ВЗВЕШЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО СФЕРЕ*

Н. О. Котелина nad7175@yandex.ru

А. Б. Певный pevnyi@syktsu.ru

19 ноября 2011 г.

В докладе рассматриваются взвешенные сферические полудизайны и связанные с ними кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере.

1°. Зафиксируем натуральные числа $n \geqslant 2$ и чётное t. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$. Пусть

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара $(\Phi,\, W)$, где $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, называется взвешенным сферическим t-полудизайном, если выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{m} W_i[\langle\varphi_i, x\rangle]^t = c_t\|x\|^t \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где

$$c_t = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}. \tag{2}$$

Числа W_i называются весами.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Тождество (1) будем называть тождеством Варинга, в честь английского математика Э. Варинга (1734–1798), который интересовался представлением формы $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{t}{2}}$ в виде суммы t-х степеней линейных форм (см. [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть* $(\Phi,\, W)$ *— взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда* $(\Phi,\, W)$ *— взвешенный сферический p-полудизайн для* $p = 2, 4, \ldots, t$.

Доказательство. Введём обозначения:

$$S_p(x) = \sum_{i=1}^{m} W_i[\langle \varphi_i,\, x\rangle]^p, \quad \omega_p(x) = \|x\|^p, \qquad p = 2, 4, \ldots, t.$$

Применим к обеим частям тождества (1) оператор Лапласа Δ. После первого применения оператора Лапласа получим равенство

$$t(t-1)S_{t-2}(x) = c_t\, t(t+n-2)\, \omega_{t-2}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что $(\Phi,\, W)$ является взвешенным сферическим полудизайном порядка $(t-2)$ с константой

$$c_{t-2} = c_t\, \frac{t+n-2}{t-1} = \frac{(t-3)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-4)}.$$

Применяя далее оператор Лапласа, получаем, что $(\Phi,\, W)$ является взвешенным сферическим полудизайном порядков $t-4,\ t-6, \ldots, 2$. □

2°. В работе [2] приведено определение сферического t-дизайна с помощью системы тождеств. Дадим аналогичное определение взвешенного сферического t-дизайна. Пусть теперь t — положительное целое число, условие чётности не требуется.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара $(\Phi,\, W)$, где $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, называется взвешенным сферическим t-дизайном, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^{m} W_i[\langle \varphi_i, x\rangle]^p = \begin{cases} 0, & p \text{ нечётное, } p \leqslant t, \\ c_p\|x\|^p, & p \text{ чётное, } p \leqslant t. \end{cases} \tag{3}$$

3°. Приведём пример взвешенного сферического полудизайна. В [1] упоминается тождество Лукаса (1877):

$$8\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \sum^{4}(x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = 12\|x\|^4, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Здесь запись $\sum^4(x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4$ означает, что суммирование ведётся по всевозможным комбинациям знаков $+$, $-$. Всего таких комбинаций будет 4. Из тождества (4) получим тождество Варинга и взвешенный сферический 4-полудизайн. Для этого в правой части должно стоять выражение $c_4\|x\|^4$. Заметим, что при $n = 3$ константа c_4 равна $\frac{1}{5}$, и тогда тождество Варинга будет иметь вид

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \frac{1}{60}\sum^{4}(x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4.$$

Рассмотрим орты e_i, $\ i \in 1:3$, и векторы $\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \pm 1, \pm 1)$, $i \in 1:4$. Перепишем последнее тождество с использованием введённых обозначений:

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^{3}[\langle e_i, x\rangle]^4 + \frac{3}{20}\sum_{i=1}^{4}[\langle \varphi_i, x\rangle]^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4. \tag{5}$$

Осюда следует, что $(\Phi,\, W)$, где

$$\begin{aligned} \Phi &= \{e_i, \quad i \in 1:3; \quad \varphi_i, \quad i \in 1:4\}, \\ W &= \big(\tfrac{2}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}\big), \end{aligned}$$

является взвешенным сферическим 4-полудизайном. Рассмотрим пару $(\Phi_0,\, W_0)$, где

