

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ\*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

27 июня 2009 г.

Зафиксируем натуральные числа  $r$  и  $m \geq 2$  и рассмотрим  $m$ -периодическую последовательность  $\mathbf{x}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , точек из  $\mathbb{R}^d$ . При каждом натуральном  $n \geq 2$  положим  $N = mn$  и построим дискретный  $N$ -периодический сплайн  $\mathbf{S}_{r,n}(j)$  порядка  $r$  со значениями в  $\mathbb{R}^d$ , удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \quad l \in 0 : m - 1.$$

Нас интересует поведение множества  $\{\mathbf{S}_{r,n}(j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$  точек из  $\mathbb{R}^d$  при  $n \rightarrow \infty$ .

1°. Уточним постановку задачи. Напомним определение нормализованных дискретных  $N$ -периодических  $B$ -сплайнов [1, 2]. Так как параметр  $n$  будет изменяться, включим его в обозначение:

$$\tilde{Q}_{1,n}(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0 : n - 1, \\ 0 & \text{при } j \in n : N - n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N - n + 1 : N - 1; \end{cases}$$

$$\tilde{Q}_{\nu,n} = \frac{1}{n} (\tilde{Q}_{1,n} * \tilde{Q}_{\nu-1,n}), \quad \nu = 2, 3, \dots,$$

где знаком '\*' обозначена циклическая свёртка. Дискретный периодический сплайн порядка  $r$  определяется формулой

$$\mathbf{S}_{r,n}(j) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}(l) \tilde{Q}_{r,n}(j - ln), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

---

\*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

где  $\mathbf{c}(0), \mathbf{c}(1), \dots, \mathbf{c}(m-1) \in \mathbb{R}^d$ .

Пусть задан набор векторов  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$ . Согласно [1], найдётся дискретный сплайн  $\mathbf{S}_{r,n}(j)$  вида (1), удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \quad l \in 0 : m-1. \quad (2)$$

Для каждого натурального числа  $n$ , отличного от единицы, значения сплайна  $\mathbf{S}_{r,n}(j)$  образуют множество из  $mn$  точек пространства  $\mathbb{R}^d$ . Цель данной заметки состоит в нахождении предела этого множества при  $n \rightarrow \infty$ . Для того, чтобы решить эту задачу, введём непрерывный аналог для дискретных периодических сплайнов.

2°. Пусть  $m$  — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический  $B$ -сплайн первого порядка как  $m$ -периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_1(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{при } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t-m+1, & \text{при } t \in (m-1, m]. \end{cases} \quad (3)$$

Периодические  $B$ -сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_\nu(t) = \int_0^m P_{\nu-1}(s) P_1(t-s) ds, \quad \nu = 2, 3, \dots \quad (4)$$

Ясно, что  $P_\nu(t) \geq 0$  для любого натурального  $\nu$  и вещественного  $t$ .

**ЛЕММА 1.** *Справедливо тождество*

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(t-l) \equiv 1.$$

*Доказательство.* Докажем это тождество методом математической индукции. При  $\nu = 1$  оно следует из определения. Предположим, что оно справедливо для  $P_\nu$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{m-1} P_{\nu+1}(t-l) &= \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^m P_\nu(s) P_1(t-l-s) ds = \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^m P_\nu(s-l) P_1(t-s) ds = \int_0^m \left( \sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(s-l) \right) P_1(t-s) ds = \\ &= \int_0^m P_1(t-s) ds = \int_0^m P_1(s) ds = 1. \end{aligned}$$

Индукционный переход доказан. □

Из леммы 1 следует, что  $P_\nu(t) \in [0, 1]$  для любого натурального  $\nu$  и вещественного  $t$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Периодический сплайн  $P_\nu$  обладает следующими свойствами:*

- 1)  $P_\nu \in C^{2\nu-2}$ ;
- 2) на каждом отрезке  $[k, k+1]$ , где  $k$  — целое, сплайн  $P_\nu$  совпадает с некоторым многочленом степени не выше  $2\nu - 1$ .

