ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М. С. БЕСПАЛОВА О ФРЕЙМАХ ПАРСЕВАЛЯ*

М. Н. Юркина
istomina@syktsu.ru

9 июня 2012 г.

1°. Существуют четыре определения жёсткого фрейма в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. [1]). Мы воспользуемся двумя из них.

Система ненулевых n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ при $m > n$ называется жёстким фреймом, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

1) *матрица Φ со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ удовлетворяет соотношению*

$$\Phi\Phi^T = AI_n,$$

где I_n — единичная матрица порядка n и

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2;$$

2) *справедливо равенство*

$$\sum_{i,j=1}^{m} |\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle|^2 = nA^2. \tag{1}$$

Вычислим квадрат сферической нормы матрицы Φ. По определению

$$\|\Phi\|^2 := \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\bigl|\Phi[s,k]\bigr|^2 = \sum_{k=1}^{m}\|\varphi_k\|^2 = nA. \tag{2}$$

Введём матрицу Грама $G = \Phi^T\Phi$ и вычислим квадрат её сферической нормы:

$$\|G\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} |\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle|^2. \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

Формулы (2) и (3) позволяют переписать равенство (1), определяющее жёсткий фрейм, в другом виде

$$\|G\|^2 = nA^2 = \frac{1}{n}(nA)^2 = \frac{1}{n}\|\Phi\|^4. \tag{4}$$

2°. *Фреймом Парсеваля* называется жёсткий фрейм с константой фрейма A, равной единице, $A = 1$. Таким образом, фрейм Парсеваля определяется условием

$$\Phi\Phi^T = I_n. \tag{5}$$

Согласно (2) и (4) для фрейма Парсеваля выполняются соотношения

$$\|\Phi\|^2 = n, \qquad \|G\|^2 = n.$$

По свойству ранга матрицы (см., например, [2], с. 18)

$$\operatorname{rank}(\Phi\Phi^T) = \operatorname{rank}(\Phi^T\Phi) = \operatorname{rank}(\Phi).$$

Учитывая (5) и тот факт, что $\operatorname{rank}(I_n) = n$, заключаем, что

$$\operatorname{rank}(\Phi) = \operatorname{rank}(\Phi\Phi^T) = \operatorname{rank}(I_n) = n.$$

По той же причине

$$\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(\Phi^T\Phi) = \operatorname{rank}(\Phi) = n.$$

Подведём итоги.

ТЕОРЕМА 1 (М. С. Беспалов [3]). *Для фрейма Парсеваля справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\Phi &= n, \qquad \|\Phi\|^2 = n; \\ \operatorname{rank} G &= n, \qquad \|G\|^2 = n. \end{aligned}$$

3°. Напомним способ построения дополнительного фрейма Парсеваля [4]. Пусть, как и раньше, Φ — $(n \times m)$-матрица со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, образующими фрейм Парсеваля. Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Согласно (5)

$$\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Дополним систему $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ строками $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m$ так, чтобы все m строк составили ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$. Матрицу со строками $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ обозначим Γ. Это квадратная матрица порядка m, имеющая вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix},$$

где Ψ — $((m-n)\times m)$-матрица. В силу ортонормированности строк матрица Γ будет ортогональной, $\Gamma\Gamma^T = I_m$. Через $\psi_1, \ldots, \psi_m$ обозначим столбцы матрицы Ψ. Поскольку $\Psi\Psi^T = I_{m-n}$, то система $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$. Он называется *дополнительным фреймом Парсеваля.*

По теореме 1 для дополнительного фрейма Парсеваля справедливы равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\Psi) &= m-n, & \|\Psi\|^2 &= m-n; \\ \operatorname{rank}(\Psi^T\Psi) &= m-n, & \|\Psi^T\Psi\|^2 &= m-n. \end{aligned} \tag{6}$$

С помощью дополнительного фрейма установим ещё одно свойство матрицы Грама $G = \Phi^T\Phi$.

ТЕОРЕМА 2 (М. С. Беспалов [3])**.** *Пусть* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *— фрейм Парсеваля в* $\mathbb{R}^n$*,* Φ *— матрица со столбцами* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *и* $G = \Phi^T\Phi$*. Тогда*

$$\operatorname{rank}(I_m - G) = m-n, \qquad \|I_m - G\|^2 = m-n.$$

Доказательство. Наряду с равенством $\Gamma\Gamma^T = I_m$ выполняется равенство $\Gamma^T\Gamma = I_m$. Значит, столбцы $\binom{\varphi_k}{\psi_k}$ матрицы Γ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^m$. Этот факт можно записать так:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle + \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in 1:m. \tag{7}$$

Обозначим $G_1 = \Psi^T\Psi$. Согласно (7)

$$G + G_1 = I_m.$$

Имеем $I_m - G = G_1$. Теперь заключение теоремы следует из формул (6). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Четвёртое определение жёсткого фрейма* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 мая 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530`)

2. Малоземов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.

3. Беспалов М. С. *Фреймы Парсеваля и ортопроекторы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1021`)

4. Истомина М. Н., Максименко В. В., Певный А. Б. *Дополнительные жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0401`)