ПРИЛОЖЕНИЕ АЛЬТЕРНАНСНОЙ ТЕОРИИ: НАИЛУЧШИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

14 февраля 2013 г.

1°. Обозначим через $\mathcal{H}_m^n$ множество дробно-рациональных функций вида

$$H(X,\ t) = \frac{P(A,\ t)}{Q(B,\ t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i t^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k t^k}.$$

Здесь

$$X = (A,\ B) = (a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n,\ b_0,\ b_1, \ldots,\ b_m); \quad B \neq \mathbb{O}.$$

Возьмём непрерывную на отрезке $[c,\ d]$ функцию $f(t)$ и рассмотрим задачу наилучшего приближения

$$\varphi(X) := \max_{t\in[c,\ d]} \bigl| H(X,\ t) - f(t) \bigr| \to \min, \tag{1}$$

где минимум берётся по всем функциям $H(X,\ t)$ из $\mathcal{H}_m^n$, непрерывным на $[c,\ d]$. В докладе в качестве приложения альтернансной теории [1] будет получена альтернансная характеристика решения задачи (1).

2°. Отметим прежде всего, что в постановке задачи (1) можно ограничиться дробями, у которых знаменатель $Q(B,\ t)$ положителен на $[c,\ d]$. Действительно, если $Q(B,\ t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in [c,\ d]$, то в разложении полинома $Q(B,\ t)$ на множетели присутствует сомножитель $(t - t_0)^q$. В силу непрерывности дроби $H(X,\ t)$ на $[c,\ d]$ в разложении числителя $P(A,\ t)$ должен присутствовать сомножитель $(t-t_0)^p$ с $p \geqslant q$. Сократив дробь на $(t-t_0)^q$, придём к тождественному представлению дроби $H(X,\ t)$, в котором знаменатель уже не обращается в ноль при $t = t_0$. Таким путём можно избавиться от всех нулей дроби $H(X,\ t)$, принадлежащих отрезку $[c,\ d]$. После этого, умножив

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

при необходимости числитель и знаменатель на -1, получим представление с положительным знаменателем.

Обозначим

$$\sigma(X,\ t) = H(X,\ t) - f(t),$$
$$\Omega = \bigl\{X = (A,\ B) \mid Q(B,\ t) > 0 \text{ на } [c,\ d]\bigr\}.$$

Тогда задачу (1) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\varphi(X) := \max_{t\in[c,\ d]} \bigl|\sigma(X,\ t)\bigr| \to \min_{X\in\Omega}. \tag{2}$$

В Приложении А будет доказано, что задача (2) имеет решение.

В дальнейшем считаем, что аппроксимируемая функция $f(t)$ не совпадает с некоторой непрерывной на $[c,\ d]$ дробью из множества $\mathcal{H}_m^n$, то есть что

$$\varphi^* := \min_{X\in\Omega} \varphi(X) > 0.$$

3°. Введём функцию

$$F(X,\ t) = \tfrac{1}{2}\sigma^2(X,\ t)$$

и рассмотрим минимаксную задачу

$$\Phi(X) := \max_{t\in[c,\ d]} F(X,\ t) \to \min_{X\in\Omega}. \tag{3}$$

В силу равенства

$$\max_{t\in[c,\ d]} \bigl\{\tfrac{1}{2}\sigma^2(X,\ t)\bigr\} = \tfrac{1}{2}\Bigl(\max_{t\in[c,\ d]}\bigl|\sigma(X,\ t)\bigr|\Bigr)^2$$

множества решений задач (2) и (3) совпадают. При этом

$$R(X) := \bigl\{t \in [c,\ d] \mid F(X,\ t) = \Phi(X)\bigr\} =$$
$$= \bigl\{t \in [c,\ d] \mid \bigl|\sigma(X,\ t)\bigr| = \varphi(X)\bigr\}.$$

Последний факт связан с тем, что при $t_0 \in R(X)$ неравенства

$$F(X,\ t) \leqslant F(X,\ t_0) \quad \text{и} \quad \bigl|\sigma(X,\ t)\bigr| \leqslant \bigl|\sigma(X,\ t_0)\bigr|$$

равносильны.

