СХОДИМОСТЬ СХЕМЫ SUBDIVISION В СЛУЧАЕ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*

Н. В. Чашников

nikolay.chashnikov@gmail.com

7 апреля 2012 г.

Данный доклад основан на книге [1]. Описан вариант метода subdivision, в котором контрольные точки образуют в пространстве регулярную четырёхугольную сетку. Рассмотрен вопрос сходимости схемы subdivision в случае, когда маска представима в виде тензорного произведения.

1°. Пусть задано семейство вещественных чисел $\{s_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, в котором лишь конечное число членов отлично от нуля. Семейство $\{s_{jk}\}$ можно переписать в эквивалентной форме при помощи мультииндекса $\alpha = (j,k)$: $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}$.

Пусть также задана начальное семейство векторов $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}$ из пространства $\mathbb{R}^3$, в котором только конечное число членов отлично от нуля. Определим последовательности векторов $\{\mathbf{p}_\alpha^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, при помощи рекуррентного соотношения

$$\mathbf{p}_\beta^m = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} s_{\beta-2\alpha}\,\mathbf{p}_\alpha^{m-1}, \qquad \beta\in\mathbb{Z}^2, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Такой метод построения последовательностей векторов $\{\mathbf{p}_\alpha^m\}$ называется *стационарной схемой subdivision с маской* $\{s_\alpha\}$. Векторы $\mathbf{p}_\alpha^m$ называются контрольными точками; $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$ — начальный набор контрольных точек.

В некоторых случаях удобно рассматривать вместо семейств чисел и векторов производящие функции. Маске $\{s_\alpha\}$ соответствует производящая функция

$$s(z_1, z_2) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} s_{jk}\, z_1^j\, z_2^k.$$

Производящую функцию можно записать в компактной форме

$$s(z) = \sum_\alpha s_\alpha\, z^\alpha,$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

где вектор $z = (z_1, z_2)$ возводится в степень $\alpha = (j, k)$ по формуле $z^\alpha = z_1^j\, z_2^k$. Здесь и далее мы будем опускать пределы суммирование, если суммирование ведётся по всему множеству $\mathbb{Z}^2$. В действительности в каждой сумме лишь конечное число членов отлично от нуля, так что вопросы сходимости не возникают.

Аналогично вводится производящая функция $\mathbf{p}^m(z)$ для набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^m\}$:

$$\mathbf{p}^m(z) = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha^m\, z^\alpha.$$

Соотношение (1) эквивалентно соотношению для производящих функций

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\, \mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Здесь вектор z возводится в квадрат покомпонентно: $z^2 = (z_1, z_2)^2 = (z_1^2, z_2^2)$.

2°. Положим

$$\widehat{N}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{при остальных } t; \end{cases}$$
$$\widehat{N}_2(u_1, u_2) = \widehat{N}(u_1)\widehat{N}(u_2).$$

При $m \geqslant 0$ определим вектор-функцию $\mathbf{P}^m$ по формуле

$$\mathbf{P}^m(u) = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha^m\, \widehat{N}_2(2^m\, u - \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Ясно, что $\mathbf{P}^m(u)$ является непрерывной кусочно-билинейной функцией, принимающей значения $\mathbf{p}_\alpha^m$ в точках $\frac{\alpha}{2^m}$.

Определим норму мультииндекса $\alpha = (j, k)$ следующим образом:

$$\|\alpha\| = \max\bigl\{|j|, |k|\bigr\}.$$

ЛЕММА. *Пусть заданы схема subdivision с маской $\{s_\alpha\}$ и начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$. Положим*

$$A = \max\bigl\{\|\alpha\| \;\mid\; s_\alpha \neq 0\bigr\}, \qquad a_0 = \max\bigl\{\|\alpha\| \;\mid\; \mathbf{p}_\alpha^0 \neq 0\bigr\}.$$

Тогда носители вектор-функций $\mathbf{P}^m$ ограничены в совокупности:

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-(A + a_0 + 1), A + a_0 + 1]^2, \quad m \geqslant 0.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$a_m = \max\{\|\alpha\| \mid \mathbf{p}_\alpha^m \neq 0\}, \quad m \geqslant 1.$$

При $m = 0$ данное обозначение согласуется с обозначением a_0 из формулировки леммы.

