МЕТОД ПОПЕРЕМЕННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАВНОУГОЛЬНЫХ ЖЁСТКИХ ФРЕЙМОВ*

М. Н. Истомина — istomina@syktsu.ru
А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

2 июля 2008 г.

В докладе исследуется метод построения равноугольных жёстких фреймов, предложенный в [1].

1°. Пусть $m > n \geqslant 2$ и столбцы матрицы $\varPhi = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$ размера $n \times m$ образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$. Жёсткость фрейма равносильна выполнению равенства $\varPhi\varPhi^T = A\, I_n$, где A — константа, I_n — единичная матрица порядка n. Равноугольность означает, что

$$\|\varphi_k\| = 1 \text{ при всех } k \in 1:m \text{ и } \bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s\rangle\bigr| = c \text{ при } k \neq s.$$

Это определение использовалось в докладе [2]. Для равноугольного жёсткого фрейма константы A и c имеют вид

$$A = \frac{m}{n}, \qquad c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}}\,.$$

Рассмотрим матрицу Грама $G = \bigl\{\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\bigr\}_{i,j=1}^m = \varPhi^T\varPhi$. Матрицы G и $\varPhi\varPhi^T$ имеют одинаковые ненулевые собственные числа. Но $\varPhi\varPhi^T = A\, I_n$ имеет собственные числа $\lambda_k = A$, $k \in 1:n$. Поэтому G имеет n собственных чисел $\lambda_k = A$, $k \in 1:n$, и $m-n$ собственных чисел $\lambda_k = 0$, $k \in n+1:m$.

2°. Для чисел $A = \frac{m}{n}$ и $c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}$ введём два множества матриц:

$$\mathscr{G}_A = \Bigl\{ G \in \mathbb{R}^{m\times m} \;\Big|\; G = G^T;\ G \text{ имеет собственные числа } (\underbrace{A,\ldots,A}_{n \text{ раз}}, 0, \ldots, 0)\Bigr\},$$

$$\mathscr{H}_c^0 = \Bigl\{ H \in \mathbb{R}^{m\times m} \;\Big|\; H = H^T;\ H[k,k] = 1,\ k \in 1:m;\ \bigl|H[k,l]\bigr| \leqslant c \text{ при } k \neq l\Bigr\}.$$

Множество $\mathscr{H}_c^0$ является ограниченным и выпуклым.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Матрица Грама G равноугольного жёсткого фрейма принадлежит как $\mathscr{G}_A$, так и $\mathscr{H}_c^0$. Справедливо и обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если существует матрица $G_* \in \mathscr{G}_A \cap \mathscr{H}_c^0$, то существует равноугольный жёсткий фрейм из m векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Поскольку $G_* \in \mathscr{G}_A$, то G_* можно представить в виде

$$G_* = P^T \Lambda\, P,$$

где P — ортогональная матрица,

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\underbrace{A, \ldots, A}_{n \text{ раз}}, 0, \ldots, 0).$$

Введём матрицу V размера $n \times m$:

$$V = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sqrt{A} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{A} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{A} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right].$$

Тогда $V^T V = \Lambda$. Положим $\Phi = VP$ — эта матрица размера $n \times m$ как раз и будет матрицей равноугольного жёсткого фрейма.

Действительно,

$$\Phi^T \Phi = P^T V^T V P = P^T \Lambda\, P = G_*,$$

то есть G_* является матрицей Грама системы столбцов

$$\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]. \tag{1}$$

Поскольку матрицы $\Phi\Phi^T$ и $\Phi^T\Phi = G_*$ имеют одинаковые ненулевые собственные числа, то $\Phi\Phi^T$ имеет собственные числа $\lambda_k = A$, $k \in 1 : n$. Других собственных чисел нет. Поэтому

$$\Phi\Phi^T = A\, I_n,$$

так что система (1) является жёстким фреймом.

Поскольку $G_* \in \mathscr{H}_c^0$, то

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|^2 &= G_*[k,k] = 1, \quad k \in 1 : m, \\ \big|\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle\big| &= \big|G_*[k,l]\big| \leqslant c, \quad k \neq l. \end{aligned} \tag{2}$$

Введём фреймовый потенциал

$$P(\Phi) = \sum_{k,l=1}^{m} \big[\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle\big]^2.$$

Ввиду (2) справедлива оценка

$$P(\Phi) \leqslant m + (m^2 - m)\, c^2 = m + m\,(m-1)\, \frac{m-n}{n\,(m-1)} =$$