Имеем

$$F'_X(X,\ t) = \frac{\sigma(X,\ t)}{Q(B,\ t)}\bigl(1,\ t, \ldots,\ t^n,$$
$$-H(X,\ t),\ -tH(X,\ t), \ldots,\ -t^m H(X,\ t)\bigr). \tag{4}$$

Значит, функция $F(X,\ t)$ непрерывна вместе с $F'_X(X,\ t)$ на $\Omega \times [c,\ d]$.

Обозначим

$$G(X) = \bigl\{F'_X(X,\ t) \mid t \in R(X)\bigr\},$$
$$C(X) = \operatorname{co} G(X).$$

Из минимаксной теории следует необходимое условие оптимальности [2, с. 243].

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы дробь $H(X^*,\ t)$ с $X^* \in \Omega$ была решением задачи* (2)*, необходимо, чтобы*

$$\mathbb{O} \in C(X^*). \tag{5}$$

Далее мы получим эквивалентную альтернансную форму условия (5). Но для этого потребуется некоторая подготовка.

4°. Определим *каноническое представление* дроби $H(X,\ t)$, принадлежащей множеству $\mathcal{H}^n_m$. Оно имеет вид

$$H(X,\ t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-\nu} \alpha_i t^i}{\sum_{k=0}^{m-\mu} \beta_k t^k} = \frac{u(t)}{v(t)}, \tag{6}$$

где $\alpha_{n-\nu} \neq 0$, $\beta_{m-\mu} = 1$ и полиномы $u(t)$ и $v(t)$ взаимно просты (не имеют общих корней – ни вещественных, ни комплексных). Переход к каноническому представлению осуществляется в три этапа:

1) в числителе и знаменателе дроби $H(X,\ t)$ отбрасываются старшие слагаемые с нулевыми коэффициентами;

2) числитель и знаменатель сокращаются на все общие множетели;

3) все коэффициенты числителя и знаменателя делятся на старший коэффициент знаменателя.

Число $d = \min\{\nu,\ \mu\}$ называется *дефектом* дроби $H(X,\ t)$. Если $H(X,\ t) \equiv$ $\equiv 0$, то есть $A = \mathbb{O}$, то по определению считаем, что

$$u(t) \equiv 0, \quad v(t) \equiv 1, \quad \nu = +\infty, \quad \mu = m, \quad d = m.$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы дробь $H(X^*,\ t)$ с $X^* \in \Omega$ и дефектом, равным d^*, была решением задачи* (2)*, необходимо и достаточно, чтобы нашлись $r+1$ точки максимального уклонения $t_0 < t_1 < \cdots < t_r$ из $R(X^*)$, где $r = n + m + 1 - d^*$, такие, что*

$$\sigma(X^*,\ t_i) = -\sigma(X^*,\ t_{i-1}), \quad i \in 1 : r. \tag{7}$$

Эта теорема называется теоремой Чебышёва, хотя в указанном виде её сформулировал и доказал Н. И. Ахиезер [3, с. 66–68].

Достаточность проверяется очень просто. Допустим, вопреки утверждению, что существует дробь $H(X_0,\ t)$ с $X_0 \in \Omega$, для которой $\varphi(X_0) < \varphi(X^*)$. Воспользуемся каноническим представлением $H(X^*,\ t) = u^*(t)/v^*(t)$. В силу непрерывности $H(X^*,\ t)$ на $[c,\ d]$ и взаимной простоты полиномов $u^*(t)$ и $v^*(t)$ знаменатель $v^*(t)$ не обращается в ноль на $[c,\ d]$. Запишем

$$H(X^*,\ t) - H(X_0,\ t) = \frac{u^*(t)}{v^*(t)} - \frac{P(A_0,\ t)}{Q(B_0,\ t)} = \frac{u^*(t)Q(B_0,\ t) - v^*(t)P(A_0,\ t)}{v^*(t)Q(B_0,\ t)}.$$

В числителе последней дроби стоит не равный тождественно нулю алгебраический полином, степень которого не превосходит следующей величины:

$$\max\bigl\{(n-\nu^*)+m,\ (m-\mu^*)+n\bigr\} = n+m-\min\{\nu^*,\ \mu^*\} = n+m-d^* = r-1.$$

Значит, разность $H(X^*,\ t) - H(X_0,\ t)$ может обращаться в ноль на отрезке $[c,\ d]$ не более $r-1$ раз.