Зафиксируем натуральное m и рассмотрим рекуррентное соотношение (1) при $\beta \in \mathbb{Z}^2$. Предположим, что вектор $\mathbf{p}_\beta^m$ отличен от нуля. В таком случае в сумме из правой части (1) есть ненулевое слагаемое. Поэтому найдётся мультииндекс α, удовлетворяющий условиям

$$\|\alpha\| \leqslant a_{m-1} \quad \text{и} \quad \|\beta - 2\alpha\| \leqslant A. \tag{4}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Перепишем неравенства (4) в виде

$$\alpha_1 \in [-a_{m-1}, a_{m-1}], \quad \alpha_1 \in \left[\tfrac{\beta_1 - A}{2}, \tfrac{\beta_1 + A}{2}\right],$$
$$\alpha_2 \in [-a_{m-1}, a_{m-1}], \quad \alpha_2 \in \left[\tfrac{\beta_2 - A}{2}, \tfrac{\beta_2 + A}{2}\right].$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$[-a_{m-1}, a_{m-1}] \cap \left[\tfrac{\beta_1 - A}{2}, \tfrac{\beta_1 + A}{2}\right] \neq \varnothing,$$
$$[-a_{m-1}, a_{m-1}] \cap \left[\tfrac{\beta_2 - A}{2}, \tfrac{\beta_2 + A}{2}\right] \neq \varnothing.$$

Пересечение двух отрезков непусто, только если расстояние между центрами не превосходит полусуммы их длин, поэтому выполняются неравенства

$$|\beta_1/2| \leqslant a_{m-1} + \tfrac{A}{2}, \qquad |\beta_2/2| \leqslant a_{m-1} + \tfrac{A}{2}.$$

Итак, если вектор $\mathbf{p}_\beta^m$ отличен от нуля, то $\|\beta\| \leqslant 2a_{m-1} + A$. Значит,

$$a_m \leqslant 2a_{m-1} + A.$$

Последовательно применяя полученное неравенство, запишем

$$2^{-m} a_m \leqslant 2^{m-1} a_{m-1} + 2^{-m} A \leqslant 2^{m-2} a_{m-2} + 2^{-(m-1)} A + 2^{-m} A \leqslant$$
$$\leqslant \cdots \leqslant a_0 + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} A < a_0 + A.$$

Рассмотрим определение (3) вектор-функции $\mathbf{P}^m(u)$. Носителем функции $\widehat{N}_2(u)$ является квадрат $[-1, 1]^2$. Поэтому значение $\widehat{N}_2(2^m u - \alpha)$ может быть отлично от нуля, только если u принадлежит квадрату

$$[2^{-m}(\alpha_1 - 1), 2^{-m}(\alpha_1 + 1)] \times [2^{-m}(\alpha_2 - 1), 2^{-m}(\alpha_2 + 1)].$$

Носитель функции $\mathbf{P}^m(u)$ содержится в объединении таких квадратов по всем α из множества $(-a_m : a_m)^2$, то есть

$$\operatorname{supp}\mathbf{P}^m \subset [-2^{-m}(a_m+1),\, 2^{-m}(a_m+1)]^2 \subset [-(a_0+A)-2^{-m},\, a_0+A+2^{-m}]^2.$$

Значит, для всех m справедливо включение

$$\operatorname{supp}\mathbf{P}^m \subset [-(A+a_0+1), A+a_0+1]^2.$$

Лемма доказана. $\square$

3°. Схема subdivision называется *сходящейся*, если для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}$ последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(u)$ равномерно сходится. Будем называть схему subdivision *вырожденной*, если для любого начального набора контрольных точек последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(u)$ равномерно сходится к вектор-функции, тождественно равной нулю.

Обозначим через $\mathbf{P}$ предел последовательности вектор-функций $\mathbf{P}^m$. Очевидно, что вектор-функция $\mathbf{P}(u)$ непрерывна. Из леммы следует, что носитель вектор-функции $\mathbf{P}(u)$ ограничен. Кроме того, справедливо неравенство

$$\max_\alpha \|\mathbf{p}^m_\alpha - \mathbf{P}(2^{-m}\alpha)\| = \max_\alpha \|\mathbf{P}^m(2^{-m}\alpha) - \mathbf{P}(2^{-m}\alpha)\| \leqslant \max_{u\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{P}^m(u) - \mathbf{P}(u)\|.$$

Значит, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \max_\alpha \|\mathbf{p}^m_\alpha - \mathbf{P}(2^{-m}\alpha)\| = 0. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_\alpha\}$ сходится и невырождена. Тогда при любом мультииндексе $\delta \in \{0,1\}^2$ справедливо равенство*

$$\sum_\alpha s_{2\alpha+\delta} = 1. \tag{6}$$

Доказательство. Возьмём такой начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}$, для которого предельная вектор-функция $\mathbf{P}(u)$ не равна тождественно нулю. Тогда найдётся натуральное число M и $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ такие, что $\mathbf{P}(2^{-M}\alpha) \neq 0$.