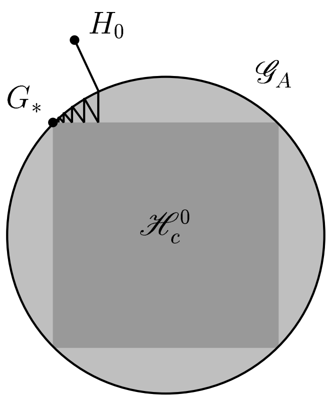
$$= \frac{m\,n + m\,(m-n)}{n} = \frac{m^2}{n}\,.$$

С другой стороны, для $P(\Phi)$ справедлива оценка [3]

$$P(\Phi) \geqslant \frac{m^2}{n}\,.$$

Если хоть в одном из неравенств $\big|\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle\big| \leqslant c$ будет строгое неравенство, то $P(\Phi) < \frac{m^2}{n}$, что невозможно. Значит, $\big|\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle\big| = c$ при всех $k \neq l$, то есть Φ — равноугольный жёсткий фрейм. $\square$

З а м е ч а н и е. В точке пересечения G_* множеств $\mathscr{G}_A$ и $\mathscr{H}_c^0$ все ограничения, задающие множество $\mathscr{H}_c^0$, выполняются как равенства: $\big|G_*[k,l]\big| = c$ при всех $k \neq l$. С геометрической точки зрения G_* является крайней точкой множества $\mathscr{H}_c^0$.



Поясним рисунок. Все матрицы G из $\mathscr{G}_A$ имеют одинаковые нормы:

$$\|G\|^2 = \sum_{k,l=1}^{m} \big(G[k,l]\big)^2 = \operatorname{tr}(G^2) = nA^2 = \frac{m^2}{n}\,,$$

то есть множество $\mathscr{G}_A$ лежит на сфере S_R радиуса $R = m/\sqrt{n}\,$.

Все крайние точки множества $\mathscr{H}_c^0$ имеют вид

$$G_*[k,k] = 1, \quad k \in 1:m; \qquad G_*[k,l] = \pm c, \quad k \neq l,$$

и также лежат на сфере S_R:

$$\|G_*\|^2 = m + m\,(m-1)\, c^2 = \frac{m^2}{n} = R^2.$$

Множество $\mathscr{G}_A$ заполняет не всю сферу S_R. Найти точки пересечения $\mathscr{G}_A$ и $\mathscr{H}_c^0$ нам поможет метод попеременного проектирования.

СЛЕДСТВИЕ. *Для существования равноугольного жёсткого фрейма необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\mathscr{G}_A \cap \mathscr{H}_c^0 \neq \varnothing.$$

3°. Метод попеременного проектирования

Для нахождения общей точки множеств $\mathscr{G}_A$ и $\mathscr{H}_c^0$ будем решать экстремальную задачу

$$\|G-H\|^2 \to \min_{G\in\mathscr{G}_A,\, H\in\mathscr{H}_c^0}, \tag{3}$$

где $\|G-H\|^2 = \sum_{k,l=1}^m \big(G[k,l]-H[k,l]\big)^2$.

Задачу (3) решаем методом попеременного проектирования (см. статью [1] — там указано, что попеременное проектирование использовал ещё Джон фон Нейман в 1938 г. для определения общей точки двух подпространств в гильбертовом пространстве). В методе строится последовательность матриц

$$H_0, G_0, H_1, G_1, \ldots, H_k, G_k, \ldots .$$

Проектирование матрицы H_k на множество $\mathscr{G}_A$

Имея матрицу H_k, решаем задачу

$$\|G-H_k\|^2 \to \min_{G\in\mathscr{G}_A}. \tag{4}$$

Решение этой задачи обозначаем G_k. Это решение существует и строится следующим образом.

Представим H_k в виде

$$H_k = U\varLambda U^T,$$

где U — ортогональная матрица размера $m\times m$,

$$\varLambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m), \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m.$$

Следующая замечательная теорема установлена в [1]. Нам удалось найти более простое её доказательство.

ТЕОРЕМА. *Матрица*

$$G_k = A\,U_n\,U_n^T,$$

где U_n — матрица из первых n столбцов матрицы U, является решением задачи (4).

Доказательство. Введём скалярное произведение матриц

$$\langle H,G\rangle = \sum_{i,k=1}^m H[i,k]\,G[i,k].$$

Если матрица G симметрична, то $\langle H, G\rangle = \mathrm{tr}(HG)$. Действительно,

$$\mathrm{tr}(HG) = \sum_{i=1}^{m} (H\,G)[i,i] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} H[i,k]\,G[k,i] = \sum_{i,k=1}^{m} H[i,k]\,G[i,k].$$

При $H = G$ получаем $\|G\|^2 = \mathrm{tr}(G^2)$.