Вместе с тем,

$$H(X^*,\ t_i) - H(X_0,\ t_i) = \sigma(X^*,\ t_i) - \sigma(X_0,\ t_i). \tag{8}$$

По определению $\bigl|\sigma(X^*,\ t_i)\bigr| = \varphi(X^*)$ и $\bigl|\sigma(X_0,\ t_i)\bigr| \leqslant \varphi(X_0) < \varphi(X^*)$. В таком случае знак разности $\sigma(X^*,\ t_i) - \sigma(X_0,\ t_i)$ совпадает со знаком $\sigma(X^*,\ t_i)$. На основании (7) и (8) заключаем, что непрерывная на отрезке $[c,\ d]$ функция $H(X^*,\ t) - H(X_0,\ t)$ r раз меняет знак и, как следствие по крайней мере r раз обращается в ноль. Но это противоречит указанной ранее оценке для количества нулей на $[c,\ d]$ разности $H(X^*,\ t) - H(X_0,\ t)$.

Таким образом, $\varphi(X) \geqslant \varphi(X^*)$ при всех $X \in \Omega$.

5°. Вернёмся к каноническому представлению (6) дроби $H(X,\ t)$ с $X \in \Omega$ и перепишем формулу (4) в виде

$$\begin{aligned} F'_X(X,\ t) &= \frac{\sigma(X,\ t)}{Q(B,\ t)}\Bigl(1,\ t, \dots,\ t^n,\ -\frac{u(t)}{v(t)},\ -t\frac{u(t)}{v(t)}, \dots,\ -t^m\frac{u(t)}{v(t)}\Bigr) = \\ &= \frac{\sigma(X,\ t)}{Q(B,\ t)v(t)}\bigl(v(t),\ tv(t), \dots,\ t^n v(t),\ -u(t),\ -tu(t), \dots,\ -t^m u(t)\bigr). \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим систему функций (полиномов)

$$v(t),\ tv(t), \dots,\ t^n v(t),\ -u(t),\ -tu(t), \dots,\ -t^m u(t). \tag{10}$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Система* (10) *содержит чебышёвскую на* $\mathbb{R}$ *подсистему, состоящую из* $r = n + m + 1 - d$ *функций; при этом остальные функции системы* (10) *являются линейными комбинациями функций чебышёвской подсистемы.*

Поясним содержание леммы. Обозначим через $W(t)$ вектор-функцию с компонентами (10), и пусть $N = 1 : n+m+2$. Компоненты вектор-функции $W(t)$ будем обозначать $W_k(t)$, $k \in N$. Утверждается, что существует подмножество $N' \subset N$, $|N'| = r$, такое, что функции $W_k(t)$, $k \in N'$, образуют чебышёвскую на $\mathbb{R}$ подсистему. Последнее означает, что любая линейная комбинация $\sum_{k \in N'} \gamma_k W_k(t)$, у которой не все коэффициенты γ_k равны нулю, может принимать нулевое значение не более чем в $r-1$ точках множества $\mathbb{R}$.

Имеется эквивалентное определение. Возьмём точки $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$ из $\mathbb{R}$ и рассмотрим матрицу W с элементами $W_{ki} = W_k(t_i)$, $k \in N'$, $i \in 1 : r$. Система $\big\{W_k(t)\big\}_{k \in N'}$ будет чебышёвской на $\mathbb{R}$, если при любых $t_1 < t_2 < \ldots < t_r$ из $\mathbb{R}$ столбцы матрицы W линейно независимы. Другими словами: если определители Δ, составленные из столбцов матрицы W, при любых $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$ из $\mathbb{R}$ отличны от нуля (и по непрерывности имеют одинаковый знак).

Во второй части основной леммы утверждается, что при каждом $k \in N \setminus N'$ справедливо представление

$$W_k(t) = \sum_{s \in N'} \gamma_{ks} W_s(t).$$

Доказательство основной леммы приводится в Приложении B.

6°. Нам потребуется ещё одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. *Пусть векторы $V_0[N]$, $V_1[N], \ldots,$ $V_p[N]$ аффинно независимы, и существует подмножество $N' \subset N$, такое, что при каждом $k \in N \setminus N'$*

$$V_i[k] = \sum_{s \in N'} \gamma_{ks} V_i[s], \quad i \in 0 : p.$$

Тогда векторы $V_0[N']$, $V_1[N'], \ldots,$ $V_p[N']$ также аффинно независимы.

