ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ В ДИСКРЕТНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

7 мая 2011 г.

В докладе изложены некоторые результаты работы [1], относящиеся к дискретному гармоническому анализу.

1°. Введём обозначение для носителя сигнала x из пространства $\mathbb{C}_N$:

$$\operatorname{supp} x := \bigl\{ j \in 0 : N-1 \mid x(j) \neq 0 \bigr\}.$$

Пусть x — сигнал из $\mathbb{C}_N$, не равный тождественно нулю. Положим $X = \mathcal{F}_N(x)$ — дискретное преобразование Фурье сигнала x.

ЛЕММА. *Пусть $m = |\operatorname{supp} x|$. Для любого $q \in 0 : N-1$ в последовательности значений*

$$X(q+1),\ X(q+2), \ldots,\ X(q+m)$$

найдётся хотя бы один ненулевой элемент.

Доказательство. Обозначим элементы носителя x через j_k:

$$\operatorname{supp} x = \{j_1,\ j_2, \ldots,\ j_m\}.$$

Зафиксируем произвольное $q \in 0 : N-1$. Значения сигнала x отличны от нуля только на аргументах j_k, поэтому

$$X(q+l) = \sum_{k=1}^{m} x(j_k)\, \omega_N^{-(q+l)j_k}, \quad l \in 1 : m. \tag{1}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Положим

$$
\begin{aligned}
a &= \bigl(x(j_1),\, x(j_2), \dots, x(j_m)\bigr)^T,\\
b &= \bigl(X(q+1),\, X(q+2), \dots, X(q+m)\bigr)^T,\\
Z &= \bigl\{\omega_N^{-(q+l)j_k}\bigr\}_{l,k=1}^{m}.
\end{aligned}
$$

Используя эти обозначения, равенство (1) можно переписать в матричной форме: $b = Za$.

Проверим, что определитель матрицы Z не равен нулю. Действительно,

$$
Z = \begin{bmatrix} z_1^{q+1} & z_2^{q+1} & \cdots & z_m^{q+1} \\ z_1^{q+2} & z_2^{q+2} & \cdots & z_m^{q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{q+m} & z_2^{q+m} & \cdots & z_m^{q+m} \end{bmatrix},
$$

где $z_k = \omega_N^{-j_k}$. Все числа z_k различны, так как числа j_k различны и принадлежат множеству $0 : N-1$. Поделив каждый столбец матрицы Z на его первый элемент, получим

$$
\det Z = (z_1\, z_2 \cdots z_m)^{q+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{m-1} & z_2^{m-1} & \cdots & z_m^{m-1} \end{vmatrix}.
$$

Определитель в последнем выражении является определителем Вандермонда. Он не равен нулю, поэтому $\det Z$ также отличен от нуля.

Итак, матрица Z неособенна и $a \neq \mathbb{O}$. Поэтому $b \neq \mathbb{O}$, то есть среди значений $X(q+1),\, X(q+2), \dots,\, X(q+m)$ найдётся ненулевой элемент.

Лемма доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 1 (принцип неопределённости)**.** *Для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$, не равного тождественно нулю, справедливо неравенство*

$$
|\operatorname{supp} x| \cdot \bigl|\operatorname{supp} \mathcal{F}_N(x)\bigr| \geqslant N. \tag{2}
$$

Доказательство. Положим $X = \mathcal{F}_N(x)$, $m = |\operatorname{supp} x|$, $n = |\operatorname{supp} X|$. Обозначим через k_l элементы носителя X:

$$
\operatorname{supp} X = \{k_1,\, k_2, \dots, k_n\}, \qquad 0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n < N.
$$

Если $k_2 > k_1 + m$, то все элементы в последовательности

$$
X(k_1+1),\, X(k_1+2),\, \dots,\, X(k_1+m)
$$

нулевые, что противоречит лемме. Поэтому $k_2 \leqslant k_1+m$. Аналогичным образом проверяется, что $k_3 \leqslant k_2 + m$, $k_4 \leqslant k_3 + m$ и так далее. Дойдя до k_n, получим

$$k_n \leqslant k_{n-1} + m \leqslant k_{n-2} + 2m \leqslant \cdots \leqslant k_1 + (n-1)m. \tag{3}$$

В силу N-периодичности функции X первым ненулевым элементом в последовательности

$$X(k_n + 1),\ X(k_n + 2),\ X(k_n + 3), \ldots$$

будет элемент $X(k_1 + N)$. Ещё раз воспользовавшись леммой, придём к неравенству $k_1 + N \leqslant k_n + m$.

Итак,

$$k_1 + N \leqslant k_n + m \leqslant k_1 + nm. \tag{4}$$

Следовательно, справедливо неравенство $N \leqslant nm$, что эквивалентно (2).

Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в (2) достигается равенство, то есть $N = mn$, где $m = |\operatorname{supp} x|$, $n = \bigl|\operatorname{supp} \mathcal{F}_N(x)\bigr|$. Тогда сигнал x представим в виде*

$$x(j) = c\, \omega_N^{jq}\, \delta_n(j-p), \tag{5}$$

где $c \in \mathbb{C}$, $p \in 0 : n-1$, $q \in 0 : m-1$.

Доказательство. Как и в теореме 1, положим $X = \mathcal{F}_N(x)$ и обозначим элементы носителя X через k_l, $l \in 1 : n$. Так как $N = nm$, то неравенства в (4) обращаются в равенства. В частности,

$$k_n = k_1 + (n-1)m.$$

Поэтому в равенства обращаются и все неравенства в (3):

$$k_n = k_{n-1} + m, \quad k_{n-1} = k_{n-2} + m, \ldots, \quad k_2 = k_1 + m.$$

Положим $q = k_1$. Тогда для чисел k_l справедлива формула

$$k_l = q + (l-1)m, \quad l \in 1 : n.$$

Из соотношения $q + (n-1)m = k_n < N$ следует, что q принадлежит множеству $0 : m-1$.

Выразим исходный сигнал x через X:

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{n} X(k_l)\, \omega_N^{jk_l} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} X(q + lm)\, \omega_N^{j(q+lm)} = \omega_N^{jq}\, \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{X(q+lm)}{m}\, \omega_n^{jl}.$$

Пусть $H(l) = X(q + lm)/m$, $l \in 0 : n-1$. Введя обозначение $h = \mathcal{F}_n^{-1}(H)$, придём к формуле

$$x(j) = \omega_N^{jq}\, h(j). \tag{6}$$

Так как x не равен тождественно нулю, то найдётся $p \in 0 : n-1$ такое, что $h(p) = c \neq 0$. Следовательно,

$$x(p + ln) = \omega_N^{(p+ln)q}\, h(p) \neq 0, \quad l \in 0 : m-1.$$

Размер носителя x равен m, поэтому x обращается в ноль на всех остальных аргументах. В частности, при $l = 0$, $j \in 0 : n-1$, $j \neq p$ имеем

$$0 = x(j) = \omega_N^{jq}\, h(j).$$

Установлено, что $h(j)$ при $j \in 0 : n-1$ не равно нулю только для $j = p$, то есть $h(j) = c\,\delta_n(j-p)$. Подставляя это выражение в формулу (6), получаем, что x имеет вид (5).

Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что верно и обратное утверждение: если сигнал x представим в виде (5) для некоторых натуральных n, m и при этом $N = mn$, то на x в неравенстве (2) достигается равенство. Действительно, $x(j)$ отличен от нуля только при $j = p + nl$, $l \in 0 : m-1$, так что $|\operatorname{supp} x| = m$. Вычислим ДПФ сигнала x:

$$X(k) = \sum_{l=0}^{m-1} x(p+nl)\,\omega_N^{-k(p+nl)} = \sum_{l=0}^{m-1} c\,\omega_N^{(p+nl)q}\,\omega_N^{-k(p+nl)} =$$

$$= c\,\omega_N^{p(q-k)} \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{l(q-k)} = m\,c\,\omega_N^{p(q-k)}\,\delta_m(q-k).$$

Видно, что $X(k)$ не равно нулю только при $k = q + lm$, $l \in 0 : n-1$, так что $|\operatorname{supp} X| = n$. Установлено, что $N = |\operatorname{supp} x| \cdot |\operatorname{supp} X|$.

2°. Определим норму в пространстве сигналов $\mathbb{C}_N$:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|.$$

Для множества $A \subset 0 : N-1$ будем обозначать через $\overline{A}$ его дополнение до основного периода:

$$\overline{A} := (0 : N-1) \setminus A.$$

ТЕОРЕМА 3 (обобщённый принцип неопределённости)**.** *Пусть* $A \subset 0 : N-1$, $\varepsilon \geqslant 0$. *Если сигнал* $x \in \mathbb{C}_N$ *не равен тождественно нулю и выполняется условие*

$$\sum_{j\in\overline{A}} \bigl|x(j)\bigr| \leqslant \varepsilon\|x\|_1, \tag{7}$$

то справедливо неравенство

$$|A| \cdot \bigl|\operatorname{supp}\mathcal{F}_N(x)\bigr| \geqslant (1-\varepsilon)N. \tag{8}$$

Доказательство. В силу условия (7) имеем

$$\|x\|_1(1-\varepsilon) \leqslant \|x\|_1 - \sum_{j\in\overline{A}}\bigl|x(j)\bigr| = \sum_{j\in A}\bigl|x(j)\bigr| \leqslant |A| \max_{j\in 0:N-1}\bigl|x(j)\bigr|. \tag{9}$$