**Доказательство.** Воспользуемся методом математической индукции. При  $\nu = 1$  свойства выполнены. Предположим, что они выполняются для  $P_\nu$ . Имеем

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(t) &= \int_0^m P_\nu(s) P_1(t-s) ds = \int_{t-m/2}^{t+m/2} P_\nu(s) P_1(t-s) ds = \\ &= \int_{t-1}^t P_\nu(s) (1-t+s) ds + \int_t^{t+1} P_\nu(s) (1+t-s) ds. \end{aligned}$$

Продифференцируем последнее выражение по  $t$ :

$$P'_{\nu+1}(t) = - \int_{t-1}^t P_\nu(s) ds + \int_t^{t+1} P_\nu(s) ds. \quad (5)$$

Дифференцируя ещё один раз, получаем

$$P''_{\nu+1}(t) = P_\nu(t-1) + P_\nu(t+1) - 2P_\nu(t).$$

По индукционному предположению  $P_\nu \in C^{2\nu-2}$ . Следовательно,  $P_{\nu+1} \in C^{2\nu}$ . Если  $t$  принадлежит отрезку  $[k, k+1]$ , где  $k$  — целое, то  $t-1 \in [k-1, k]$ ,  $t+1 \in [k+1, k+2]$ , поэтому  $P''_{\nu+1}(t)$  совпадает с некоторым многочленом степени не выше  $2\nu - 1$ . Значит,  $P_{\nu+1}$  на этом отрезке является многочленом степени не выше  $2\nu + 1$ . Предложение доказано.  $\square$

**ЛЕММА 2.** *Для любого натурального  $\nu$  и вещественных  $x$  и  $y$  справедливо неравенство*

$$|P_\nu(x) - P_\nu(y)| \leq |x - y|.$$

**Доказательство.** При  $\nu = 1$  неравенство, очевидно, выполняется. Пусть  $\nu > 1$ . Подставляя в формулу (5) величину  $\nu - 1$  вместо  $\nu$ , получаем, что  $P'_\nu(t)$  равно разности двух интегралов по промежуткам единичной длины, причём значения подынтегральных выражений принадлежат отрезку  $[0, 1]$ . Поэтому  $|P'_\nu(t)| \leq 1$ , из чего следует требуемое неравенство.  $\square$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Для любого порядка  $\nu$  найдётся такое  $A_\nu$ , что

$$|\tilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\frac{j}{n})| \leq \frac{A_\nu}{n} \quad \text{для всех } j, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2. \quad (6)$$

**Доказательство.** Воспользуемся методом математической индукции. При  $\nu = 1$  имеем  $\tilde{Q}_{1,n}(j) = P_1(\frac{j}{n})$ , поэтому можно взять  $A_1 = 0$ .

Пусть (6) выполнено для некоторого  $\nu$ . По определению имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}_{\nu+1,n}(j) - P_{\nu+1}(\frac{j}{n})| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_{\nu,n}(j-k) \tilde{Q}_{1,n}(k) - \int_0^m P_\nu(\frac{j}{n} - t) P_1(t) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_{\nu,n}(j-k) P_1(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n} \int_0^N P_\nu(\frac{j-s}{n}) P_1(\frac{s}{n}) ds \right| = \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left( \tilde{Q}_{\nu,n}(j-k) P_1(\frac{k}{n}) - \int_k^{k+1} P_\nu(\frac{j-s}{n}) P_1(\frac{s}{n}) ds \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| \tilde{Q}_{\nu,n}(j-k) P_1(\frac{k}{n}) - P_\nu(\frac{j-s}{n}) P_1(\frac{s}{n}) \right| ds = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| (\tilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\frac{j-s}{n})) P_1(\frac{k}{n}) + P_\nu(\frac{j-s}{n}) (P_1(\frac{k}{n}) - P_1(\frac{s}{n})) \right| ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим компоненты последнего подынтегрального выражения. Известно, что  $|P_1(\frac{k}{n})| \leq 1$  и  $|P_\nu(\frac{j-s}{n})| \leq 1$ . Воспользовавшись леммой 2, получим

$$|P_1(\frac{k}{n}) - P_1(\frac{s}{n})| \leq \left| \frac{k}{n} - \frac{s}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

так как  $s \in [k, k+1]$ . Применяя индукционное предположение и лемму 2, установим, что

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\frac{j-s}{n})| &\leq |\tilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\frac{j-k}{n})| + \\ &+ |P_\nu(\frac{j-k}{n}) - P_\nu(\frac{j-s}{n})| \leq \frac{A_\nu}{n} + \left| \frac{s-k}{n} \right| \leq \frac{A_\nu + 1}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\tilde{Q}_{\nu+1,n}(j) - P_{\nu+1}(\frac{j}{n})| \leq \frac{1}{n} N \frac{A_\nu + 2}{n} = \frac{m(A_\nu + 2)}{n}.$$

Для доказательства индукционного перехода осталось положить  $A_{\nu+1} = m(A_\nu + 2)$ .  $\square$

3°. Пусть фиксировано натуральное число  $m$ , отличное от единицы, и заданы точки интерполяции  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$ . Пусть  $\mathbf{S}_{r,n}(j)$  — дискретные сплайны вида (1), удовлетворяющие интерполяционным условиям (2).