Доказательство. Допустим противное. Тогда система линейных уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{p} \eta_i V_i[s] = 0, \ s \in N', \\ \sum_{i=0}^{p} \eta_i = 1 \end{gathered} \tag{11}$$

имеет нетривиальное решение. Возьмём $k \in N \setminus N'$ и запишем

$$\sum_{i=0}^{p} \eta_i V_i[k] = \sum_{i=0}^{p} \eta_i \sum_{s\in N'} \gamma_{ks} V_i[s] =$$
$$= \sum_{s\in N'} \gamma_{ks} \sum_{i=0}^{p} \eta_i V_i[s] = 0.$$

Значит, соотношение (11) выполняется при всех $s \in N$, что противоречит аффинной независимости векторов $V_i[N]$. □

7°. Переходим к доказательству необходимости условий в теореме 2.

По теореме 1, $\mathbb{O} \in C(X^*)$. Учитывая определение выпуклой оболочки $C(X^*)$ и лемму 1 из [1], заключаем, что найдутся точки максимального уклонения $t_0 < t_1 < \cdots < t_p$ из $R(X^*)$ и положительные числа η_i^*, в сумме равные единице, такие, что

$$\sum_{i=0}^{p} \eta_i^* F'_X(X^*,\ t_i) = \mathbb{O}.$$

При этом векторы $F'_X(X^*,\ t_i)$, $i \in 0:p$, аффинно независимы. Обозначим

$$\xi_i^* = \frac{\sigma(X^*,\ t_i)}{Q(B^*,\ t_i)v^*(t_i)}, \quad i \in 0:p.$$

Ясно, что числа ξ_i^* отличны от нуля. Согласно (9)

$$V_i^* := F'_X(X^*,\ t_i) = \xi_i^* W^*(t_i).$$

Напомним, что $N = 1 : n+m+2$. По определению векторы $V_i^* = V_i^*[N]$, $i \in 0:p$, аффинно независимы и

$$\sum_{i=0}^{p} \eta_i^* V_i^*[N] = \mathbb{O}[N]. \tag{12}$$

По основной лемме существует подмножество $N' \subset N$, $|N'| = r = n+m+$ $+1-d^*$, такое, что компоненты $W_k^*(t)$, $k \in N'$, вектор-функции $W^*(t)$ образуют чебышёвскую на $\mathbb{R}$ систему. Более того, при каждом $k \in N \setminus N'$ справедливо представление

$$W_k^*(t) = \sum_{s\in N'} \gamma_{ks}^* W_s^*(t).$$

В частности,

$$\xi_i^* W_k^*(t_i) = \sum_{s\in N'} \gamma_{ks}^* \big(\xi_i^* W_s^*(t_i)\big).$$

Это значит, что при при каждом $k \in N \setminus N'$

$$V_i^*[k] = \sum_{s \in N'} \gamma_{ks}^* V_i^*[s], \quad i \in 0 : p.$$

Мы находимся в условиях леммы, из которой следует, что векторы $V_i^*[N']$, $i \in 0 : p$, аффинно независимы. Кроме того, согласно (12)

$$\sum_{i=0}^{p} \eta_i^* V_i^*[N'] = \mathbb{O}[N']. \tag{13}$$

Аффинная независимость гарантирует неравенство $p \leqslant r$ (учесть, что размерность векторов $V_i^*[N']$ равна r). При $p \leqslant r-1$ векторы $V_i^*[N']$, $i \in 0 : p$, с компонентами $V_i^*[k] = \xi_i^* W_k^*(t_i)$, $k \in N'$, линейно независимы в силу чебышёвских свойств системы функций $\big\{W_k^*(t)\big\}_{k \in N'}$. Но в таком случае равенство (13) с положительными η_i^* невозможно. Значит, необходимо $p = r$. Формула (13) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{r} \eta_i^* V_i^*[N'] = \mathbb{O}[N'], \tag{14}$$

причём, повторим, векторы $V_i^*[N']$, $i \in 0 : p$, размерности r аффинно независимы.

