p,q]}. \tag{9}$$

Подчеркнём, что формулы пересчёта (4)–(9) верны для двух базисов, отличающихся одним индексом, вне связи с симплекс-алгоритмом. Будем использовать также формулу пересчёта оценки для двух базисов, отличающихся двумя индексами, $Q \setminus P = \{i_1, i_2\}$:

$$\Delta^Q[N] = \Delta^P[N] - \Delta^P[i_1]\,\Lambda^Q[i_1,N] - \Delta^P[i_2]\,\Lambda^Q[i_2,N], \tag{10}$$

которая доказывается двукратным применением формулы (8) с учётом (7) и является частным случаем формулы пересчёта оценки для базисов с несколькими несовпадающими индексами.

**2°**. Пусть теперь $\Gamma^i$ и $\Gamma^{i+1}$ — два последовательных базиса в симплекс-методе, $\Lambda^i$ и $\Delta^i$ — основная матрица и вектор оценок, соответствующие базису $\Gamma^i$. В этом базисе выделим два индекса:

$$\begin{aligned} &p_i \in \Gamma^i \text{ — индекс, который должен покинуть } \Gamma^i;\\ &q_i \in \Gamma^i \text{ — индекс, только что вошедший в } \Gamma^i. \end{aligned} \tag{11}$$

Для $\Gamma^{i+1}$ будем использовать аналогичные обозначения.

Из условий перехода от $\Gamma^i$ к $\Gamma^{i+1}$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} \Delta^i[q_{i+1}] > 0,\\ \Lambda^i[p_i, q_{i+1}] > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (2), (4) следует, что

$$\Lambda^{i+1}[q_{i+1}, p_i] = \frac{\Lambda^i[p_i, p_i]}{\Lambda^i[p_i, q_{i+1}]} = \frac{1}{\Lambda^i[p_i, q_{i+1}]},$$

и, согласно (12),

$$\Lambda^{i+1}[q_{i+1}, p_i] > 0. \tag{13}$$

Взяв индекс $j \in \Gamma^i \cap \Gamma^{i+1}$, запишем (5) при $P = \Gamma^i$, $Q = \Gamma^{i+1}$:

$$\Lambda^{i+1}[j, p_i] = -\frac{\Lambda^i[j, q_{i+1}]}{\Lambda^i[p_i, q_{i+1}]}.$$

(Здесь мы учли, что, в соответствии с (2), $\Lambda^i[j, p_i] = 0$).

Из последнего равенства и из (12) имеем

$$\operatorname{sign}(\Lambda^{i+1}[j, p_i]) = -\operatorname{sign}(\Lambda^i[j, q_{i+1}]),\ j \in \Gamma^i \cap \Gamma^{i+1}. \tag{14}$$

Отметим ещё, что из (4), (12), (13) следует, что

$$\operatorname{sign}(\Lambda^i[p_i, k]) = \operatorname{sign}(\Lambda^{i+1}[q_{i+1}, k]), \quad k \in N. \tag{15}$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** *При переходе от $\Gamma^i$ к $\Gamma^{i+1}$ по симплекс-алгоритму всегда*

$$\Delta^{i+1}[p_i] < 0, \tag{16}$$

*так что индекс $p_i$, покинувший базис $\Gamma^i$, на следующей итерации не может вернуться в базис.*

Доказательство. Используя формулы (12) и (9), получаем (16). □

**3°**. Явление зацикливания представляет собой повторение ранее встречавшегося базиса через несколько итераций симплекс-метода. Если при выборе включаемых и исключаемых индексов нет элемента случайности, то после этого итерации будут повторяться снова и снова.

Число различных базисов, образующих цикл в симплекс-методе, то есть период, с которым повторяются итерации метода, назовём *длиной цикла*. Среди индексов, входящих хотя бы в один базис цикла, выделим *неподвижные индексы*, входящие во все базисы цикла, и *подвижные*, которые входят не во все базисы цикла.

При зацикливании на всех итерациях цикла повторяется один и тот же базисный план, обозначим его просто $x[N]$. Отметим, что если $j$ — подвижный индекс в данном цикле, то в каком-то базисе цикла он небазисный, так что $x[j] = 0$.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** *Цикл не может иметь длину меньше* 3.