**ТЕОРЕМА 1.** Коэффициенты интерполяционных сплайнов сходятся:

$$\mathbf{c}_n(l) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{c}(l), \quad l \in 0 : m-1.$$

Если положить

$$\mathbf{S}_r(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}(l) P_r(t-l), \quad t \in \mathbb{R},$$

то

$$\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r(\frac{j}{n})\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{равномерно по } j. \quad (7)$$

Доказательство. Следуя схеме решения интерполяционной задачи [3, с. 21], положим  $h_n(l) = \tilde{Q}_{r,n}(ln)$ . Условие (2) запишется в виде  $\mathbf{c}_n * h_n = \mathbf{x}$ . Переходя в спектральную область, получаем эквивалентную систему уравнений

$$\mathbf{C}_n(k) H_n(k) = \mathbf{X}(k), \quad k \in 0 : m-1,$$

где  $\mathbf{C}_n = \mathcal{F}_m(\mathbf{c}_n)$ ,  $H_n = \mathcal{F}_m(h_n)$ ,  $\mathbf{X} = \mathcal{F}_m(\mathbf{x})$ . Согласно предложению 2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}_{r,n}(ln) = P_r(l).$$

Следовательно, последовательность  $H_n(k)$  также сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{m-1} h_n(l) \omega_m^{-kl} = \sum_{l=0}^{m-1} P_r(l) \omega_m^{-kl}.$$

Положим  $H(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(k)$ .

Покажем, что  $H(k) > 0$  для всех  $k$ . Из [1] известно явное выражение для  $H_n(k)$ :

$$H_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ \left(\sin \frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \sum_{l=0}^{n-1} \left(n \sin \frac{\pi(lm+k)}{mn}\right)^{-2r}, & \text{при } k \in 1 : m-1. \end{cases}$$

Ясно, что  $H(0) = 1 > 0$ . Пусть  $k \in 1 : m-1$ . Тогда

$$H_n(k) \geq \left(\sin \frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \left(n \sin \frac{\pi k}{mn}\right)^{-2r} \geq \left(\sin \frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \left(\frac{\pi k}{m}\right)^{-2r}.$$

Таким образом,

$$H(k) \geq \left( \sin \frac{\pi k}{m} \right)^{2r} \left( \frac{\pi k}{m} \right)^{-2r} > 0.$$

Итак,  $H(k) > 0$  для  $k \in 0 : m - 1$ . Значит, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{C}_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{X}(k)}{H_n(k)} = \frac{\mathbf{X}(k)}{H(k)}.$$

Следовательно, сходятся и последовательности  $\mathbf{c}_n(l)$ . Осталось показать, что выполнено утверждение (7). Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r(\frac{j}{n})\| &= \left\| \sum_{l=0}^{m-1} (\mathbf{c}_n(l) \tilde{Q}_{r,n}(j - ln) - \mathbf{c}(l) P_r(\frac{j}{n} - l)) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{m-1} \left\| \mathbf{c}_n(l) (\tilde{Q}_{r,n}(j - ln) - P_r(\frac{j}{n} - l)) \right\| + \left\| (\mathbf{c}_n(l) - \mathbf{c}(l)) P_r(\frac{j}{n} - l) \right\|. \end{aligned}$$

В силу предложения 2

$$\tilde{Q}_{r,n}(j - ln) - P_r(\frac{j}{n} - l) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{равномерно по } j.$$

Последовательность  $\mathbf{c}_n(l)$  сходится, поэтому ограничена. Выражение  $\mathbf{c}_n(l) - \mathbf{c}(l)$  стремится к нулю и не зависит от  $j$ , а величина  $P_r(\frac{j}{n} - l)$  не превосходит единицы. Таким образом, равномерная сходимост (7) доказана.  $\square$