Согласно альтернансной теории [1, теорема 1] из (14) следует, что определители Δ_i, составленные из столбцов

$$V_0^*[N'], \ldots, \ V_{i-1}^*[N'], \ V_{i+1}^*[N'], \ldots, \ V_r^*[N'],$$

отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, то есть

$$\operatorname{sign} \Delta_i = -\operatorname{sign} \Delta_{i-1}, \quad i \in 1 : r.$$

Напомним, что $V_i^* = \xi_i^* W^*(t_i)$, поэтому

$$\Delta_i = \frac{1}{\xi_i^*} \Big(\prod_{s=0}^{r} \xi_s^* \Big) \Delta_i',$$

где Δ_i' — определители с элементами $W_k^*(t_s)$, $k \in N'$, $s \in \{0, \ldots, i-1, i+ + 1, \ldots, r\}$. В силу чебышёвских свойств системы функций $\big\{W_k^*(t)\big\}_{k \in N'}$, и упорядоченности точек максимального уклонения $t_0 < t_1 < \cdots < t_r$ определители Δ_i', $i \in 0 : p$, отличны от нуля и одного знака. Чередование знаков определителей Δ_i имеет следствием чередование знаков ξ_i^*, что в свою очередь возможно только за счёт чередования знаков уклонений $\sigma(X^*, \ t_i)$. Учитывая, что $\big|\sigma(X^*, \ t_i)\big| = \varphi(X^*)$ при всех $i \in 0 : r$, приходим к соотношению (7).

Теорема доказана. □

Метод доказательства необходимости используется при анализе более сложных задач наилучшего дробно-рационального приближения [4–6].

8°. Разберёмся с вопросом о единственности решения задачи (2).

ТЕОРЕМА 3. *Дробь наилучшего приближения* $H(X^*,\ t)$ *с* $X^* \in \Omega$ *как функция единственна.*

Имеется в виду, что при наличии другой дроби наилучшего приближения $H(X_0,\ t)$ с $X_0 \in \Omega$ выполняется соотношение $H(X_0,\ t) \equiv H(X^*,\ t)$ на $[c,\ d]$.

Доказательство. Пусть $X^* \in \Omega$ — решение задачи (2). Тогда, как следует из доказательства необходимости в теореме 2, найдутся $r+1$ точки максимального уклонения $t_0 < t_1 < \cdots < t_r$ из $R(X^*)$ и положительные числа η_i^*, в сумме равные единице, такие, что

$$\sum_{i=0}^{r} \eta_i^* F'_X(X^*,\ t_i) = \mathbb{O}. \tag{15}$$

Здесь $r = n + m + 1 - d^*$. Возьмём другое решение $X_0 \in \Omega$ задачи (2). В этом случае $\varphi(X_0) = \varphi(X^*)$.

Умножим (15) скалярно на X_0. Согласно (4)

$$\begin{aligned} \big\langle F'_X(X^*,\ t),\ X_0\big\rangle &= \frac{\sigma(X^*,\ t)}{Q(B^*,\ t)}\big[P(A_0,\ t) - H(X^*,\ t)Q(B_0,\ t)\big] = \\ &= \sigma(X^*,\ t)\frac{Q(B_0,\ t)}{Q(B^*,\ t)}\big[H(X_0,\ t) - H(X^*,\ t)\big], \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{r} \eta_i^* \big\langle F'_X(X^*,\ t_i),\ X_0\big\rangle = \\ &= \sum_{i=0}^{r} \zeta_i^* \Big\{\sigma(X^*,\ t_i)\big[H(X_0,\ t_i) - H(X^*,\ t_i)\big]\Big\}, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\zeta_i^* = \eta_i^* Q(B_0,\ t_i)/Q(B^*,\ t_i).$$

Ясно, что все ζ_i^* положительные числа.

Далее

$$\begin{aligned} \sigma(X^*,\ t_i)\big[H(X_0,\ t_i) - H(X^*,\ t_i)\big] &= \sigma(X^*,\ t_i)\big[\sigma(X_0,\ t_i) - \sigma(X^*,\ t_i)\big] = \\ &= \sigma(X^*,\ t_i)\sigma(X_0,\ t_i) - \sigma^2(X^*,\ t_i). \end{aligned}$$

По определению точек максимального уклонения t_i имеем $\big|\sigma(X^*,\ t_i)\big| = \varphi(X^*)$, в то время как $\big|\sigma(X_0,\ t_i)\big| \leqslant \varphi(X_0) = \varphi(X^*)$. Значит,

$$\sigma(X^*,\ t_i)\big[H(X_0,\ t_i) - H(X^*,\ t_i)\big] \leqslant 0 \quad \forall i \in 0:r.$$

Отсюда и из (16) следует что

$$\sigma(X^*,\ t_i)\big[H(X_0,\ t_i) - H(X^*,\ t_i)\big] = 0 \quad \forall i \in 0:r.$$