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \{\pm e_i, \quad i \in 1:3; \quad \pm\varphi_i, \quad i \in 1:4\}, \\ W_0 &= \big(\tfrac{1}{15}, \ldots, \tfrac{1}{15}, \tfrac{3}{40}, \ldots, \tfrac{3}{40}\big) \end{aligned}$$

(в W_0 число $\frac{1}{15}$ входит 6 раз, $\frac{3}{40}$ — 8 раз). Тогда $(\Phi_0,\, W_0)$ будет взвешенным сферическим 5-дизайном. В системе (3) тождества для чётных $p \leqslant 5$ выполняются в силу (5) и предложения 1, а тождества для нечётных $p \leqslant 5$ выполняются в силу симметричности $(\Phi_0,\, W_0)$.

Существует простая геометрическая интерпретация векторов из системы Φ_0: $\pm e_i$ — вершины октаэдра, $\pm\varphi_i$ — проекции середин граней октаэдра на сферу S^2 (см. книгу И. П. Мысовских [3]).

4°. Пусть t чётное, $t \geqslant 2$. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы пара* (Φ, W), *где* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, *была взвешенным сферическим* t*-полудизайном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \sum_{i=1}^m W_i\, Q(\varphi_i) \tag{6}$$

для любого однородного полинома $Q(x)$ *степени* t. *Здесь* σ_n *— площадь сферы* S^{n-1}, $\sigma_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2})$.

Напомним, что однородный полином степени t записывается в виде

$$Q(x) = \sum_{|k|=t} a(k) x^k, \tag{7}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами (мультииндекс), $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $x^k = x^{k_1} \cdots x^{k_n}$.

Замечание. Для сферических дизайнов с равными весами эту теорему доказал В. А. Юдин [2]. Ниже приводится доказательство, основанное на другой идее. Теорема 1 открывает новые пути для построения кубатурных формул для вычисления интегралов по сфере S^{n-1}.

Доказательство. Необходимость. Пусть (Φ, W) — взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда выполняется тождество (1):

$$S(x) := \sum_{i=1}^m W_i [\langle \varphi_i, x \rangle]^t = c_t \|x\|^t \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим вектор $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{in})$ и применим мультииндексную технику:

$$[\langle \varphi_i, x \rangle]^t = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!} (\varphi_{i1} x_1)^{k_1} \ldots (\varphi_{in} x_n)^{k_n} = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!} \varphi_i^k x^k.$$

Здесь $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $k! = k_1! \cdots k_n!$. Для $S(x)$ получим выражение

$$S(x) = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!} \Big(\sum_{i=1}^m W_i \varphi_i^k \Big) x^k.$$

Значит, $S(x)$ — это однородный полином степени t. Введём обозначения $s = \frac{t}{2}$ и $y_i = x_i^2$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда правая часть в (1) запишется в виде

$$R(x) := c_t \|x\|^t = c_t (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{t}{2}} = c_t (y_1 + \cdots + y_n)^s = c_t \sum_{|l|=s} \frac{s!}{l!} y^l = c_t \sum_{|l|=s} \frac{s!}{l!} x^{2l}.$$

Функция $R(x)$ также является однородным полиномом степени t. Так как $S(x) \equiv R(x)$, то их коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Рассмотрим два случая.

Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$ и хоть одно k_j нечётно. Тогда

$$\frac{t!}{k!} \sum_{i=1}^{m} W_i \, \varphi_i^k = 0. \tag{8}$$

Пусть в $k = (k_1, \dots, k_n)$ все k_j чётные, $k_j = 2l_j$, $l_j \in \mathbb{Z}$, $l_j \geqslant 0$. Тогда

$$\frac{t!}{k!} \sum_{i=1}^{m} W_i \, \varphi_i^k = c_t \frac{s!}{l!}. \tag{9}$$

Так как любой однородный полином степени t представляется в виде (7), то достаточно доказать, что равенство (6) выполняется для $Q(x) = x^k$, $|k| = t$. Здесь $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. Если хоть одно k_j нечётно, то в силу (8) имеем

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x^k \, dS = 0 = \sum_{i=1}^{m} W_i \, \varphi_i^k,$$

то есть для $Q(x) = x^k$ выполняется равенство (6).

