ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ. ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИЯ*

И. А. Капелюхин — i_kapelyuhin@mail.ru

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

А. Н. Сергеев — aser57@mail.ru

10 марта 2007 г.

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задан треугольный массив полюсов

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_{00} & & P_{01} & & P_{02} & \dots & P_{0,n-2} & & P_{0,n-1} & & P_{0n} \\
& P_{10} & & P_{11} & \dots & \dots & \dots & P_{1,n-2} & & P_{1,n-1} & \\
& & P_{20} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & P_{2,n-2} & & \\
& & & \ddots & \dots & \dots & \dots & \iddots & & & \\
& & & & P_{n-1,0} & & P_{n-1,1} & & & & \\
& & & & & P_{n0} & & & & &
\end{array}$$

По этим полюсам с помощью полинома Бернштейна на треугольнике можно построить поверхность Безье [1]:

$$B_0(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} \, \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} \, x^i \, y^j \, (1-x-y)^{n-i-j} \,, \tag{1}$$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x+y \leqslant 1 \,.$$

Покажем, что поверхность (1) допускает три других представления, в которых вектор параметров изменяется не в треугольнике, а в единичном квадрате.

2°. Введём обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta &= \big\{ (x,y) \mid x \geqslant 0 \,,\ y \geqslant 0 \,,\ x+y \leqslant 1 \big\} \,, \\
Q &= \big\{ (u,v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1 \,,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \big\} \,.
\end{aligned}$$

---

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Наряду с (1) рассмотрим полином

$$B_1(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}P_{ij}\,b_i^n(u)\,b_j^{n-i}(v)\,,\qquad (u,v)\in Q\,,$$

где $b_k^m(x)=C_m^k\,x^k\,(1-x)^{m-k}$ — базисные полиномы Бернштейна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо равенство множеств*

$$\bigl\{B_0(x,y)\mid (x,y)\in\Delta\bigr\}=\bigl\{B_1(u,v)\mid (u,v)\in Q\bigr\}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование

$$x=u\,,\quad y=(1-u)\,v\,. \tag{3}$$

Поскольку при $(u,v)\in Q$

$$x+y=1-(1-u)+(1-u)\,v=1-(1-u)(1-v)\leqslant 1\,,$$

то преобразование (3) сопоставляет точке $(u,v)\in Q$ точку $(x,y)\in\Delta$. Наоборот, если $(x,y)\in\Delta$, то найдётся точка $(u,v)\in Q$, для которой выполняются соотношения (3). Действительно, при $x=1$ имеем $y=0$. Условиям (3) будет удовлетворять пара $(u,v)\in Q$ с $u=1$ и любым $v\in[0,1]$. При $x<1$, требуемой будет пара $u=x$, $v=y/(1-x)$ с $v\leqslant 1$.

После этого замечания обратимся к равенству (2) и обозначим множества, стоящие в левой и правой его частях, через $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ соответственно. Возьмём точку $P\in\mathfrak{B}_1$. По определению найдётся вектор параметров $(u,v)\in Q$, такой, что

$$\begin{aligned}P&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}P_{ij}\,C_n^i\,u^i\,(1-u)^{n-i}\,C_{n-i}^j\,v^j\,(1-v)^{n-i-j}=\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}P_{ij}\,C_n^i\,C_{n-i}^j\,u^i\,\bigl((1-u)v\bigr)^j\,\bigl((1-u)(1-v)\bigr)^{n-i-j}\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Перейдём к вектору параметров $(x,y)\in\Delta$ по формуле (3). Учитывая, что $(1-u)(1-v)=1-x-y$ и

$$C_n^i\,C_{n-i}^j=\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\,,$$

получаем

$$P=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}P_{ij}\,\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\,x^i\,y^j\,(1-x-y)^{n-i-j}\,.$$

Значит $P\in\mathfrak{B}_0$. Установлено включение $\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_0$.

Обратное включение проверяется обратным ходом с использованием того факта, что вектору параметров $(x,y)\in\Delta$ можно сопоставить вектор параметров $(u,v)\in Q$, удовлетворяющий соотношениям (3).