После сокращения на ненулевые величины $\sigma(X^*,\ t_i)$ приходим к равенствам

$$H(X_0,\ t_i) - H(X^*,\ t_i) = 0, \quad i \in 0:r. \tag{17}$$

При доказательстве достаточности в теореме 2 отмечалось, что дробь $H(X_0,\ t) - H(X^*,\ t)$ можно привести к виду, когда в числителе будет стоять полином, степень которого не превосходит $r-1$ (использовалось каноническое представление дроби $H(X^*,\ t)$). Условие (17) гарантирует, что этот полином тождественно равен нулю. Как следствие получаем $H(X_0,\ t) \equiv H(X^*,\ t)$ на $[c,\ d]$.

Теорема доказана. □

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Существование дроби наилучшего приближения

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Решение задачи* (2) *существует.*

Доказательство. Обозначим $\varphi^* = \inf_{X\in\Omega} \varphi(X)$ и возьмём минимизирующую последовательность $\{X_j\}$, $j = 1,\ 2, \ldots$, точек из Ω, такую, что

$$\varphi(X_j) \to \varphi^* \text{ при } j \to \infty.$$

Для вектора $X = (A,\ B)$ введём чебышёвскую норму

$$\|X\|_\infty = \max\big\{\max_{i\in 0:n} |a_i|,\ \max_{k\in 0:m} |b_k|\big\}.$$

Можно считать, что $\|X_j\|_\infty = 1$ при всех j. Для этого нужно все коэффициенты числителя и знаменателя дроби $H(X_j,\ t)$ поделить на $\|X_j\|_\infty$.

Из ограниченной последовательности $\{X_j\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность. Для определённости будем считать, что вся последовательность $\{X_j\}$ сходится: $X_j \to X^*$, $X^* = (A^*,\ B^*)$, $\|X^*\|_\infty = 1$. Покажем, что $B^* \neq \mathbb{O}$.

В противном случае $B_j \to \mathbb{O}$, $A_j \to A^*$, $\|A^*\|_\infty = 1$. Обозначим $t_* \in [c,\ d]$ точку, в которой достигается максимум модуля $P(A^*,\ t)$ на $[c,\ d]$. Очевидно, что $Q(B_j,\ t_*) \to 0$, $P(A_j,\ t_*) \to P(A^*,\ t_*)$, причём $P(A^*,\ t_*) \neq 0$. Значит,

$$\big|H(X_j,\ t_*)\big| = \left|\frac{P(A_j,\ t_*)}{Q(B_j,\ t_*)}\right| \to +\infty.$$

Получаем
$$\varphi(X_j) \geqslant \left|H(X_j,\ t_*)\right| - \left|f(t_*)\right| \to +\infty,$$
что противоречит ограниченности $\left\{\varphi(X_j)\right\}$.

Итак, $B^* \neq \mathbb{O}$. Обозначим
$$H^*(t) = H(X^*,\ t),\ P^*(t) = P(A^*,\ t),\ Q^*(t) = Q(B^*,\ t),$$
$$N_0 = \left\{t \in [c,\ d] \mid Q^*(t) = 0\right\}.$$
Очевидно, что $|N_0| \leqslant m$. По определению функции $\varphi(X)$ при всех $t \in [c,\ d]$
$$\left|\frac{P(A_j,\ t)}{Q(B_j,\ t)} - f(t)\right| \leqslant \varphi(X_j).$$
В пределе при $j \to \infty$ для $t \in [c,\ d] \setminus N_0$ получаем
$$\left|\frac{P^*(t)}{Q^*(t)} - f(t)\right| \leqslant \varphi^*. \tag{18}$$
В частности,
$$\left|P^*(t)/Q^*(t)\right| \leqslant \varphi^* + \max_{t\in[c,\ d]}\left|f(t)\right| \quad \forall t \in [c,\ d] \setminus N_0. \tag{19}$$

Покажем, что каждый нуль $t \in N_0$ знаменателя $Q^*(t)$ является нулём не меньшей кратности и числителя $P^*(t)$. В противном случае найдётся точка $t_0 \in N_0$, которая будет полюсом дроби $P^*(t)/Q^*(t)$. Как следствие
$$\left|P^*(t)/Q^*(t)\right| \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to t_0. \tag{20}$$
Возьмём последовательность $\{t_s\}$ точек из $[c,\ d] \setminus N_0$, сходящуюся к t_0. Согласно (19) последовательность $\left\{P^*(t_s)/Q^*(t_s)\right\}$ ограничена. Но это противоречит (20). Тем самым установлено, что каждый нуль полинома $Q^*(t)$, принадлежащий отрезку $[c,\ d]$, является нулём не меньшей кратности и полинома $P^*(t)$.