Это прямое следствие утверждения 1.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** *Если в цикле длины $L$ имеются три последовательных базиса, отличающиеся только одним индексом, то есть имеющие вид $\Gamma^0 = G \cup \{p_0\}$, $\Gamma^1 = G \cup \{p_1\}$, $\Gamma^2 = G \cup \{p_2\}$, где $G$ — множество индексов, общих для трёх базисов, то существует и цикл длины $L-1$, построенный из данного исключением базиса $\Gamma^1$.*

Доказательство. Покажем, что можно по симплекс-алгоритму переходить от $\Gamma^0$ сразу к $\Gamma^2$.

По формуле (8), применённой для $p_0$ при $P = \Gamma^2$, $Q = \Gamma^1$, $Q \setminus P = \{p_1\}$, получаем $\Delta^1[p_0] = \Delta^2[p_0] - \Delta^2[p_1]\,\Lambda^1[p_1, p_0]$, то есть

$$\Delta^2[p_0] = \Delta^1[p_0] + \Delta^2[p_1]\,\Lambda^1[p_1, p_0].$$

По (16), $\Delta^1[p_0] < 0$, $\Delta^2[p_1] < 0$. Учитывая (13), получаем $\Delta^2[p_0] < 0$. Отметив, что $\Gamma^2$ отличается от $\Gamma^0$ только одной позицией, применим (8) для $p_0$ при $P = \Gamma^0$, $Q = \Gamma^2$, $Q \setminus P = \{p_2\}$. Так как $\Delta^0[p_0] = 0$, то придём к равенству

$$\Delta^2[p_0] = -\Delta^0[p_2]\,\Lambda^2[p_2, p_0].$$

В силу (15) имеем

$$\operatorname{sign}(\Lambda^0[p_0, k]) = \operatorname{sign}(\Lambda^1[p_1, k]) = \operatorname{sign}(\Lambda^2[p_2, k]), \quad k \in N, \tag{17}$$

откуда $\operatorname{sign}(\Lambda^2[p_2, p_0]) = \operatorname{sign}(\Lambda^0[p_0, p_0]) = 1$. Следовательно, знаки $\Delta^2[p_0]$ и $\Delta^0[p_2]$ противоположны, так что $\Delta^0[p_2] > 0$. Итак, индекс $p_2$ подходит на итерации 0 для ввода в базис симплекс-алгоритмом. При этом индекс $p_0 \in \Gamma^0$

может быть взят для вывода из базиса, так как при $k = p_0$ достигается минимум

$$\min_{\substack{k\in\Gamma^0,\\ \Lambda^0[k,p_2]>0}} \frac{x[k]}{\Lambda^0[k,p_2]}.$$

Действительно, по (17), $\mathrm{sign}(\Lambda^0[p_0,p_2]) = \mathrm{sign}(\Lambda^2[p_2,p_2]) = 1$, и при этом величина $x[p_0]$ равна 0, как и всякая компонента плана, соответствующая подвижному индексу. Утверждение доказано. $\square$

Для краткости назовём индекс $p$, который, войдя в базис $P$, покидает его на следующей итерации, *краткоживущим* в базисе $P$, а цикл, содержащий хоть один краткоживущий индекс, *избыточным.* Утверждение 3 позволяет по каждому избыточному циклу построить цикл меньшей длины.

Примем циклическую нумерацию итераций симплекс метода и соответствующих им базисов, образовавших цикл длины $L$. Можно начать с произвольной итерации цикла, присвоив ей номер 0, базис обозначить $\Gamma^0$ и оперировать с номерами итераций и базисов по модулю $L$, используя для вычета $i$ по модулю $L$ обозначение $\langle i\rangle_L$.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.** *В неизбыточном цикле длины $L$ базис $\Gamma^i$ содержит индексы $p_i$, $p_{\langle i+1\rangle_L}$ и не содержит $p_{\langle i-1\rangle_L}$, $i \in 0 : L-1$. Эти три индекса попарно различны.*

Доказательство. Напомним, что $L \geqslant 3$ по утверждению 2. Для индексов $p_i$, $p_{\langle i-1\rangle_L}$ утверждение верно в силу обозначений (11), и по этим же обозначениям $p_{\langle i+1\rangle_L} \in \Gamma^{\langle i+1\rangle_L}$, $p_{\langle i+1\rangle_L} \notin \Gamma^{\langle i+2\rangle_L}$. В силу неизбыточности цикла индекс $p_{\langle i+1\rangle_L}$ принадлежит $\Gamma^i$, иначе он был бы краткоживущим в базисе $\Gamma^{\langle i+1\rangle_L}$. При этом выполнены условия:

- $p_i \neq p_{\langle i+1\rangle_L}$, так как $p_{\langle i+1\rangle_L}$ входит в $\Gamma^{\langle i+1\rangle_L}$, а $p_i$ — нет;
- $p_i \neq p_{\langle i-1\rangle_L}$, так как $p_{\langle i-1\rangle_L}$ не входит в $\Gamma^i$.
- $p_{\langle i+1\rangle_L} \neq p_{\langle i-1\rangle_L}$, так как это противоречит утверждению 1. $\square$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 5.** *Цикл не может иметь длину меньше 4.*

Доказательство. Предположим, что существует цикл длины 3. Он неизбыточен, иначе по утверждению 3 должен был бы существовать цикл длины 2, что невозможно. Тогда имеем в цикле три различных базиса $\Gamma^0$, $\Gamma^1$, $\Gamma^2$. По утверждению 4, $p_0 \in \Gamma^0$, $p_0 \notin \Gamma^1$, $p_0 \in \Gamma^2$, что противоречит утверждению 1. $\square$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 6.** *В неизбыточном цикле длины $L$ базис $\Gamma^i$ содержит индексы $p_i$, $p_{\langle i+1\rangle_L}$ и не содержит $p_{\langle i-1\rangle_L}$, $p_{\langle i-2\rangle_L}$, $i \in 0 : L-1$. Эти четыре индекса попарно различны.*

Доказательство. Заметим, что $L \geqslant 4$ по утверждению 5. Для индексов $p_i$, $p_{\langle i+1\rangle_L}$, $p_{\langle i-1\rangle_L}$ утверждение верно в силу утверждения 4. Кроме того, $p_{\langle i-2\rangle_L} \notin \Gamma^i$, иначе соотношения $p_{\langle i-2\rangle_L} \in \Gamma^{\langle i-2\rangle_L}$, $p_{\langle i-2\rangle_L} \notin \Gamma^{\langle i-1\rangle_L}$, $p_{\langle i-2\rangle_L} \in \Gamma^i$ противоречили бы утверждению 1.

При этом $p_i \neq p_{\langle i-1\rangle_L}$ и $p_i \neq p_{\langle i+1\rangle_L}$ в силу утверждения 4 и выполняются условия:

- $p_i \neq p_{\langle i-2\rangle_L}$, так как $p_{\langle i-2\rangle_L}$ не входит в $\Gamma^i$, а $p_i$ входит;
- $p_{\langle i-2\rangle_L} \neq p_{\langle i-1\rangle_L}$, так как $p_{\langle i-2\rangle_L}$ не входит в $\Gamma^{\langle i-1\rangle_L}$, а $p_{\langle i-1\rangle_L}$ входит;
- $p_{\langle i-2\rangle_L} \neq p_{\langle i+1\rangle_L}$, так как иначе, вопреки утверждению 1, имели бы место соотношения $p_{\langle i+1\rangle_L} \in \Gamma^{\langle i-2\rangle_L}$, $p_{\langle i+1\rangle_L} \notin \Gamma^{\langle i-1\rangle_L}$, $p_{\langle i+1\rangle_L} \in \Gamma^i$. $\square$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 7.** *В неизбыточном цикле длины $L \leqslant 7$ все индексы $p_i$, $i \in 0 : L-1$, попарно различны.*

Доказательство. По утверждению 6 четыре подряд идущих индекса попарно различны, так что при любом $i \in 0 : L-1$ индекс $p_i$ не совпадает ни с одним из $p_{\langle i+1\rangle_L}$, $p_{\langle i+2\rangle_L}$, $p_{\langle i+3\rangle_L}$, а также ни с одним из $p_{\langle i-1\rangle_L}$, $p_{\langle i-2\rangle_L}$, $p_{\langle i-3\rangle_L}$, что исчерпывает при $L \leqslant 7$ весь набор подвижных индексов. $\square$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 8.** *Цикл не может иметь длину меньше 4.*

Доказательство. Предположим, что существует цикл длины $L = 4$. Он неизбыточен, иначе по утверждению 3 должен был бы существовать цикл длины 3.

Имеем четыре различных базиса $\Gamma^i$, $i \in 0 : 3$, и четыре различных подвижных индекса, которые в соответствии с утверждением 6 распределены по базисам так, как указано в таблице 1:

Таблица 1

| | $\Gamma^0$ | $\Gamma^1$ | $\Gamma^2$ | $\Gamma^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ |
| $p_1$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $p_2$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $p_3$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ |

, знаки оценок

| | $\Delta^0$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | 0 | $-$ | $+$ | 0 |
| $p_1$ | 0 | 0 | $-$ | $+$ |
| $p_2$ | $+$ | 0 | 0 | $-$ |
| $p_3$ | $-$ | $+$ | 0 | 0 |

.