Предложение доказано. $\square$

Преобразование (3) квадрата Q в треугольник Δ является вырожденным, тем не менее, с его помощью мы достигли цели. Этому способствовало следующее свойство полиномов Бернштейна: при всех $v\in[0,1]$

$$B_1(1,v)=P_{n0}\,b_0^0(v)\equiv P_{n0}=B_0(1,0)\,.$$

3°. Рассмотрим другую форму полинома Бернштейна

$$B_2(s,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}P_{ji}\,b_i^n(s)\,b_j^{n-i}(t)\,,\qquad (s,t)\in Q\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство множеств*

$$\bigl\{B_1(u,v)\mid(u,v)\in Q\bigr\}=\bigl\{B_2(s,t)\mid(s,t)\in Q\bigr\}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Запишем соотношения

$$\begin{aligned} s&=(1-u)\,v\,,\\ (1-s)\,t&=u\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Покажем, что каждой паре $(u,v)\in Q$ можно сопоставить пару $(s,t)\in Q$, такую, что выполняются соотношения (6), и наоборот.

Пусть $(u,v)\in Q$. Если $u>0$, то соответствующее s меньше единицы, и мы однозначно определяем t:

$$t=\frac{u}{1-s}=\frac{u}{u+(1-u)(1-v)}\leqslant 1\,.$$

Если $u=0$, то $s=v$, и можно взять $t=0$.

Симметричным образом по $(s,t)\in Q$ определяется требуемая пара $(u,v)\in Q$.

Обратимся к равенству (5) и перепишем его в виде $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2$. Возьмём точку $P\in\mathfrak{B}_1$ и представим её в виде (4). После этого перейдём к вектору параметров $(s,t)\in Q$ по формулам (6). Учитывая, что

$$(1-u)(1-v)=1-u-s=1-s-(1-s)\,t=(1-s)(1-t)$$

и $C_n^i\,C_{n-i}^j=C_n^j\,C_{n-j}^i$, получаем

$$P=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}P_{ij}\,C_n^j\,C_{n-j}^i\,\bigl((1-s)\,t\bigr)^i\,s^j\bigl((1-s)(1-t)\bigr)^{n-j-i}=$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij}\, b_j^n(s)\, b_i^{n-j}(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} P_{ij}\, b_j^n(s)\, b_i^{n-j}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_{ji}\, b_i^n(s)\, b_j^{n-i}(t)\,.$$

Значит, $P \in \mathfrak{B}_2$. Установлено включение $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$.

Обратное включение проверяется обратным ходом. Используется тот факт, что вектору параметров $(s,t) \in Q$ можно сопоставить вектор параметров $(u,v) \in Q$, удовлетворяющий соотношениям (6).

Предложение доказано. □

4°. В формуле для $B_1(u,v)$ индекс i есть индекс горизонтальной строки треугольного массива полюсов $\{P_{ij}\}$. В формуле для $B_2(s,t)$ тот же индекс является индексом наклонной слева направо строки. Остаётся ещё одна возможность — формировать поверхность Безье на основе наклонных справа налево строк массива $\{P_{ij}\}$.

В этой связи рассмотрим новую форму полинома Бернштейна

$$B_3(s,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_{j,n-i-j}\, b_i^n(s)\, b_j^{n-i}(t), \qquad (s,t) \in Q\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо равенство множеств*

$$\big\{B_1(u,v) \mid (u,v) \in Q\big\} = \big\{B_3(s,t) \mid (s,t) \in Q\big\}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Запишем соотношения

$$\begin{aligned} s &= (1-u)(1-v)\,, \\ (1-s)\,t &= u\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Если обозначить $v' = 1 - v$, то формулы (8) и (6) становятся идентичными. Это позволяет утверждать, что каждой паре $(u,v) \in Q$ можно сопоставить пару $(s,t) \in Q$, такую, что выполняются соотношения (8), и наоборот.

Обратимся к равенству (7) и перепишем его в виде $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_3$. Возьмём точку $P \in \mathfrak{B}_1$ и представим её в виде (4). После этого перейдём к вектору параметров $(s,t) \in Q$ по формулам (8). Учитывая, что

$$(1-u)\,v = 1 - u - s = 1 - s - (1-s)\,t = (1-s)(1-t)$$

и $C_n^i\, C_{n-i}^j = C_{i+j}^i\, C_n^{i+j}$, получаем

$$P = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij}\, C_{i+j}^i\, C_n^{i+j} \big((1-s)\,t\big)^i \big((1-s)(1-t)\big)^j s^{n-i-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij}\, C_n^{i+j}\, s^{n-i-j}\, (1-s)^{i+j}\, C_{i+j}^{i}\, t^i\, (1-t)^j\,.$$

После замены индекса j на $k = n - i - j$ придём к формуле

$$P = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} P_{i,n-i-k}\, C_n^{k}\, s^{k}\, (1-s)^{n-k}\, C_{n-k}^{i}\, t^i\, (1-t)^{n-i-k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} P_{i,n-i-k}\, b_k^n(s)\, b_i^{n-k}(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} P_{i,n-k-i}\, b_k^n(s)\, b_i^{n-k}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_{j,n-i-j}\, b_i^n(s)\, b_j^{n-i}(t)\,.$$

Значит, $P \in \mathfrak{B}_3$. Установлено включение $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_3$.