Произведя необходимые сокращения, придём к новому представлению $H^*(t) = H(\tilde{X},\ t)$, в котором знаменатель $Q(\tilde{B},\ t)$ отличен от нуля на $[c,\ d]$. Можно считать, что знаменатель положителен на $[c,\ d]$, то есть, что $\tilde{X} \in \Omega$. (Если знаменатель отрицателен на $[c,\ d]$, то числитель и знаменатель нужно умножить на -1.) Из (18) по непрерывности следует, что
$$\left|H(\tilde{X},\ t) - f(t)\right| \leqslant \varphi^* \quad \forall t \in [c\ , d].$$
Вспоминая определение φ^*, заключаем, что $\tilde{X}$ — решение задачи (2).

Теорема доказана. □

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Доказательство основной леммы

Напомним, что рассматривается дробно-рациональная функция $H(X,\ t)$ из класса $\mathcal{H}^n_m$ с вектором коэффициентов $X = (A,\ B)$, $B \neq \mathbb{O}$, и её каноническое представление $H(X,\ t) = u(t)/v(t)$.

Если $A = \mathbb{O}$, то по определению $u(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 1$, $d = m$. Система (10) принимает вид

$$1,\ t, \dots,\ t^n,\ 0,\ 0, \dots,\ 0.$$

Первые $r = n + 1$ функций образуют чебышёвскую на $\mathbb{R}$ подсистему. Остальные $m + 1$ функций тождественно равны нулю. В этом случае лемма тривиальна.

В дальнейшем считаем, что $A \neq \mathbb{O}$. Тогда $u(t) \not\equiv 0$. По определению и $v(t) \not\equiv 0$.

Пусть $d = \nu$. По определению дефекта $\nu \leqslant \mu$. Отдельно рассмотрим случай $\nu = n$. Имеем $u(t) \equiv \text{const}$ и $n \leqslant \mu$. Чебышёвской подсистемой будет

$$-u(t),\ -tu(t), \dots,\ -t^m u(t). \tag{21}$$

Она состоит из $m + 1 = r$ функций. Остальные функции системы (10) есть полиномы, степень которых не превосходит $n + (m - \mu) \leqslant m$. Они могут быть представлены в виде линейной комбинации функций чебышёвской системы (21).

Предположим, что $n - \nu \geqslant 1$. Рассмотрим подсистему

$$v(t),\ tv(t), \dots,\ t^{n-\nu-1}v(t),\ -u(t),\ -tu(t), \dots,\ -t^m u(t). \tag{22}$$

Она состоит из $n-\nu+m+1 = n+m+1-d = r$ функций. Покажем, что (22) — чебышёвская подсистема. Составим нетривиальную линейную комбинацию

$$\Phi(t) = v(t) \sum_{i=0}^{n-\nu-1} c_i t^i - u(t) \sum_{k=0}^{m} d_k t^k.$$

Нужно проверить, что $\Phi(t)$ имеет на $\mathbb{R}$ не более $r - 1$ нулей. Но Φ является алгебраическим полиномом степени

$$\max\{m - \mu + n - \nu - 1,\ n - \nu + m\} = r - 1.$$

Поэтому достаточно установить, что $\Phi(t) \not\equiv 0$.

Допустим противное $0 \equiv \Phi(t) = v(t)P(t) - u(t)Q(t)$ или

$$v(t)P(t) \equiv u(t)Q(t). \tag{23}$$

Имеем $Q(t) \not\equiv 0$, ибо иначе $Q(t)$ и $P(t)$ тождественно равнялись бы нулю, что привело бы к равенству нулю всех коэффициентов c_i и d_k. По той же причине и $P(t) \not\equiv 0$.