Все знаки оценок $\Delta^i[p_j]$ здесь точно известны и определяются симплекс-алгоритмом и неравенством (16).

Применим (10) для $P = \Gamma^2$, $Q = \Gamma^0$, $Q \setminus P = \{p_0, p_1\}$:

$$\Delta^0[p_3] = \Delta^2[p_3] - \Delta^2[p_0]\,\Lambda^0[p_0, p_3] - \Delta^2[p_1]\,\Lambda^0[p_1, p_3]. \tag{18}$$

Покажем, что $\Lambda^0[p_0, p_3] < 0$, $\Lambda^0[p_1, p_3] > 0$. Для этого

1) применим (8) для $P = \Gamma^1$, $Q = \Gamma^0$, $Q \setminus P = \{p_0\}$:

$$\Delta^0[p_3] = \Delta^1[p_3] - \Delta^1[p_0]\,\Lambda^0[p_0, p_3].$$

Отсюда $\Delta^1[p_0]\,\Lambda^0[p_0, p_3] = \Delta^1[p_3] - \Delta^0[p_3]$, и из знаков оценок, приведённых в таблице 1, получаем $\Lambda^0[p_0, p_3] < 0$;

2) применим (8) для $P = \Gamma^3$, $Q = \Gamma^0$, $Q \setminus P = \{p_1\}$:

$$\Delta^0[p_3] = \Delta^3[p_3] - \Delta^3[p_1]\,\Lambda^0[p_1, p_3].$$

Отсюда $\Delta^3[p_1]\,\Lambda^0[p_1, p_3] = \Delta^3[p_3] - \Delta^0[p_3]$, и из знаков оценок получаем $\Lambda^0[p_1, p_3] > 0$.

Из доказанных неравенств и данных таблицы 1 вытекает, что в левой части равенства (18) стоит отрицательная, а в правой — положительная величина. Противоречие доказывает, что цикла длины 4 быть не может. $\square$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 9.** *Цикл не может иметь длину меньше* 6.

Доказательство. Предположим, что существует цикл длины $L = 5$. Он неизбыточен, иначе по утверждению 3 должен был бы существовать цикл длины 4.

Тогда подвижные индексы $p_j$, $j \in 0:4$, в соответствии с утверждением 6 распределены по базисам $\Gamma^i$ так, как указано в таблице 2.

Таблица 2

| | $\Gamma^0$ | $\Gamma^1$ | $\Gamma^2$ | $\Gamma^3$ | $\Gamma^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | | $\in$ |
| $p_1$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | |
| $p_2$ | | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $p_3$ | $\notin$ | | $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $p_4$ | $\notin$ | $\notin$ | | $\in$ | $\in$ |

.

Пустая ячейка таблицы означает, что у нас недостаточно информации, чтобы определить принадлежность индекса базису. Но поскольку размер базиса и, соответственно, число подвижных индексов, принадлежащих базису на той или другой итерации, есть величина постоянная, пустые клетки все базисные либо все небазисные. Нам нужно будет рассмотреть оба случая: цикл A, где $p_i \in \Gamma^{\langle i-2\rangle_5}$, $i \in 0:4$, и цикл B, где $p_i \notin \Gamma^{\langle i-2\rangle_5}$, $i \in 0:4$.

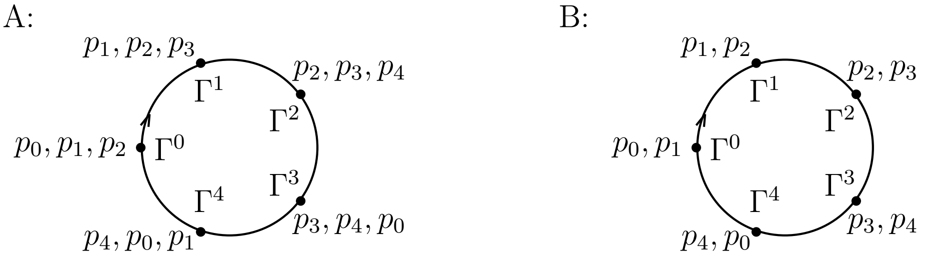


Рис. 1. Предполагаемые циклы длины 5

Покажем, что ни цикл A, ни цикл B не может порождаться симплекс-методом.