Пусть теперь k представляется в виде $k = 2l$, где $l = (l_1, \dots, l_n)$, $|l| = s$. В левой части (6) получим интеграл Дирихле (см. [4])

$$I(k) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x^k \, dS = \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!!}{n(n+2) \cdots (n + |k| - 2)}. \tag{10}$$

Здесь $(-1)!! = 1$.

В правой части (6) стоит сумма, которая в силу (9) представляется в виде

$$T(k) := \sum_{i=1}^{m} W_i \, \varphi_i^k = \frac{k!}{t!} c_t \cdot \frac{s!}{l!} = \frac{k_1! \cdots k_n!}{t!} \cdot \frac{(t-1)!!}{n(n+2) \cdots (n+t-2)} \cdot \frac{s!}{l_1! \cdots l_n!}.$$

Имеем

$$\frac{(t-1)!!}{t!} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots t} = \frac{1}{2^s s!}.$$

Далее, при чётных $k_1, \dots, k_n$ справедливы равенства

$$k_j! = (k_j - 1)!! \, 2^{l_j} \, l_j!$$

и

$$k_1! \cdots k_n! = (k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!! \, 2^s \, l_1! \cdots l_n!.$$

Значит,

$$T(k) = \frac{(k_1-1)!!\cdots(k_n-1)!!\,2^s\,l_1!\cdots l_n!}{2^s s!}\cdot\frac{s!}{l_1!\cdots l_n!}\cdot\frac{1}{n(n+2)\cdots(n+t-2)} = \\ = \frac{(k_1-1)!!\cdots(k_n-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}.$$

Получаем, что $I(k) = T(k)$, и для $Q(x) = x^k$ выполняется равенство (6).

Необходимость доказана.

Достаточность. Доказывается так же, как и необходимость, но рассуждениями “в обратном порядке”. $\square$

5°. Покажем, как можно использовать теорему 1 в части необходимости. Пусть $(\Phi,\, W)$ — взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда для любого однородного полинома $Q(x)$ степени t справедливо равенство

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \sum_{i=1}^{m} W_i\, Q(\varphi_i). \tag{11}$$

Так как $(\Phi,\, W)$ является также p-полудизайном для $p = 2, 4, \ldots, t$, то равенство (11) выполняется для любого полинома вида

$$Q(x) = \sum_{|i|=p} a(i)x^i, \qquad p = 2, 4, \ldots, t.$$

Равенство (11) выполняется и для $p = 0$. В этом случае имеем $Q(x) \equiv C$ и

$$\frac{1}{\sigma_n} C\sigma_n = \sum_{i=1}^{m} W_i\, C = C.$$

Чтобы кубатурная формула (11) точно интегрировала полиномы нечётной степени, добавляют узлы $-\varphi_1,\, -\varphi_2, \ldots, -\varphi_m$. Получаем кубатурную формулу

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\big(W_i(Q(\varphi_i) + Q(-\varphi_i))\big). \tag{12}$$

Такая формула будет точной для любого полинома $Q(x)$ степени $\leqslant\, t+1$. Действительно, любой полином степени не выше $t+1$ представляется в виде $Q(x) = \sum_{p=0}^{t+1} Q_p(x)$, где $Q_p(x)$ — однородные полиномы степени p.

6°. Вернёмся к системе $(\Phi_0,\, W_0)$ из примера в пункте 3. Для системы Φ_0 получаем кубатурную формулу со степенью точности $d=5$:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x)\,dS \approx \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{3}\bigl(f(e_i)+f(-e_i)\bigr)+\frac{3}{40}\sum_{i=1}^{4}\bigl(f(\varphi_i)+f(-\varphi_i)\bigr). \qquad (13)$$

Действительно, формула (13) будет точна для любого полинома $f(x)$ степени не выше 5. Легко проверяется, что она не точна для полинома $f(x)=x_1^6$. В этом случае $\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} x_1^6\,dS=\frac{1}{7}$, а правая часть равна $\frac{7}{45}$. Формулу (13) будем называть октаэдрической. Аналогичную формулу построим в $\mathbb{R}^n$. Получим тождество

$$A\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + B\sum^{2^{n-1}}\Bigl(\frac{x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n}{\sqrt{n}}\Bigr)^4 = c_4\|x\|^4, \qquad x\in\mathbb{R}^n. \qquad (14)$$