Целевая функция в задаче (4) записывается в виде

$$\|G - H_k\|^2 = \|G\|^2 - 2\langle G, H_k\rangle + \|H_k\|^2.$$

Для $G \in \mathscr{G}_A$ имеем

$$\|G\|^2 = \mathrm{tr}(G^2) = \text{ сумме собственных чисел } G^2 \; = nA^2.$$

Поэтому задача (4) равносильна задаче

$$\langle H_k, G\rangle \to \max_{G\in\mathscr{G}_A}. \tag{5}$$

У нас $H_k = U\Lambda U^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Отсюда

$$\langle H_k, G\rangle = \mathrm{tr}(H_k\,G) = \mathrm{tr}(U\Lambda U^T G) = \mathrm{tr}(U^T G\,U\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} x_i\,\lambda_i,$$

где x_i — диагональные элементы матрицы $U^T G\,U$. Справедливы неравенства $0 \leqslant \langle U^T G\,U y, y\rangle \leqslant A\|y\|^2$ для любого $y \in \mathbb{R}^m$. Поэтому при y, равном i-му орту e_i, получим

$$0 \leqslant x_i = \langle G\,U e_i, U e_i\rangle \leqslant A\,\|U e_i\| = A, \qquad i \in 1:m.$$

Кроме того, $\sum_{i=1}^m x_i = \mathrm{tr}(U^T G\,U) = \mathrm{tr}(G\,U\,U^T) = \mathrm{tr}(G) = nA$.

Приходим к задаче

$$f(x) := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,x_i \to \max,$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant A, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = nA.$$

Поскольку $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m$, то решение очевидно: $x^* = (A, \ldots, A, 0, \ldots, 0)$, где A повторяется n раз, $f(x^*) = A\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Вернёмся к задаче (5). Для любой матрицы $G \in \mathscr{G}_A$

$$\langle H_k, G\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i\,\lambda_i \leqslant f(x^*) = A\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

Для матрицы $G_* = A\,U_n\,U_n^T$ (принадлежащей $\mathscr{G}_A$) будет

$$\langle H_k, G_*\rangle = A\ \mathrm{tr}(H_k\,U_n\,U_n^T) = A\ \mathrm{tr}(U_n^T H_k\,U_n). \tag{6}$$

Но столбцы U_n являются собственными векторами, соответствующими собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Поэтому $U_n^T H_k\,U_n = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Из (6) получаем

$$\langle H, G_*\rangle = A\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

Значит, G_* — решение задач (5) и (4). $\square$

Проектирование G_k на множество $\mathscr{H}_c^0$

Имея матрицу G_k, решаем задачу

$$\|G_k - H\|^2 \to \min_{H\in\mathscr{H}_c^0}. \tag{7}$$

Решение обозначаем H_{k+1}. Это очень простая задача, так как она распадается на отдельные одномерные подзадачи: для данного числа $G_k[i,j]$, где $i \neq j$, найти число $H[i,j] \in [-c, c]$, которое минимизирует величину $\big(G_k[i,j] - H[i,j]\big)^2$. Решением будет

$$H_{k+1}[i,j] = \begin{cases} G_k[i,j], & \text{если } G_k[i,j] \in [-c, c], \\ c\ \mathrm{sign}\,G_k[i,j] & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4°. Пример несходимости метода к решению задачи (3)

Пусть $n = 2$, $m = 3$. Тогда

$$A = \frac{m}{n} = \frac{3}{2}, \qquad c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}} = \frac{1}{2}\,.$$

В этом случае существует равноугольный жёсткий фрейм Мерседес-Бенц.

Возьмём в качестве начального приближения матрицу

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: I_3.$$

(это центральная точка множества $\mathscr{H}_c^0$). Справедливо равенство $H_0 = U\Lambda U^T$, где $U = I_3$, $\Lambda = I_3$. Имеем

$$U_n\,U_n^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По выше доказанной теореме проекцией H_0 на $\mathscr{G}_A$ является матрица

$$G_0 = A\,U_n\,U_n^T = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проекцией G_0 на $\mathscr{H}_c^0$ является матрица

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

совпадающая с H_0. В данном случае $H_k = H_0$ и $G_k = G_0$ для всех k, при этом пара $\{H_0, G_0\}$ не является решением задачи (3). Такую пару можно назвать точкой застревания. При её появлении метод нужно начать заново с нового начального приближения.

