ВАРИАЦИИ КРИВЫХ БЕЗЬЕ*

В. Н. Малозёмов

malv@gamma.math.spbu.ru

25 июля 2006 г.

1°. Пусть заданы упорядоченные вектор-строки

$$Y_k = (y_{k1}, \ldots, y_{ks}), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

которые мы будем называть *полюсами*. Зафиксируем $x \in [0, 1]$ и проведём вычисления по рекуррентной формуле (*схема де Кастельжо*):

$$\begin{aligned} &Y_k^{(i)} = (1-x)Y_k^{(i-1)} + xY_{k+1}^{(i-1)}, \quad i \in 1:n, \ k \in 0:n-i; \\ &Y_k^{(0)} = Y_k, \quad k \in 0:n. \end{aligned} \tag{1}$$

Вектор-строку $Y_k^{(i)}$ можно выразить через исходные полюсы $Y_k, \ldots, Y_{k+i}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [1]). *Справедливо равенство*

$$Y_k^{(i)} = \sum_{\alpha=0}^{i} p_{i\alpha}(x) Y_{k+\alpha}, \tag{2}$$

где $p_{i\alpha}(x) = C_i^\alpha x^\alpha (1-x)^{i-\alpha}$.

Нас интересует вектор $Y_0^{(n)}$ как функция от x, $Y_0^{(n)} = Y_0^{(n)}(x)$. Из (1) следует, что $Y_0^{(n)}(0) = Y_0$, $Y_0^{(n)}(1) = Y_n$. Формула (2) при $i = n$ принимает вид

$$Y_0^{(n)}(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} p_{n\alpha}(x) Y_\alpha. \tag{3}$$

Когда x пробегает отрезок $[0, 1]$, точка $Y_0^{(n)}(x)$ описывает кривую в пространстве $\mathbb{R}^s$, соединяющую Y_0 и Y_n. Эта кривая называется *кривой Безье*.

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Обратим внимание на точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ из интервала $(0,1)$. Обозначим $B_i = Y_0^{(n)}(x_i)$. Согласно (3)

$$B_i = \sum_{\alpha=0}^{n} p_{n\alpha}(x_i) Y_\alpha, \quad i \in 1:m. \tag{4}$$

Мы хотим, чтобы кривая Безье проходила не через точки B_i, а через близкие точки $\widehat{B}_i$. Для этого нужно заменить полюсы Y_k на новые полюсы $\widehat{Y}_k$, что сводится к решению системы векторных уравнений

$$\widehat{B}_i = \sum_{\alpha=0}^{n} p_{n\alpha}(x_i) \widehat{Y}_\alpha, \quad i \in 1:m. \tag{5}$$

Желая сохранить начало и конец кривой Безье, полагаем

$$\widehat{Y}_0 = Y_0, \quad \widehat{Y}_n = Y_n. \tag{6}$$

Вычтем (4) из (5). С учётом (6) получим

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} p_{n\alpha}(x_i) \big(\widehat{Y}_\alpha - Y_\alpha\big) = \widehat{B}_i - B_i, \quad i \in 1:m. \tag{7}$$

Обозначим $Z_\alpha = \widehat{Y}_\alpha - Y_\alpha$, $R_i = \widehat{B}_i - B_i$ и перепишем (7) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} p_{n\alpha}(x_i) Z_\alpha = R_i, \quad i \in 1:m. \tag{8}$$

Считаем, что $m < n-1$. Тогда в системе (8) неизвестных Z_α больше, чем уравнений. Мы заинтересованы в том, чтобы евклидова норма векторов Z_α была мала. Поставим экстремальную задачу: *минимизировать* $\sum_{\alpha=1}^{n-1} \|Z_\alpha\|^2$ *при ограничениях* (8). При $m = 1$ и $s = 1$ решение задачи указано в [2, с. 112-114]. Мы дадим решение в общем случае.

2°. Введем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} p_{n1}(x_1) & \ldots & p_{n,n-1}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}(x_m) & \ldots & p_{n,n-1}(x_m) \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}.$$

С их помощью интересующую нас экстремальную задачу можно записать так:

$$\|Z\|^2 := \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big(\sum_{\beta=1}^{s} |z_{\alpha\beta}|^2 \Big) \to \min, \quad AZ = R. \tag{9}$$

Нашей ближайшей целью является проверка линейной независимости строк матрицы A.

3°. Напомним, что система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ называется *чебышёвской*, если любой обобщённый полином

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x),$$

у которого не все коэффициенты равны нулю (нетривиальный полином), имеет на $[a, b]$ не более n нулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система функций* $p_{n0}(x), p_{n1}(x), \ldots, p_{nn}(x)$ *является чебышёвской на* $[0, 1]$.