В левой части формулы (14) стоит симметрический полином от $x_1^2,\ldots,x_n^2$. Поэтому достаточно приравнять коэффициенты при x_1^4 и $x_1^2x_2^2$. Заметим, что $c_4=\frac{3}{n(n+2)}$. Приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} x_1^4:&\qquad A+\frac{B\cdot 2^{n-1}}{n^2}=\frac{3}{n(n+2)},\\ x_1^2x_2^2:&\qquad B\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{4!}{2!\,2!\,n^2}=\frac{3}{n(n+2)}\cdot 2, \end{aligned}$$

откуда $B=\frac{n}{2^{n-1}(n+2)}$, $A=\frac{2}{n(n+2)}$. В результате имеем кубатурную формулу

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} f(x)\,dS \approx \frac{A}{2}\sum_{i=1}^{n}\bigl(f(e_i)+f(-e_i)\bigr)+\frac{B}{2}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}\bigl(f(\varphi_i)+f(-\varphi_i)\bigr), \qquad (15)$$

где e_i — единичные орты, $\varphi_i=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\pm1,\ldots,\pm1)$. Число узлов в этой формуле равно $N=2n+2^n$. Степень точности формулы равна 5. По аналогии с $n=3$ получаем, что $\pm e_i$ — это вершины гипероктаэдра O_n, $\pm\varphi_i$ — проекции центров граней $(n-1)$-мерных граней O_n на S^{n-1}. В книге И. П. Мысовских [3, с. 314] рассматривается формула, в которой используются проекции середин всех рёбер вместо векторов φ_i. Такая формула также имеет степень точности $d=5$. Число узлов в формуле И. П. Мысовских равно $2n^2$. Если сравнивать число узлов в формуле (15) и в формуле И. П. Мысовских, то при $n=3,4,5$ число узлов в формуле (15) меньше, чем в формуле Мысовских.

Замечание. Легко проверить, что степень точности в (15) действительно равна 5. Для этого достаточно показать, что для $f(x)=x_1^6$ формула не точна.

Действительно, в этом случае, по формуле (10)

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} x_1^6\,dS = \frac{15}{n^3+6n^2+8n},$$

а правая часть равна $\frac{2n+1}{n^3+2n^2}$. Равенство между этими двумя величинами будет только при $n=1$, $n=2$.

7°. Кубатурная формула со степенью точности 9. Приведём ещё один пример построения кубатурной формулы. Данная кубатурная формула встречается у В. И. Лебедева (см. [5]). Наш способ построения отличается от способа В. И. Лебедева. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим множества векторов $\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^6 = \{\pm e_i\}_{i=1}^3$, — вершины октаэдра, $\{x_i^{(1)}\}_{i=1}^8 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm1,\pm1,\pm1)\right\}$ — проекции центров граней на сферу. Последняя запись подразумевает, что используются все 8 возможных комбинаций знаков $\pm$. Получившиеся 8 векторов обозначены $x_i^{(1)}$, $i\in 1:8$. На каждом ребре октаэдра с вершинами $\{\pm e_i\}_{i=1}^3$ возьмём по две симметрично расположенные точки a и b. Пусть, например, это ребро соединяет вершины $V_1=(\pm1,0,0)$ и $V_2=(0,\pm1,0)$. Тогда $a=(\pm(1-\lambda),\pm\lambda,0)$, $b=(\pm\lambda,\pm(1-\lambda),0)$, где $\lambda\in(0,1)$.

