

# ПОСТРОЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ\*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

25 июня 2008 г.

1°. Пусть  $N = mn$ , где  $m, n$  — натуральные числа, отличные от единицы. Мы будем использовать следующие обозначения из [1]:

$\tilde{Q}_r$  — дискретный нормализованный  $N$ -периодический  $B$ -сплайн порядка  $r$ ;  
 $\tilde{S}_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \tilde{Q}_r(j - pn)$  — дискретный  $N$ -периодический сплайн порядка  $r$ , построенный по полюсам  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  из  $\mathbb{R}^s$ .

Пусть  $s = 2$ . Значения сплайна  $\tilde{S}_r(j)$  при  $j \in 0 : N - 1$  образуют набор точек на плоскости. Если соединить соседние точки сплайна отрезками (при этом  $\tilde{S}_r(N - 1)$  соединяется с  $\tilde{S}_r(0) = \tilde{S}_r(N)$ ), мы получим замкнутую  $N$ -звенную ломаную. При достаточно больших значениях  $N$  построенные ломаные можно использовать для моделирования замкнутых кривых.

Положим  $r = 2, m = 8, n = 10$ . На рис. 1 изображены полюсы  $a_0, a_1, \dots, a_7$  и значения построенного по ним дискретного периодического сплайна. Замкнутая ломаная, полученная путём соединения соседних точек сплайна отрезками, показана на рис. 2.

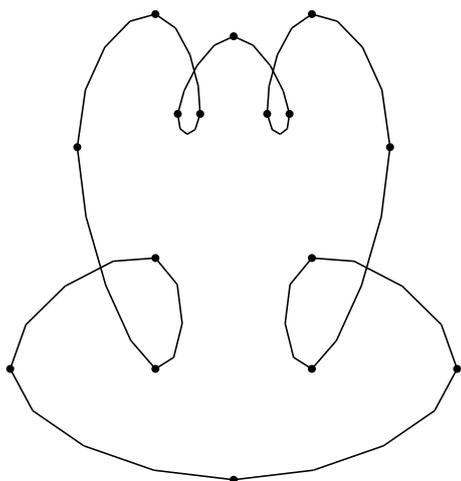
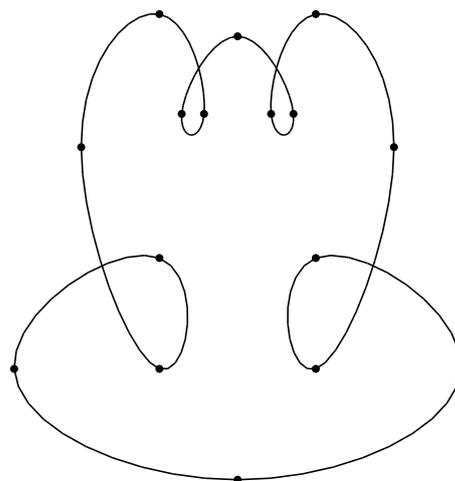
Значения  $B$ -сплайна  $\tilde{Q}_2(j)$  при  $j \in 0 : N - 1$  отличны от нуля только если  $j < 2n$  или  $j > N - 2n$ . Поэтому при изменении одного полюса изменится только локальный участок ломаной, задаваемой сплайном. На рис. 3 пунктирной кривой показан сплайн, получающийся при замене полюса  $a_3$  на  $a'_3$ .

Порядок расположения полюсов оказывает существенное влияние на вид сплайна. На рис. 4 пунктирной линией изображён сплайн, получающийся при перестановке полюсов  $a_3$  и  $a_4$ .

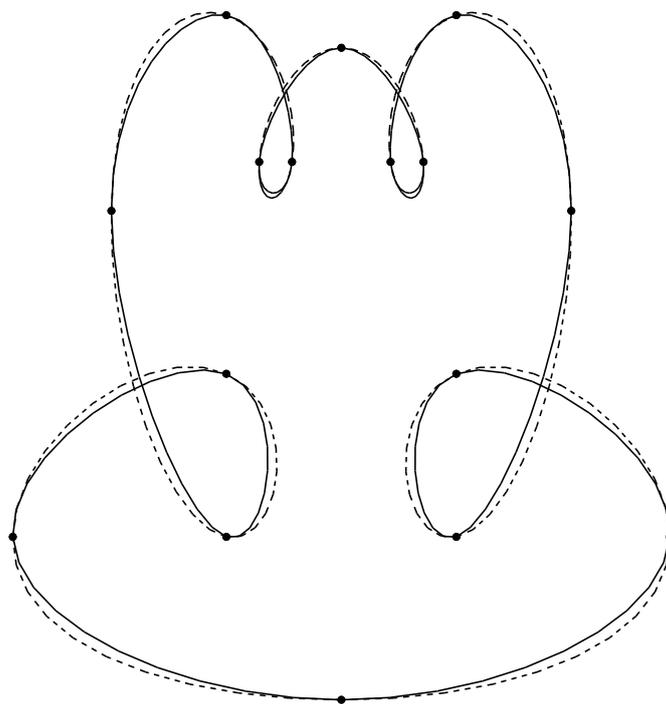
---

\*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>



Рис. 5. Сплайн «Петли»,  $n = 4$ Рис. 6. Сплайн «Петли»,  $n = 10$ 

Порядок сплайна  $r$  тоже влияет на вид получающейся ломаной. На рис. 7 кроме сплайна «Петли» порядка 2 (рис. 6) пунктирной линией изображён сплайн порядка 3, построенный по тем же точкам интерполяции с тем же значением  $n$ .