Зафиксируем натуральное число $m > M$ и мультииндекс $\delta \in \{0,1\}^2$. В силу рекуррентного соотношения (1) имеем

$$\mathbf{p}^m_{2^{m-M}\alpha+\delta} = \sum_\beta s_{2^{m-M}\alpha+\delta-2\beta}\, \mathbf{p}^{m-1}_\beta = \sum_\gamma s_{2\gamma+\delta}\, \mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}\alpha-\gamma}.$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\mathbf{P}(2^{-M}\alpha + 2^{-m}\delta) - \sum_{\gamma} s_{2\gamma+\delta}\, \mathbf{P}(2^{-M}\alpha - 2^{-m+1}\gamma) =$$

$$= \big[\mathbf{P}(2^{-M}\alpha + 2^{-m}\delta) - \mathbf{p}^{m}_{2^{m-M}\alpha+\delta}\big] + \sum_{\gamma} s_{2\gamma+\delta}\big[\mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}\alpha-\gamma} - \mathbf{P}(2^{-M}\alpha - 2^{-m+1}\gamma)\big].$$

Согласно предельному соотношению (5), первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $m \to \infty$. Разность

$$\mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}\alpha-\gamma} - \mathbf{P}(2^{-M}\alpha - 2^{-m+1}\gamma)$$

также стремится к нулю, а так как коэффициенты $s_{2\gamma+\delta}$ отличны от нуля только для конечного числа мультииндексов γ, то и вся правая часть стремится к нулю. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в левой части и пользуясь непрерывностью вектор-функции $\mathbf{P}(u)$, получаем

$$\mathbf{P}(2^{-M}\alpha)\Big(1 - \sum_{\gamma} s_{2\gamma+\delta}\Big) = 0.$$

Осталось заметить, что $\mathbf{P}(2^{-M}\alpha)$ отлично от нуля, поэтому

$$\sum_{\gamma} s_{2\gamma+\delta} = 1,$$

что и требовалось. $\square$

4°. Пусть заданы последовательности вещественных чисел $\{s^1_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{s^2_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, в которых лишь конечное число членов отлично от нуля. Определим семейство чисел $\{s_{jk}\}_{k,j\in\mathbb{Z}}$ формулой

$$s_{jk} = s^1_j\, s^2_k, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Ясно, что в $\{s_{jk}\}$ только конечное число членов отлично от нуля. Обозначим через $s^1(z)$ и $s^2(z)$ производящие функции последовательностей $\{s^1_j\}$ и $\{s^2_k\}$ соответственно. Найдём производящую функцию $s(z_1, z_2)$ для маски subdivision $\{s_{jk}\}$. Согласно формуле (7) имеем

$$s(z_1, z_2) = \sum_{jk} s_{jk}\, z_1^j\, z_2^k = \sum_{j} s^1_j\, z_1^j \sum_{k} s^2_k\, z_2^k = s^1(z_1)\, s^2(z_2).$$

Предположим, что схемы subdivision с масками $\{s^1_j\}$ и $\{s^2_k\}$ сходятся. Проведём процесс subdivision с маской $\{s^1_j\}$ и начальным набором контрольных точек, задаваемым равенством

$$f^0_j = \delta_{j0}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{f_j^m\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге m процесса subdivision, а через $f^m(z)$ — соответствующую производящую функцию. При доказательстве теоремы 1 из [2] было получено явное выражение для $f^m(z)$:

$$f^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s^1(z^{2^j}). \tag{8}$$

Введём кусочно-линейные функции

$$F^m(t) = \sum_j f_j^m \widehat{N}(2^m t - j), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как схема subdivision сходится, существует функция $F(t)$, являющаяся пределом функций $F^m(t)$ при неограниченном увеличении m.

Аналогично, проведём процесс subdivision с маской $\{s_k^2\}$ и начальным набором контрольных точек, задаваемым равенством

$$g_k^0 = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{g_k^m\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге m процесса subdivision, а через $g^m(z)$ — соответствующую производящую функцию, для которой справедлива формула

$$g^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s^2(z^{2^j}). \tag{9}$$

Введём кусочно-линейные функции

$$G^m(t) = \sum_k g_k^m \widehat{N}(2^m t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $G(t)$ предел последовательности функций $G^m(t)$ при m, стремящемся к бесконечности.