Проектируем все получившиеся точки на S^2 и получаем 24 узла следующего вида:

$$\begin{aligned}\{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{24} =&\{(\pm p,\pm q,0),(\pm q,\pm p,0),(\pm p,0,\pm q),(\pm q,0,\pm p),\\ &(0,\pm p,\pm q),(\pm q,\pm p,0)\},\end{aligned}$$

где $p^2+q^2=1$. Найдём p из интервала $(0,1)$, при котором система

$$\Phi = \{x_i^{(0)}\}_{i=1}^6 \cup \{x_i^{(1)}\}_{i=1}^8 \cup \{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{24}$$

будет сферическим взвешенным 9-дизайном. Для этого при некоторых A, B, C, p должно выполняться тождество Варинга:

$$A\sum_{i=1}^{6}[\langle x_i^{(0)},x\rangle]^8 + B\sum_{i=1}^{8}[\langle x_i^{(1)},x\rangle]^8 + C\sum_{i=1}^{24}[\langle x_i^{(2)},x\rangle]^8 = c_8\|x\|^8$$

для всех $x\in\mathbb{R}^3$. Введём обозначения

$$\begin{aligned}S(x) := A\sum_{i=1}^{3}2x_i^8 + B\sum^{8}\frac{1}{81}(\pm x_1\pm x_2\pm x_3)^8 + C\sum^{4}\big[(\pm px_1\pm qx_2)^8 +\\ + (\pm qx_1\pm px_2)^8 + (\pm px_1\pm qx_3)^8 + (\pm qx_1\pm px_3)^8 + (\pm px_2\pm qx_3)^8 +\\ + (\pm qx^2\pm px^3)^8\big] = \frac{1}{9}\|x\|^8 =: R(x).\end{aligned}$$

Так как $S(x)$ и $R(x)$ симметрические полиномы от x_1^2, x_2^2, x_3^2, то, чтобы это тождество было верным, достаточно приравнять коэффициенты при x_1^8, $x_1^6x_2^2$, $x_1^4x_2^4$, $x_1^4x_2^2x_3^2$. Получим систему

$$\begin{gathered}2A + \frac{8}{81}B + 4C(2p^8 + 2q^8) = \frac{1}{9},\\ \frac{224}{81}B + 4C(28p^6q^2 + 28q^6p^2) = \frac{4}{9},\\ \frac{560}{81}B + 4C(70p^4q^4 + 70q^4p^4) = \frac{6}{9},\\ \frac{3360}{81}B = \frac{12}{9},\end{gathered}$$

откуда следует, что $A = \frac{1}{105}$, $B = \frac{9}{280}$, $C = \frac{1}{35}$, $p = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} = 0.8880\ldots$, $q = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = 0.4597\ldots$. При этом $6A + 8B + 24C = 1$. Таким образом, (Φ, W) является взвешенным сферическим 9-дизайном с вектором весов $W = (A, \ldots, A, B, \ldots, B, C, \ldots, C)$, где A встречается 6 раз, B встречается 8 раз, C встречается 24 раза. Можно записать кубатурную формулу:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x)\,dS \approx \frac{1}{105}\sum_{i=1}^{6} f\big(x_i^{(0)}\big) + \frac{9}{280}\sum_{i=1}^{8} f\big(x_i^{(1)}\big) + \frac{1}{35}\sum_{i=1}^{24} f\big(x_i^{(2)}\big), \tag{16}$$

причём степень точности данной формулы равна 9, не больше. Действительно, при подстановке $f(x) = x_1^{10}$, получим по формуле (10)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} x_1^{10}\,dS = \frac{1}{11}.$$

С другой стороны правая часть равна $\frac{17}{189}$.

З а м е ч а н и е. В статье В. И. Лебедева [5] используется другой способ определения неизвестных A, B, C, p. Опираясь на теорему С. Л. Соболева [6] в [5] показывается, что для точности кубатурной формулы на полиномах степени не выше 9, достаточно, чтобы эта формула была точна для четырёх полиномов

$$1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_2^2, \tag{17}$$

где $\sigma_2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$, $\sigma_3 = x_1^2x_2^2x_3^2$. Эти полиномы подставляются в формулу с неопределёнными параметрами A, B, C, p и получаются 4 уравнения для их определения. При этом приходится вычислять интегралы по сфере от полиномов (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No. 463. P. 1–155.

2. Юдин В. А. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 3. С. 39–45.

3. Мысовских И. П. *Интерполяционные кубатурные формулы* М.: Наука. 1981. 336 с.

4. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml`).

5. Лебедев В. И. *Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса-Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 1. С. 48–54.

6. Соболев С. Л. *О формулах механических квадратур на поверхности сферы* // Сибирский матем. ж. 1962. Т. 3. № 5. С. 769–796.