Обратное включение проверяется обратным ходом с использованием того факта, что вектору параметров $(s,t) \in Q$ можно сопоставить вектор параметров $(u,v) \in Q$, удовлетворяющий соотношениям (8).

Предложение доказано. $\square$

5°. На приводимых ниже рисунках 1–4 изображены поверхности Безье, построенные по одной и той же системе полюсов (в $\mathbb{R}^3$ при $n = 3$)

$$\begin{array}{ccccccc} P_{00} & & P_{01} & & P_{02} & & P_{03} \\ & P_{10} & & P_{11} & & P_{12} & \\ & & P_{20} & & P_{21} & & \\ & & & P_{30}\,, & & & \end{array}$$

но с использованием разных представлений полинома Бернштейна. Рис. 1 соответствует представлению $B_0(x,y)$, рис. 2 — представлению $B_1(u,v)$, рис. 3 — представлению $B_2(s,t)$, рис. 4 — представлению $B_3(s,t)$. Вычисление значений полиномов проводилось с постоянным шагом по каждому параметру в областях Δ (рис. 1) и Q (рис. 2–4). По доказанному все четыре полинома Бернштейна определяют одну и ту же поверхность Безье. Вопрос о быстром вычислении вырожденных полиномов Бернштейна $B_1(u,v)$, $B_2(s,t)$, $B_3(s,t)$ рассматривался в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002. xvii+499 pp.

2. Shi-Min Hu. *Conversion between triangular and rectangular Bézier patches* // CAGD. 2001. Vol. 18. P. 667–671.

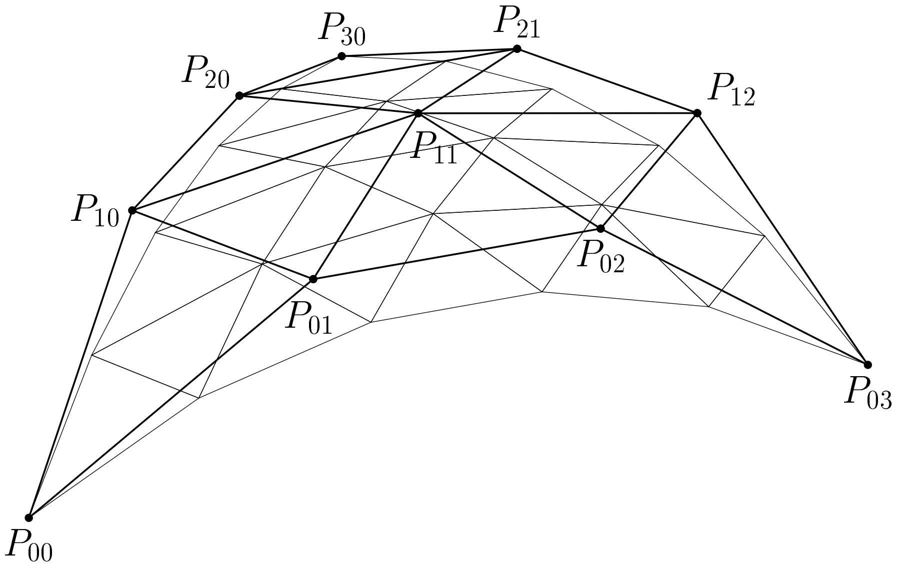

Рис. 1. График полинома $B_0(x, y)$, $(x, y) \in \Delta$.