Рис. 7. Сплайн «Петли»,  $r = 2$  и  $r = 3$

Задавая нужным образом точки интерполяции, можно получить замкнутую ломаную сколь угодно сложной формы. На рис. 8 изображён сплайн «Овалы», построенный по 12 точкам интерполяции, при  $r = 2$ ,  $n = 16$ .

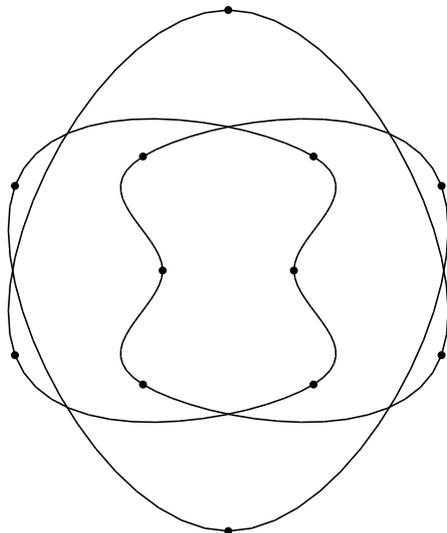


Рис. 8. Сплайн «Овалы»

3°. Дискретные периодические сплайны позволяют строить замкнутые кривые с острыми углами.

На рис. 9 представлен интерполяционный сплайн с тремя острыми углами. Можно получить ещё два острых угла, если перемещать точку  $b$  вправо. Петли  $a$  и  $c$  сначала становятся уже (рис. 10), а затем переходят в острые углы (рис. 11).

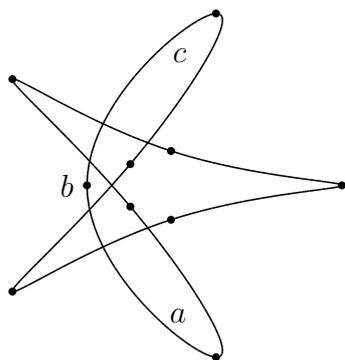


Рис. 9. Исходный сплайн

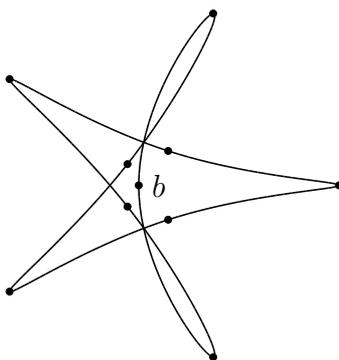


Рис. 10. Узкие петли

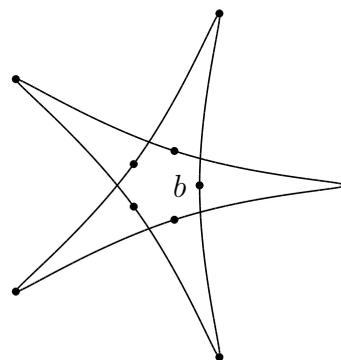


Рис. 11. Острые углы

Аналогичным образом можно получить сплайн с ещё более острым углом, а также сплайн, в котором вершина угла не является точкой интерполяции (см. рис. 12).

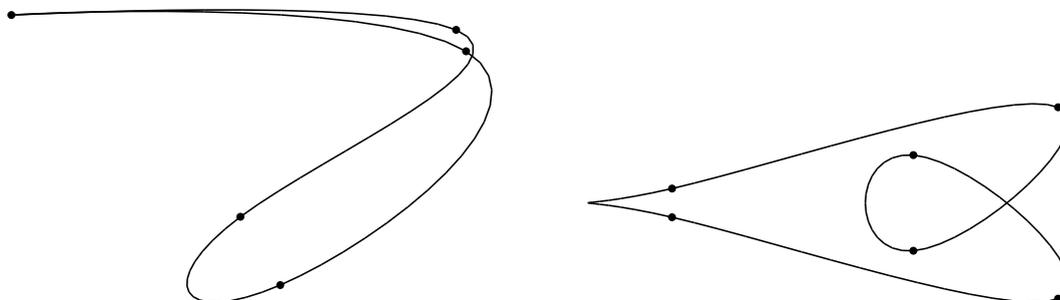


Рис. 12. Сплайны с острыми углами

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (<http://dha.spb.ru/rep07.shtml#0904>)