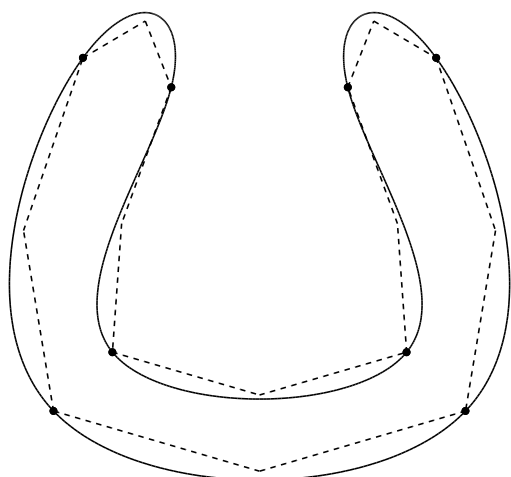
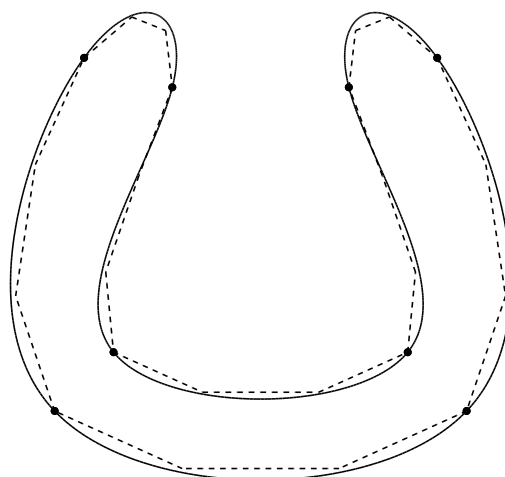
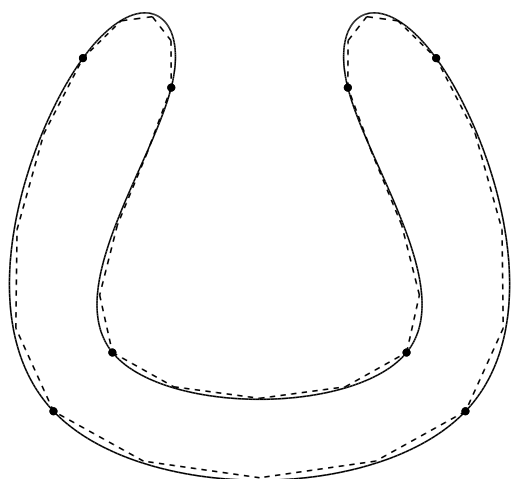
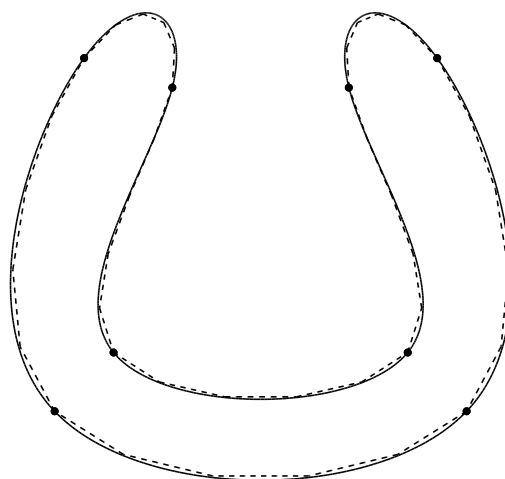
Заметим, что из формулы (7) следует, что  $\mathbf{S}_{r,n}(ln) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{S}_r(l)$ . Значит, сплайн  $\mathbf{S}_r(t)$  удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_r(l) = \mathbf{x}(l), \quad l \in 0 : m - 1.$$

Кроме того, вектор-функция  $\mathbf{S}_r(t)$  периодична с периодом  $m$ .

4°. Перейдём к геометрической интерпретации теоремы 1. Рассмотрим дискретный интерполяционный сплайн  $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ . Для наглядности соединим отрезками пары соседних точек  $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ ,  $\mathbf{S}_{r,n}(j + 1)$  для  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Получим замкнутую ломаную, проходящую через точки  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{x}(1)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{x}(m - 1)$ . При этом между соседними точками интерполяции содержится  $n$  отрезков ломаной. При увеличении  $n$  количество отрезков ломаной будет увеличиваться, но ломаная по-прежнему будет проходить через точки  $\mathbf{x}(l)$ . Согласно теореме 1, при неограниченном увеличении  $n$  построенные ломаные будут стремиться к кривой, задаваемой вектор-функцией  $\mathbf{S}_r(t)$ .

**ПРИМЕР.** На рисунках 1–4 штриховыми линиями изображены ломаные, соответствующие дискретным сплайнам, построенным для различных значений  $n$  по одному и тому же набору из восьми точек интерполяции. Кроме того, на каждом рисунке сплошной линией показана предельная кривая, задаваемая вектор-функцией  $\mathbf{S}_r(t)$ . Порядок всех сплайнов  $r$  равен двум. Точки интерполяции отмечены кружками.