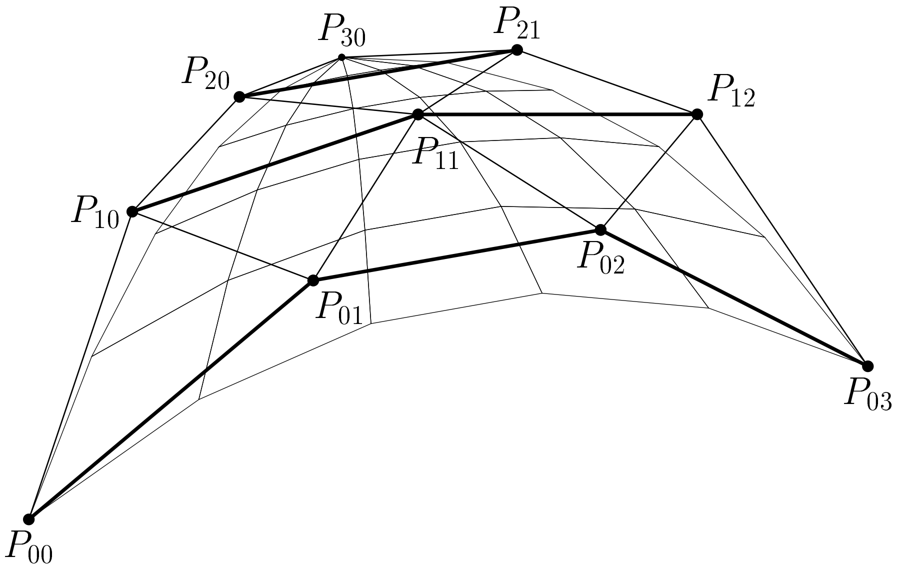

Рис. 2. График полинома $B_1(u, v)$, $(u, v) \in Q$.

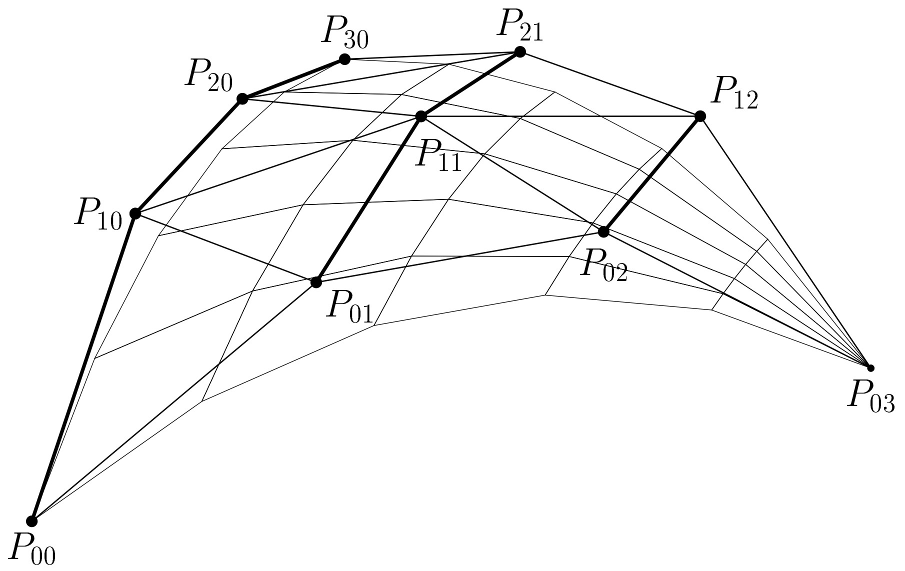

Рис. 3. График полинома $B_2(s,t)$, $(s,t) \in Q$.

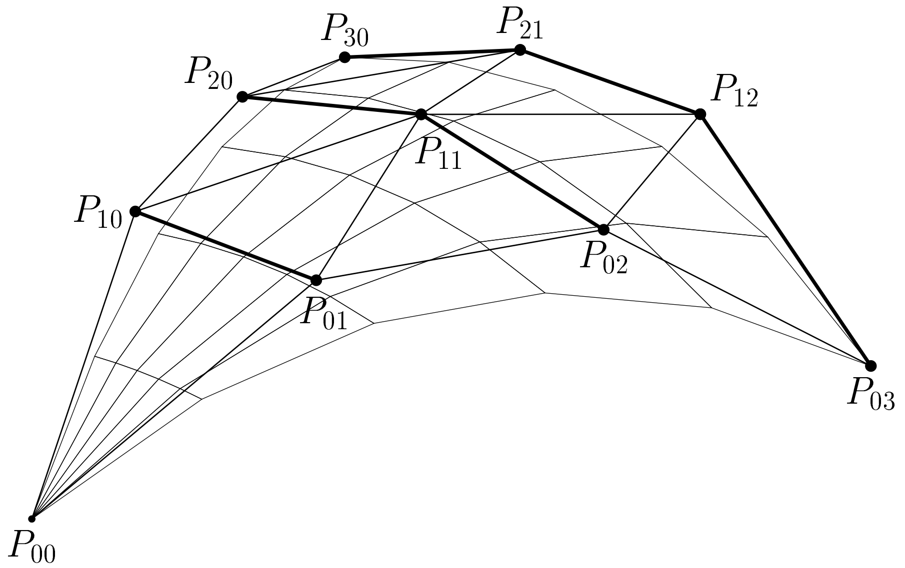

Рис. 4. График полинома $B_3(s,t)$, $(s,t) \in Q$.