Доказательство. Составим нетривиальную линейную комбинацию

$$B(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_{ni}(x).$$

Воспользуемся формулой [3]

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\Delta^k y)_0 \, x^k, \tag{10}$$

где $(\Delta^k y)_0 = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} (-1)^{k-\alpha} C_k^\alpha y_\alpha$ — конечная разность k-го порядка. Как известно [4, с. 60]

$$y_i = \sum_{\alpha=0}^{i} C_i^\alpha (\Delta^\alpha y)_0, \quad i \in 0 : n.$$

По условию не все y_i равны нулю, а тогда не все $(\Delta^k y)_0$ равны нулю. Получили, что алгебраический полином (10) нетривиальный, откуда следует, что он имеет на $[0, 1]$ не более n нулей. Предложение доказано. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Система функций* $p_{n1}(x), \ldots, p_{n,n-1}(x)$ *является чебышёвской на интервале* $(0, 1)$.

Доказательство. Составим нетривиальную линейную комбинацию

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i p_{ni}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i C_n^i x^i (1-x)^{n-i} =$$

$$= x(1-x) \sum_{k=0}^{n-2} y_{k+1} C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-2-k}.$$

Так как

$$C_n^{k+1} = C_{n-2}^k \, \tfrac{(n-1)n}{(k+1)(n-k-1)} \, ,$$

то

$$G(x) = (n-1)nx(1-x) \sum_{k=0}^{n-2} \tfrac{y_{k+1}}{(k+1)(n-k-1)} \, p_{n-2,k}(x).$$

В силу предложения 2 полином

$$\widehat{G}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \tfrac{y_{k+1}}{(k+1)(n-k-1)} \, p_{n-2,k}(x)$$

имеет на $[0,1]$ не более $n-2$ нулей, а тогда $G(x)$ имеет не более $n-2$ нулей на интервале $(0,1)$. Предложение доказано. $\square$

Введём вектор-строку

$$U(x) = (p_{n1}(x), \ldots, p_{n,n-1}(x)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для произвольных точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ из интервала $(0,1)$ векторы $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_{n-1})$ линейно независимы.*

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу

$$\begin{bmatrix} p_{n1}(x_1) & \ldots & p_{n,n-1}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}(x_{n-1}) & \ldots & p_{n,n-1}(x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Требуется установить линейную независимость её строк. Для этого достаточно проверить, что столбцы линейно независимы.

Пусть

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i p_{ni}(x_k) = 0, \quad k \in 1:n-1.$$

Это значит, что точки x_k являются нулями полинома

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i p_{ni}(x).$$

Данные нули лежат в интервале $(0,1)$ и их количество равно $n-1$. В силу предложения 3 такое возможно только тогда, когда все y_i равны нулю. Предложение доказано. $\square$

4°. Вернёмся к задаче (9). Согласно предложению 4 строки матрицы A при $m < n-1$ линейно независимы. В этом случае матрица AA^T симметрична и положительно определена и у неё существует обратная матрица $(AA^T)^{-1}$, которая также симметрична и положительно определена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Единственным решением задачи* (9) *является матрица*

$$\widehat{Z} = A^T(AA^T)^{-1}R.$$

Доказательство. Очевидно, что матрица $\widehat{Z}$ удовлетворяет ограничению задачи (9). Любую другую матрицу Z, удовлетворяющую этому ограничению, можно представить в виде $Z = \widehat{Z} + H$, где $AH = \mathbb{O}$.

Запишем

$$\begin{aligned}\|Z\|^2 = \|\widehat{Z} + H\|^2 &= \sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{s} |\widehat{z}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}|^2 = \\ &= \|\widehat{Z}\|^2 + \|H\|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{s} \widehat{z}_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{11}$$

Последняя двойная сумма есть сумма диагональных элементов матрицы $\widehat{Z}^T H$. Она обозначается $\operatorname{tr}(\widehat{Z}^T H)$. Поскольку

$$\widehat{Z}^T H = R^T(AA^T)^{-1}(AH) = \mathbb{O},$$

то $\operatorname{tr}(\widehat{Z}^T H) = 0$. Формула (11) принимает вид

$$\|\widehat{Z} + H\|^2 = \|\widehat{Z}\|^2 + \|H\|^2.$$

Отсюда следует и оптимальность матрицы $\widehat{Z}$ и её единственность.

Предложение доказано. □

5°. Обозначим через $\widehat{Z}_\alpha$ строку матрицы $\widehat{Z}$ с индексом α. Тогда решение системы векторных уравнений (5), наиболее близкое к полюсам $\{Y_\alpha\}$, допускает представление

$$\widehat{Y}_\alpha = Y_\alpha + \widehat{Z}_\alpha, \quad \alpha \in 1:n-1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Разбиение кривых Безье* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 3 июня 2006 г.

2. Farin G. *Curves and Surfaces for CAGD*. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002. xvii+499pp.

3. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 14 декабря 2004 г.

4. Мысовских И. П. *Лекции по методам вычислений.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 472 с.