ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛП*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

17 декабря 2011 г.

Данный доклад является естественным дополнением к докладу [1].

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\begin{aligned} c[N] \times x[N] &\to \inf, \\ A[M,N] \times x[N] &= b[M], \\ x[N] &\geqslant \mathbb{O}[N]. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $x_0 = x_0[N]$ — базисный план (возможно, вырожденный) с носителем $N_+(x_0)$; $A[M, N_0]$, где $N_0 \supset N_+(x_0)$, $|N_0| = |M|$, — невырожденная базисная матрица, $B_0[N_0, M]$ — обратная базисная матрица. Такая ситуация возникает на каждом шаге модифицированного симплекс-метода. Вычислим двойственный вектор

$$u_0[M] = c[N_0] \times B_0[N_0, M] \tag{2}$$

и вектор оценок

$$\Delta_0[N \setminus N_0] = u_0[M] \times A[M, N \setminus N_0] - c[N \setminus N_0]. \tag{3}$$

Цель доклада — дать простое доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. *Если $\Delta_0[j] \leqslant 0$ при всех $j \in N \setminus N_0$, то x_0 — оптимальный план. Если $\Delta_0[j] < 0$ при всех $j \in N \setminus N_0$, то x_0 — единственное решение задачи* (1).

Доказательство. Согласно (2), (3)

$$\Delta_0[N \setminus N_0] = c[N_0] \times B_0[N_0, M] \times A[M, N \setminus N_0] - c[N \setminus N_0].$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

Введём матрицу $Z_0 = Z_0[N, N \setminus N_0]$ по формулам

$$\begin{aligned} Z_0[N_0, N \setminus N_0] &= B_0[N_0, M] \times A[M, N \setminus N_0], \\ Z_0[N \setminus N_0, N \setminus N_0] &= -E[N \setminus N_0, N \setminus N_0]. \end{aligned} \tag{4}$$

В этом случае

$$\Delta_0[N \setminus N_0] = c[N] \times Z_0[N, N \setminus N_0]. \tag{5}$$

Действительно, в силу (4)

$$\begin{gathered} c[N] \times Z_0[N, N \setminus N_0] = c[N_0] \times Z_0[N_0, N \setminus N_0] + \\ + c[N \setminus N_0] \times Z_0[N \setminus N_0, N \setminus N_0] = c[N_0] \times B_0[N_0, M] \times A[M, N \setminus N_0] - \\ - c[N \setminus N_0] \times E[N \setminus N_0, N \setminus N_0] = \Delta_0[N \setminus N_0]. \end{gathered}$$

Далее, возьмём произвольный план $x = x[N]$ задачи (1) и покажем, что

$$x[N] = x_0[N] - Z_0[N, N \setminus N_0] \times x[N \setminus N_0]. \tag{6}$$

Будем проверять это равенство справа налево. Имеем

$$x_0[N \setminus N_0] - Z_0[N \setminus N_0, N \setminus N_0] \times x[N \setminus N_0] = E[N \setminus N_0, N \setminus N_0] \times x[N \setminus N_0] = x[N \setminus N_0].$$

Учитывая, что $A[M, N] \times x[N] = b[M]$ и $x_0[N_0] = B_0[N_0, M] \times b[M]$, получаем

$$\begin{gathered} x_0[N_0] - Z_0[N_0, N \setminus N_0] \times x[N \setminus N_0] = x_0[N_0] - B_0[N_0, M] \times \\ \times \big(A[M, N \setminus N_0] \times x[N \setminus N_0] + A[M, N_0] \times x[N_0] - A[M, N_0] \times x[N_0] \big) = \\ = x_0[N_0] - B_0[N_0, M] \times \big(A[M, N] \times x[N] \big) + B_0[N_0, M] \times A[M, N_0] \times x[N_0] = \\ = x_0[N_0] - B_0[N_0, M] \times b[M] + x[N_0] = x[N_0]. \end{gathered}$$

Формула (6) установлена.

Умножим (6) скалярно на $c[N]$. Согласно (5) придём к равенству

$$\begin{aligned} c[N] \times x[N] &= c[N] \times x_0[N] - c[N] \times Z_0[N, N \setminus N_0] \times x[N \setminus N_0] = \\ &= c[N] \times x_0[N] - \Delta_0[N \setminus N_0] \times x[N \setminus N_0]. \end{aligned} \tag{7}$$

По условию $x[N \setminus N_0] \geqslant \mathbb{O}[N \setminus N_0]$. Если $\Delta_0[j] \leqslant 0$ при всех $j \in N \setminus N_0$, то $\langle c, x \rangle \geqslant \langle c, x_0 \rangle$ для всех планов x, то есть x_0 — оптимальный план.

Пусть $\Delta_0[j] < 0$ при всех $j \in N \setminus N_0$. Возьмём план x задачи (1), отличный от x_0. В силу (6) среди неотрицательных компонент вектора $x[N \setminus N_0]$ имеется хотя бы одна положительная. На основании (7) получаем $\langle c, x \rangle > \langle c, x_0 \rangle$. Это значит, что x_0 — единственное решение задачи (1).

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонова И. В., Даугавет В. А. *Вырожденность в линейном программировании* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 11 декабря 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1211`)