Положим $X = \mathcal{F}_N(x)$. По определению прямого и обратного ДПФ для любого $j \in 0 : N-1$

$$x(j) = \tfrac{1}{N}\sum_{k\in\operatorname{supp}X} X(k)\,\omega_N^{kj} = \tfrac{1}{N}\sum_{k\in\operatorname{supp}X}\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\omega_N^{-kl}\,\omega_N^{kj} = \tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\sum_{k\in\operatorname{supp}X}\omega_N^{k(l-j)}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\bigl|x(j)\bigr| \leqslant \tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\bigl|x(l)\bigr| \cdot |\operatorname{supp}X| = \tfrac{1}{N}\|x\|_1 \cdot |\operatorname{supp}X|.$$

Вместе с неравенством (9) получаем

$$\|x\|_1(1-\varepsilon) \leqslant |A| \max_{j\in 0:N-1}\bigl|x(j)\bigr| \leqslant \tfrac{1}{N}|A| \cdot \|x\|_1 \cdot |\operatorname{supp}X|.$$

Сокращая на $\|x\|_1$ и перенося N в левую часть, приходим к неравенству (8).

Теорема доказана. □

Замечание. Теорема 1 является частным случаем доказанной теоремы при $A = \operatorname{supp}x$, $\varepsilon = 0$.

3°. Принцип неопределённости можно использовать для восстановления сигналов. Опишем одно из таких приложений.

Пусть задано множество $B \subset 0 : N-1$. Для произвольного сигнала x из $\mathbb{C}_N$ положим $X = \mathcal{F}_N(x)$ и определим N-периодическую функцию $Y(j)$ на основном периоде $0 : N-1$ формулой

$$Y(j) = \begin{cases} X(j), & \text{при } j \in B, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сигнал $y = \mathcal{F}_N^{-1}(Y)$ будем обозначать $P_B(x)$. Ясно, что P_B является линейным оператором в пространстве $\mathbb{C}_N$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть сигнал $x_* \in \mathbb{C}_N$ удовлетворяет неравенству*

$$2\,|\operatorname{supp} x_*|\,\bigl(N - |B|\bigr) < N, \tag{10}$$

а $y_* = P_B(x_*)$. Тогда x_* является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \|x\|_1 \to \min \\ P_B(x) = y_*, \\ x \in \mathbb{C}_N. \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный сигнал x, отличный от x_* и удовлетворяющий ограничениям задачи (11). Покажем, что $\|x\|_1 > \|x_*\|_1$.

Положим $h = x - x_*$, $H = \mathcal{F}_N(h)$. В силу линейности P_B имеем $P_B(h) = 0$, то есть $H(j) = 0$ для всех $j \in B$. Как следствие, справедливо неравенство

$$|\operatorname{supp} H| \leqslant N - |B|. \tag{12}$$

Пусть $A = \operatorname{supp} x_*$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Из неравенств (10) и (12) вытекает неравенство

$$|A| \cdot \bigl|\operatorname{supp} \mathcal{F}_N(h)\bigr| \leqslant |\operatorname{supp} x_*|\,\bigl(N - |B|\bigr) < \tfrac{1}{2}\,N.$$

Это означает, что условие (8) из заключения теоремы 3 для сигнала h не выполнено. Поэтому и предположение теоремы 3 об справедливости неравенства (7) ложно, то есть

$$\sum_{j \in \overline{A}} \bigl|h(j)\bigr| > \tfrac{1}{2}\,\|h\|_1, \tag{13}$$

Имеем

$$\|x\|_1 = \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|x(j)\bigr| = \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|x_*(j) + h(j)\bigr| = \sum_{j \in A} \bigl|x_*(j) + h(j)\bigr| + \sum_{j \in \overline{A}} \bigl|h(j)\bigr| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j \in A} \bigl|x_*(j)\bigr| - \sum_{j \in A} \bigl|h(j)\bigr| + \sum_{j \in \overline{A}} \bigl|h(j)\bigr| = \|x_*\|_1 + 2 \sum_{j \in \overline{A}} \bigl|h(j)\bigr| - \|h\|_1.$$

Пользуясь неравенством (13), получаем $\|x\|_1 > \|x_*\|_1$. Итак, x_* действительно является единственным решением задачи (11).

Теорема доказана. □

Практический смысл теоремы 4 следующий. Предположим, что при передаче сигнала x_* сохранилась только часть спектра, задаваемая множеством B. Если известно, что сигнал x_* удовлетворяет условию (10), то по полученному сигналу y_* можно однозначно восстановить исходный сигнал, решив экстремальную задачу (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Donoho D. L., Stark P. B. *Uncertainty principles and signal recovery* // SIAM J. of Appl. Math. 1989. Vol. 49. No 3. P. 906–931.