5°. Критерий конца итерационного процесса

Зададим малое $\varepsilon > 0$. Если после очередного проектирования на $\mathscr{H}_c^0$ выполнится неравенство

$$\|G_k - H_{k+1}\| < \varepsilon,$$

то вычисления прекращаем. По матрице H_{k+1} строим сигнатурную матрицу Q, полагая

$$\begin{aligned} &Q[i,j] = \operatorname{sign} H_{k+1}[i,j] \ \text{ при } \ i \neq j, \\ &Q[i,i] = 0, \quad i \in 1:m. \end{aligned} \tag{8}$$

Если матрица Q удовлетворяет уравнению

$$Q^2 = (m-1)\,I_m + \mu_{m,n}\,Q, \tag{9}$$

$$\mu_{m,n} = (m-2n)\sqrt{\frac{m-1}{n\,(m-n)}}\,,$$

то полагаем $G_* = I_m + c\,Q$ и находим равноугольный жёсткий фрейм по схеме, указанной в предложении из пункта 2° (в докладе [4] показано, что $G_* \in \mathscr{G}_A$).

Можно после нахождения каждой матрицы H_{k+1} строить Q по формуле (8) и проверять условие (9).

6°. Результаты численных расчётов

В качестве примера приведём результаты расчётов для случая $n = 7$, $m = 14$, когда

$$A = \frac{m}{n} = 2, \qquad c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}} = \frac{\sqrt{13}}{13}\,.$$

Вычисления проводились в системе Maple 7. В качестве начального приближения мы брали матрицу, на главной диагонали которой стоят 1, а внедиагональные элементы равны $\sqrt{c}$.

При $\varepsilon = 0.01$ неравенство $\|G_k - H_{k+1}\| < \varepsilon$ выполнилось на 79-м шаге. Далее строим сигнатурную матрицу по формуле

$$Q = \bigl\{Q[i,i] = 0, \quad Q[i,j] = \operatorname{sign} H_{79}[i,j] \text{ при } i \neq j\bigr\}$$

и проверяем выполнение равенства $Q^2 = 13\,I_{14}$.

Дальнейшие вычисления повторяют собой вычисления, приведённые в работе [4]: построение матрицы $G = I_{14} + c\,Q$, нахождение её ортогонального разложения $G = P^T \Lambda\, P$ и построение матрицы Φ размера 7×14:

$$\Phi^T = \begin{bmatrix}
-0.4214 & 0.3771 & 0.0602 & -0.6056 & 0.2329 & 0.1176 & 0.4899 \\
0.2649 & -0.1165 & 0.1489 & -0.6657 & -0.5434 & 0.3258 & 0.2253 \\
0.0696 & 0.2487 & 0.1128 & -0.2336 & 0.2358 & 0.8805 & -0.1903 \\
-0.3938 & -0.0810 & 0.7188 & -0.0499 & 0.3574 & -0.4319 & 0.0789 \\
-0.4429 & 0.2692 & 0.6080 & 0.0840 & -0.4522 & 0.3666 & 0.1230 \\
0.3823 & 0.2731 & 0.1848 & -0.6041 & 0.0578 & -0.6140 & 0.0412 \\
-0.0998 & 0.7667 & -0.2122 & 0.4032 & 0.0553 & 0.2972 & 0.3184 \\
0.5460 & -0.0037 & 0.7921 & -0.0205 & -0.0267 & 0.1240 & -0.2365 \\
0.3698 & 0.2590 & 0.2108 & 0.0260 & 0.8129 & 0.0407 & 0.2989 \\
-0.4481 & -0.6048 & 0.1208 & -0.0803 & -0.1906 & 0.0413 & 0.6127 \\
0.5252 & -0.6295 & -0.0046 & 0.0619 & 0.1867 & 0.4743 & 0.2520 \\
0.1454 & -0.0839 & 0.4286 & 0.7354 & -0.0093 & -0.0558 & 0.4933 \\
0.3719 & 0.0702 & -0.3355 & -0.0795 & -0.0595 & -0.1468 & 0.8445 \\
0.4111 & 0.4470 & 0.1149 & 0.1990 & -0.7211 & -0.2239 & 0.0889
\end{bmatrix}.$$

С помощью системы Maple 7 легко проверяются равенства $\Phi\Phi^T = 2\,I_7$ и $\Phi^T\Phi = G$. Значит, столбцы матрицы Φ образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^7$.

Аналогично с помощью Maple 7 построены равноугольные жёсткие фреймы в $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^9$. Для этого потребовалось 291 и 76 итераций соответственно, что явно меньше полного перебора, используемого в [4] для построения сигнатурной матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tropp J. A., Dhillon I. S., Heath R. W., Strohmer T. *Designing structured tight frames via an alternating projection method* // IEEE Trans. of Inform. Theory. 2005. V. 51. No. 1. P. 188–209.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные системы векторов и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0918`)

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Четвёртое определение жёсткого фрейма* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 мая 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530`)

4. Максименко В. В., Певный А. Б. *Существование равноугольных жёстких фреймов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 26 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0326`)