**Невозможность цикла A.**

В случае A имеем $q_{\langle i+1\rangle_5} = p_{\langle i+3\rangle_5}$ (см. обозначения (11)), и в силу (3), (12), (16) нам известны знаки всех оценок. Они приведены в таблице 3.

Таблица 3

| | $\Delta^0$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | 0 | $-$ | $+$ | 0 | 0 |
| $p_1$ | 0 | 0 | $-$ | $+$ | 0 |
| $p_2$ | 0 | 0 | 0 | $-$ | $+$ |
| $p_3$ | $+$ | 0 | 0 | 0 | $-$ |
| $p_4$ | $-$ | $+$ | 0 | 0 | 0 |

Запишем (8) для $p_0$ при $P = \Gamma^2$, $Q = \Gamma^1$, $Q \setminus P = \{p_1\}$:

$$\Delta^1[p_0] = \Delta^2[p_0] - \Delta^2[p_1]\,\Lambda^1[p_1, p_0] \quad \text{или} \quad \Delta^2[p_1]\,\Lambda^1[p_1, p_0] = \Delta^2[p_0] - \Delta^1[p_0].$$

По таблице 3, $\Delta^2[p_1] < 0$, $\Delta^2[p_0] > 0$, $\Delta^1[p_0] < 0$, поэтому

$$\Lambda^1[p_1, p_0] < 0. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь две записи формулы (10) для $p_0$:

1) применительно к $P = \Gamma^3$, $Q = \Gamma^1$, $Q \setminus P = \{p_1, p_2\}$

$$\Delta^1[p_0] = \Delta^3[p_0] - \Delta^3[p_1]\,\Lambda^1[p_1, p_0] - \Delta^3[p_2]\,\Lambda^1[p_2, p_0]; \tag{20}$$

2) применительно к $P = \Gamma^4$, $Q = \Gamma^1$, $Q \setminus P = \{p_2, p_3\}$

$$\Delta^1[p_0] = \Delta^4[p_0] - \Delta^4[p_2]\,\Lambda^1[p_2, p_0] - \Delta^4[p_3]\,\Lambda^1[p_3, p_0]. \tag{21}$$

Учитывая, что $\Delta^3[p_0] = \Delta^4[p_0] = 0$, из (20) получаем равенство

$$\Delta^3[p_2]\,\Lambda^1[p_2, p_0] = -\Delta^1[p_0] - \Delta^3[p_1]\,\Lambda^1[p_1, p_0],$$

а из (21) — равенство

$$\Delta^1[p_0] = -\Delta^4[p_2]\,\Lambda^1[p_2, p_0] - \Delta^4[p_3]\,\Lambda^1[p_3, p_0].$$

Первое из этих равенств с учётом (19) и таблицы 3 приводит к неравенству $\Lambda^1[p_2, p_0] < 0$. Кроме того, согласно (13), $\Lambda^1[p_3, p_0] > 0$. Тогда последнее выражение противоречиво: справа от знака равенства стоит положительная величина, а слева — отрицательная. Это означает, что цикл вида A существовать не может.

**Невозможность цикла B.**

В случае B имеем $q_{\langle i+1\rangle_5} = p_{\langle i+2\rangle_5}$. При всех $i \in 0:4$, в соответствии с (3), (12), (16), имеют место равенства и неравенства

$$\begin{aligned} \Delta^i[p_i] &= 0, \\ \Delta^i[p_{\langle i+1\rangle_5}] &= 0, \\ \Delta^i[p_{\langle i+2\rangle_5}] &> 0, \\ \Delta^i[p_{\langle i+4\rangle_5}] &< 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Неизвестными остаются знаки

$$\sigma_i = \operatorname{sign}(\Delta^i[p_{\langle i+3\rangle_5}]). \tag{23}$$

Знаки (23) будут играть главную роль в этом пункте.

Упростим запись и будем в оставшейся части доказательства использовать в верхних и нижних индексах обычный знак операции сложения, имея в виду сложение по модулю 5.

