ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕРНУЛЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА*

А. Н. Сабаев

28 ноября 2009 г.

1°. Пусть $\delta_N(j)$ — единичный N-периодический импульс и

$$\big[\Delta^r \delta_N\big](j) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s\, \delta_N(j+s), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

— его конечная разность r-го порядка, $r \in \{1, 2, \ldots\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула*

$$\big[\Delta^r \delta_N\big](j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \big(\omega_N^k - 1\big)^r \omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$.

Доказательство. Напомним [1, с. 28], что

$$\delta_N(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj}.$$

Согласно (1) имеем

$$\big[\Delta^r \delta_N\big](j) = \tfrac{1}{N} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(j+s)} =$$

$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\, C_r^s \big(\omega_N^k\big)^s = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} \big(\omega_N^k - 1\big)^r.$$

Остаётся заметить, что слагаемое с $k = 0$ равно нулю. □

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Дискретная N-периодическая функция Бернулли порядка $r \in \{0, 1, \ldots\}$ определяется следующим образом [2]:

$$b_r(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \bigl(\omega_N^k - 1\bigr)^{-r} \omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

В частности,

$$b_0(j) = \delta_N(j) - \tfrac{1}{N}\,.$$

Сравнение формул (2) и (3) позволяется распространить понятие функций Бернулли на случай отрицательных порядков

$$b_{-r} = \Delta^r \delta_N\,, \qquad r \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{4}$$

Теперь функции Бернулли определены при всех $r \in \mathbb{Z}$. При всех целых r можно пользоваться формулой (3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо соотношение*

$$b_r = -\tfrac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-1} C_N^{s+1}\, b_{r-s}\,, \qquad r \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что

$$\sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \bigl(\omega_N^k - 1\bigr)^s = 0, \qquad k \in 1 : N-1. \tag{6}$$

Действительно,

$$\sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \bigl(\omega_N^k - 1\bigr)^s = \tfrac{1}{\omega_N^k - 1} \sum_{s=1}^{N} C_N^s \bigl(\omega_N^k - 1\bigr)^s =$$

$$= \tfrac{1}{\omega_N^k - 1} \Bigl[- C_N^0 + \sum_{s=0}^{N} C_N^s \bigl(\omega_N^k - 1\bigr)^s \Bigr] = \tfrac{1}{\omega_N^k - 1} \bigl[-1 + \omega_N^{kN} \bigr] = 0.$$

Умножим (6) на $(\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{kj}$ и просуммируем по $k \in 1 : N-1$. Получим

$$0 = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \bigl(\omega_N^k - 1\bigr)^{s-r} \omega_N^{kj}.$$

Разделим это равенство на N и поменяем порядок суммирования:

$$0 = \sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1} \Bigl\{ \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \bigl(\omega_N^k - 1\bigr)^{-(r-s)} \omega_N^{kj} \Bigr\} = \sum_{s=0}^{N-1} C_N^{s+1}\, b_{r-s}(j).$$

Остаётся перенести слагаемое с $s = 0$ в левую часть равенства и поделить на $-N$. $\square$

В силу (4) формулу (5) при натуральных r можно переписать так:

$$b_r = -\frac{1}{N}\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{r} C_N^{s+1}\, b_{r-s} + \sum\limits_{s=r+1}^{N-1} C_N^{s+1}\Delta^{s-r}\delta_N\,, & r < N-1;\\ \sum\limits_{s=1}^{N-1} C_N^{s+1}\, b_{r-s}, & r \geqslant N-1.\end{cases}$$

3°. Следующее утверждение является аналогом теоремы сложения аргументов для полиномов Бернулли [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При $r \in \mathbb{Z}$ справедлива формула*

$$b_r(j+l) = \sum_{s=0}^{l} C_l^s\, b_{r-s}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{s=0}^{l} C_l^s\, b_{r-s}(j) = \sum_{s=0}^{l} C_l^s \Big\{ \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \big(\omega_N^k - 1\big)^{-r+s} \omega_N^{kj} \Big\} =$$
$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \big(\omega_N^k - 1\big)^{-r} \omega_N^{kj} \sum_{s=0}^{l} C_l^s \,\big(\omega_N^k - 1\big)^{s} =$$
$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \big(\omega_N^k - 1\big)^{-r} \omega_N^{k(j+l)} = b_r(j+l),$$

что соответствует (7). □

В частности, при натуральных r

$$b_r(j+r) = \sum_{s=0}^{r} C_r^s\, b_{r-s}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 1. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

2. Бер М. Г., Малозёмов В. Н. *Наилучшие формулы для приближённого вычисления дискретного преобразования Фурье* // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 1992. Т. 32. №11. С. 1709–1719.

3. Малозёмов В. Н. *Полиномы Бернулли* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 ноября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#1114`).