Если $v(t) \equiv \mathrm{const}$, то тождество (23) невозможно из-за несоответствия степеней полиномов — в левой части стоит полином степени $n - \nu - 1$, а в правой части — полином степени $\geqslant n - \nu$. Поэтому можно считать, что $v(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Тождество (23) означает, что полином uQ делится на v. Отсюда в силу взаимной простоты полиномов u и v следует, что Q делится на v, то есть $Q(t) \equiv v(t)R(t)$, $R(t) \not\equiv 0$. Согласно (23) получаем

$$v(t)\big[P(t) - u(t)R(t)\big] \equiv 0.$$

Поскольку $v(t) \not\equiv 0$, то $P(t) \equiv u(t)R(t)$. Последнее тождество невозможно из-за несоответствия степеней полиномов P и uR. Доказано, что $\Phi(t) \not\equiv 0$. Таким образом, система (22) является чебышёвской на $\mathbb{R}$.

Остальные функции системы (10) имеют вид $t^{n-s}v(t)$, $s \in 0 : \nu$. Покажем, что они являются линейными комбинациями функций системы (22).

Это очевидно при $s = \nu$. Действительно, согласно (6)

$$v(t) \sum_{i=0}^{n-\nu} \alpha_i t^i - u(t) \sum_{k=0}^{m-\mu} \beta_k t^k \equiv 0. \tag{24}$$

Остаётся учесть, что коэффициент $\alpha_{n-\nu}$ при $t^{n-\nu}v(t)$ отличен от нуля.

Анализ случая $s \in 0 : \nu - 1$ опирается на следующее утверждение: для любого полинома

$$g(t) = a_0 t^p + a_1 t^{p-1} + \cdots + a_p, \quad a_0 \neq 0,$$

найдётся полином $h(t) = t^q + b_1 t^{q-1} + \cdots + b_q$, такой, что

$$g(t)h(t) = a_0 t^{p+q} + c_1 t^{p-1} + c_2 t^{p-2} + \cdots + c_p.$$

Коэффициенты b_j определяются последовательно из условий

$$\begin{aligned}
&a_0 b_1 + a_1 = 0,\\
&a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_0 b_q + a_1 b_{q-1} + \cdots + a_{q-1} b_1 + a_q = 0.
\end{aligned}$$

Здесь положено $a_i = 0$ при $i > p$ (в случае $q > p$).

На основании этого утверждения для полинома $u(t) = \sum_{i=0}^{n-\nu} \alpha_i t^i$ найдётся полином $h(t)$ степени $\nu - s$ со страршим коэффициентом, равным единице, такой, что

$$u(t)h(t) = \alpha_{n-\nu} t^{n-s} + c_1 t^{n-\nu-1} + \cdots + c_{n-\nu}. \tag{25}$$

Умножим тождество $v(t)u(t) - u(t)v(t) \equiv 0$ на $h(t)$. Получим

$$v(t)\big[u(t)h(t)\big] - u(t)\big[v(t)h(t)\big] \equiv 0. \tag{26}$$

Степень полинома $v(t)h(t)$ не превосходит $m - \mu + \nu - s = m - (\mu - \nu) - s$. Напомним, что рассматривается случай $\nu = d = \min\{\mu,\ \nu\}$, поэтому $\mu \geqslant \nu$. Значит, $\deg(vh) \leqslant m$. На основании (25) и (26) приходим к формуле

$$\alpha_{n-\nu}t^{n-s}v(t) + v(t)\sum_{i=0}^{n-\nu-1} c_{n-\nu-i}t^i - u(t)\sum_{k=0}^{m}\gamma_k t^k \equiv 0.$$

Эта формула показывает, что $t^{n-s}v(t)$ является линейной комбинацией функций чебышёвской подсистемы (22).

Случай $d = \mu$ исследуется аналогично. Чебышёвской на $\mathbb{R}$ подсистемой будет

$$v(t),\ tv(t), \ldots,\ t^n v(t),\ -u(t),\ -tu(t), \ldots,\ -t^{m-\mu-1}u(t).$$

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. *Два подхода к определению альтернанса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 24 января 2013 г. 8 с. (http://dha.spb.ru/reps13.shtml#0124)

2. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972. 368 с.

3. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* Изд. 2-е. М.: Наука, 1965. 408 с.

4. Белых В. М., Малозёмов В. Н. *Наилучшая дробно-рациональная аппроксимация на системе отрезков* // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1978. Вып. 2. С. 5–8.

5. Белых В. М., Малозёмов В. Н. *О размерности множества решений задачи наилучшей дробно-рациональной аппроксимации* // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1979. Вып. 1. С. 21–27.

6. Малозёмов В. Н. *Задача синтеза многополосного электрического фильтра* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 3. С. 601–609.