Так как $\Gamma^{i+2} \setminus \Gamma^i = \{p_{i+2}, p_{i+3}\}$, из (10) имеем

$$\Delta^{i+2}[p_{i+4}] = \Delta^i[p_{i+4}] - \Delta^i[p_{i+2}]\,\Lambda^{i+2}[p_{i+2}, p_{i+4}] - \Delta^i[p_{i+3}]\,\Lambda^{i+2}[p_{i+3}, p_{i+4}],$$

откуда

$$\Delta^i[p_{i+3}]\,\Lambda^{i+2}[p_{i+3}, p_{i+4}] = \Delta^i[p_{i+4}] - \Delta^i[p_{i+2}]\,\Lambda^{i+2}[p_{i+2}, p_{i+4}] - \Delta^{i+2}[p_{i+4}].$$

В правой части этого равенства стоит отрицательная величина, так как, согласно (12), $\Lambda^{i+2}[p_{i+2}, p_{i+4}] > 0$, а из (22) видно, что

$$\Delta^i[p_{i+4}] < 0,\ \Delta^i[p_{i+2}] > 0,\ \Delta^{i+2}[p_{i+4}] > 0.$$

Получаем, что $\sigma_i \Lambda^{i+2}[p_{i+3}, p_{i+4}] < 0$. Из этих неравенств ясно, что все $\sigma_i$ отличны от 0 и что

$$\operatorname{sign}(\Lambda^{i+2}[p_{i+3}, p_{i+4}]) = -\sigma_i\,, i \in 0:4. \tag{24}$$

Выведем формулу

$$\sigma_i \sigma_{i+1} = -1,\; i \in 0:4, \tag{25}$$

рассмотрев случаи $\sigma_i = -1$ и $\sigma_i = 1$.

1) Пусть $\sigma_i = -1$. Запишем (7) относительно индекса $p_{i+4}$ для перехода от $\Gamma_{i+2}$ к $\Gamma_{i+1}$, $\Gamma^{i+1} \setminus \Gamma^{i+2} = \{p_{i+1}\}$ :

$$\Delta^{i+1}[p_{i+4}] = \Delta^{i+2}[p_{i+4}] - \Delta^{i+2}[p_{i+1}]\, \Lambda^{i+1}[p_{i+1}, p_{i+4}]. \tag{26}$$

В (26) слева стоит величина, имеющая знак $\sigma_{i+1}$. Кроме того, согласно (15) и (24), $\operatorname{sign}(\Lambda^{i+1}[p_{i+1}, p_{i+4}]) = \operatorname{sign}(\Lambda^{i+2}[p_{i+3}, p_{i+4}]) = -\sigma_i = 1$. Учитывая знаки оценок

$$\Delta^{i+2}[p_{i+4}] > 0, \quad \Delta^{i+2}[p_{i+1}] < 0,$$

заключаем, что $\sigma_{i+1} = 1$.

2) Пусть $\sigma_i = 1$. Так как $\Gamma^{i+3} \setminus \Gamma^i = \{p_{i+3}, p_{i+4}\}$, из (10) имеем

$$\Delta^{i+3}[p_i] = \Delta^i[p_i] - \Delta^i[p_{i+3}]\, \Lambda^{i+3}[p_{i+3}, p_i] - \Delta^i[p_{i+4}]\, \Lambda^{i+3}[p_{i+4}, p_i],$$

или, с учётом $\Delta^i[p_i] = 0$,

$$\Delta^i[p_{i+4}]\, \Lambda^{i+3}[p_{i+4}, p_i] = -\Delta^i[p_{i+3}]\, \Lambda^{i+3}[p_{i+3}, p_i] - \Delta^{i+3}[p_i].$$

Так как, по (24), $\operatorname{sign}(\Lambda^{i+3}[p_{i+4}, p_i]) = -\sigma_{i+1}$ и при этом $\Delta^i[p_{i+4}] < 0$, то слева в этом равенстве стоит величина, имеющая знак $\sigma_{i+1}$.

Знаки всех величин в правой части этого равенства известны: $\Lambda^{i+3}[p_{i+3}, p_i] > 0$ в силу (12), $\Delta^{i+3}[p_i] > 0$ по (22), а $\operatorname{sign}(\Delta^i[p_{i+3}])$ по обозначению (23) есть $\sigma_i$ и равно 1. Поэтому $\sigma_{i+1} = -1$.

Формула (25) доказана, но она противоречива: перемножая пять равенств (25) при $i \in 0:4$, мы приходим к невыполнимому равенству $(\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^2 = -1$.

Так как соотношения (25) получены на основе предположения о существовании цикла B, то тем самым доказана невозможность такого цикла и вместе с ней утверждение 9. $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. *Линейное программирование. Теория и конечные методы.* М.: Физматгиз, 1963.