Зафиксируем произвольный начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$. Применяя рекуррентное соотношение (2), при натуральном m получаем

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = s(z)s(z^2)\mathbf{p}^{m-2}(z^4) = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j})\mathbf{p}^0(z^{2^m}). \tag{10}$$

Проведём процесс subdivision с маской $\{s_{kj}\}$ для начального набора контрольных точек

$$h_{jk}^0 = \delta_{j0}\,\delta_{k0}, \quad j,k \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{h^m_{jk}\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге m, а через $h^m(z)$ — соответствующую производящую функцию. Ясно, что $h^0(z) \equiv \equiv 1$. Подставляя $h^0(z)$ в формулу (10) и пользуясь равенствами (8) и (9), получаем

$$h^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j}) = \prod_{j=0}^{m-1} s^1(z_1^{2^j})\, s^2(z_2^{2^j}) = f^m(z_1)\, g^m(z_2). \tag{11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z_1, z_2, приходим к равенству

$$h^m_{jk} = f^m_j\, g^m_k, \quad j,k \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Введём кусочно-линейные функции

$$H^m(u) = \sum_\alpha h^m_\alpha \widehat{N}_2(2^m\, u - \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

В силу (12) имеем

$$H^m(u_1, u_2) = \sum_{j,k} f^m_j\, g^m_k \widehat{N}(2^m\, u_1 - j)\, \widehat{N}(2^m\, u_2 - k) = F^m(u_1)\, G^m(u_2).$$

Значит, последовательность функций $H^m(u)$ равномерно сходится к функции $H(u)$, задаваемой равенством

$$H(u_1, u_2) = F(u_1)\, G(u_2). \tag{13}$$

Вернёмся к процессу subdivision с произвольным начальным набором контрольных точек $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}$. Учитывая (11), равенство (10) можно переписать в виде

$$\mathbf{p}^m(z) = h^m(z)\, \mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем

$$\mathbf{p}^m_\alpha = \sum_\beta h^m_{\alpha - 2^m\beta}\, \mathbf{p}^0_\beta.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^m(u) &= \sum_\alpha \mathbf{p}^m_\alpha \widehat{N}_2(2^m\, u - \alpha) = \sum_\alpha \sum_\beta h^m_{\alpha-2^m\beta}\, \mathbf{p}^0_\beta\, \widehat{N}_2(2^m\, u - \alpha) = \\ &= \sum_\beta \mathbf{p}^0_\beta \sum_\gamma h^m_\gamma \widehat{N}_2(2^m\, u - 2^m\, \beta - \gamma) = \sum_\beta \mathbf{p}^0_\beta\, H^m(u - \beta).\end{aligned}$$

Делаем вывод, что последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(u)$ равномерно сходится, и для предельной вектор-функции $\mathbf{P}(u)$ справедливо представление

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{\beta} \mathbf{p}^0_\beta \, H(u-\beta). \tag{14}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть схемы subdivision с масками* $\{s^1_j\}$ *и* $\{s^2_k\}$ *сходятся. Тогда схема subdivision с маской* $\{s_{jk}\}$*, определяемой равенством* (7)*, также сходится. При этом предельная функция процесса subdivision выражается через начальный набор контрольных точек формулой* (14)*, где функция* $H(u)$ *определяется равенством* (13)*.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть схемы subdivision с масками* $\{s^1_j\}$ *и* $\{s^2_k\}$ *сходятся, и для каждой маски и любого начального набора контрольных точек предельные вектор-функции процессов subdivision принадлежат пространству* $C^r(\mathbb{R})$ *при некотором* $r \geqslant 0$*. Тогда для любого начального набора контрольных точек предельная вектор-функция процесса subdivision с маской* $\{s_{jk}\}$ *принадлежит пространству* $C^r(\mathbb{R}^2)$*.*

5°. Перейдём к геометрической интерпретации процесса subdivision в случае двух переменных. Пусть задан набор точек $\{\mathbf{p}^0_{jk} \mid j \in 0 : M,\, k \in 0 : N\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Положим $\mathbf{p}^0_{jk} = 0$ при остальных j, k и проведём m шагов процесса subdivision. Полученному набору контрольных точек $\{\mathbf{p}^m_\alpha\}$ соответствует кусочно-билинейная поверхность, задаваемая вектор-функцией $\mathbf{P}^m(u)$. Сходимость схемы subdivision гарантирует, что при увеличении m полученные поверхности будут стремиться к предельной поверхности. Однако с практической точки зрения удобнее использовать вместо кусочно-билинейной поверхности многогранную поверхность с вершинами $\mathbf{p}^m_\alpha$. Гранями поверхности являются либо четырёхугольники вида

$$(\mathbf{p}^m_{j,k}, \mathbf{p}^m_{j+1,k}, \mathbf{p}^m_{j+1,k+1}, \mathbf{p}^m_{j,k+1}),$$