Рис. 1.  $n = 2$ Рис. 2.  $n = 3$ Рис. 3.  $n = 4$ Рис. 4.  $n = 5$ 

5°. Пусть  $m$  и  $r$  — натуральные числа,  $m \geq 2$ . Обозначим через  $\widetilde{W}^r$  пространство  $m$ -периодических вектор-функций  $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , имеющих абсолютно непрерывную производную порядка  $r - 1$ .

Пусть заданы точки  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$ . Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{f}) &:= \int_0^m \|\mathbf{f}^{(r)}(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \\ \mathbf{f}(l) &= \mathbf{x}(l), \quad l \in 0 : m-1, \\ \mathbf{f} &\in \widetilde{W}^r. \end{aligned} \tag{8}$$

Из предложения 1 следует, что интерполяционный сплайн  $\mathbf{S}_r(t)$  принадлежит пространству  $\widetilde{W}^r$ .

**ТЕОРЕМА 2.** *Интерполяционный сплайн  $\mathbf{S}_r(t)$  является единственным решением задачи (8).*

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{f}$  — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (8). Положим  $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{S}_r$ . Ясно, что  $\mathbf{h}(l) = 0$  при  $l \in 0 : m-1$  и  $\mathbf{h} \in \widetilde{W}^r$ . Пусть  $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_d(t))$ ,  $\mathbf{S}_r(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_d(t))$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{f}) &= \mathbf{F}(\mathbf{h} + \mathbf{S}_r) = \int_0^m \left( \|\mathbf{h}^{(r)}(t)\|^2 + 2 \langle \mathbf{h}^{(r)}(t), \mathbf{S}_r^{(r)}(t) \rangle + \|\mathbf{S}_r^{(r)}(t)\|^2 \right) dt = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r) + 2 \sum_{\alpha=1}^d \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t) \sigma_\alpha^{(r)}(t) dt. \end{aligned}$$

Зафиксируем  $\alpha \in 1 : d$ . Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} L(h_\alpha, \sigma_\alpha) &:= \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t) \sigma_\alpha^{(r)}(t) dt = h_\alpha^{(r-1)}(m) \sigma_\alpha^{(r)}(m) - h_\alpha^{(r-1)}(0) \sigma_\alpha^{(r)}(0) - \\ &- \int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t) \sigma_\alpha^{(r+1)}(t) dt = - \int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t) \sigma_\alpha^{(r+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Проведя интегрирование по частям ещё  $r-2$  раза, придём к равенству

$$L(h_\alpha, \sigma_\alpha) = (-1)^{r-1} \int_0^m h'_\alpha(t) \sigma_\alpha^{(2r-1)}(t) dt.$$

В силу предложения 1 функция  $\sigma_\alpha^{(2r-1)}(t)$  постоянна на каждом интервале вида  $(k, k+1)$ , где  $k$  — целое. Поэтому

$$\begin{aligned} L(h_\alpha, \sigma_\alpha) &= (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} h'_\alpha(t) \sigma_\alpha^{(2r-1)}(t) dt = \\ &= (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} (h_\alpha(k+1) - h_\alpha(k)) \sigma_\alpha^{(2r-1)}(k+0) dt = 0. \end{aligned}$$



Итак,  $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$ . Следовательно,  $\mathbf{F}(\mathbf{f}) \geq \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$ , поэтому  $\mathbf{S}_r$  является решением задачи (8).

Проверим единственность решения. Если  $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$ , то  $\mathbf{F}(\mathbf{h}) = 0$ . Значит,  $\mathbf{h}^{(r)}(t) = 0$  почти везде на отрезке  $[0, m]$ . Тогда вектор-функция  $\mathbf{h}^{(r-1)}$  постоянна на  $[0, m]$ , а в силу  $m$ -периодичности — и на всей вещественной оси. Следовательно,  $\mathbf{h}(t)$  — многочлен с векторными коэффициентами. Но единственный периодический многочлен — постоянная функция, что вместе с условием  $\mathbf{h}(0) = 0$  приводит к тождеству  $\mathbf{h}(t) \equiv 0$ . Таким образом, имеем  $\mathbf{f} = \mathbf{S}_r$ , что доказывает единственность решения (8).  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DNA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (<http://dha.spb.ru/rep07.shtml#0904>).
2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. №8. С. 1235–1246.
3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.