либо, если вершины такого четырёхугольника не лежат на одной плоскости, треугольники вида

$$(\mathbf{p}^m_{j,k}, \mathbf{p}^m_{j+1,k}, \mathbf{p}^m_{j,k+1}), \quad (\mathbf{p}^m_{j+1,k+1}, \mathbf{p}^m_{j+1,k}, \mathbf{p}^m_{j,k+1}).$$

При достаточно больших m грани малы, поэтому разница между кусочно-билинейной и многогранной поверхностями несущественна. Как и в случае одной переменной [2, пункт 4], рассматриваются только те вершины $\mathbf{p}^m_\alpha$, на значения которых не повлияли искусственно добавленные в начальный набор векторов $\{\mathbf{p}^0_\alpha\}$ нулевые элементы.

Известно, что в случае одной переменной схема subdivsion с маской $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ сходится, и для любого начального набора контрольных точек предельная вектор-функция принадлежит пространству C^1 (см. [3]). Определим маску $\{s_{jk}\}$ по формуле (7), взяв в качестве $\{s_j^1\}$ и $\{s_k^2\}$ указанную маску. Ненулевые члены $\{s_{jk}\}$ образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Согласно следствию из теоремы 2, процесс subdivision, задаваемый маской (15), сходится к гладкой вектор-функции при любом начальном наборе контрольных точек.

Приведём пример построения поверхности методом subdivision. На рис. 1 изображена многогранная поверхность, задаваемая начальным набором контрольных точек $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$. На рис. 2–4 показаны поверхности, получаемые после первого, второго и третьего шага процесса subdivision с маской (15).

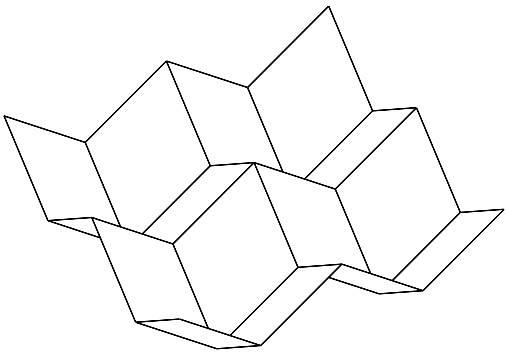

Рис. 1. $\{\mathbf{p}_\alpha^0\}$

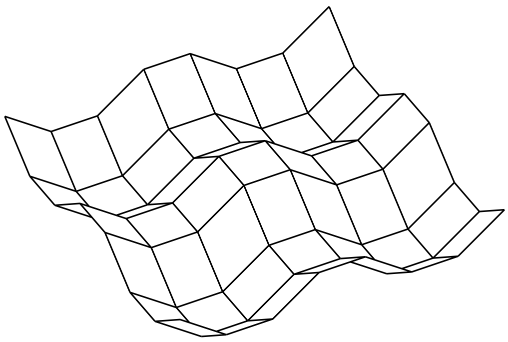

Рис. 2. $\{\mathbf{p}_\alpha^1\}$

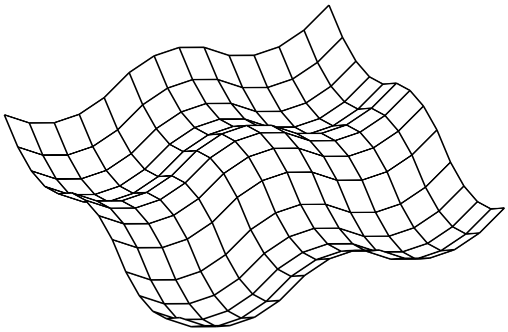

Рис. 3. $\{\mathbf{p}_\alpha^2\}$

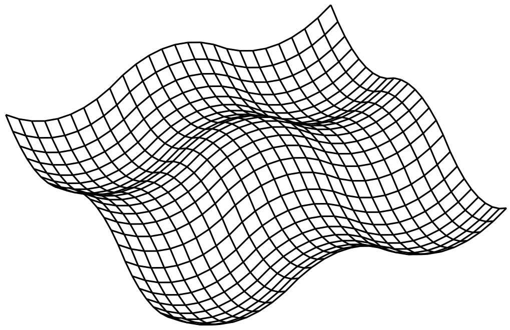

Рис. 4. $\{\mathbf{p}_\alpha^3\}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersson L. E., Stewart N. F. *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces*. SIAM, 2010.

2. Чашников Н. В. *Предельные теоремы для схемы subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 11 февраля 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0211`).

3. Чашников Н. В. *Построение кривых методом subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1001`).