СТАЦИОНАРНЫЕ И ЧЕБЫШЁВСКИЕ ТОЧКИ В МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧАХ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

25 апреля 2013 г.

1°. Рассмотрим дискретную минимаксную задачу

$$\varphi(x) := \max_{i\in I} f_i(x) \to \inf_{x\in\mathbb{R}^n},$$

где I — конечное множество индексов, $|I| \geqslant n+1$, и $f_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ функции.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} R(x) &= \bigl\{ i\in I \mid f_i(x) = \varphi(x) \bigr\}, \\ C(x) &= \operatorname{co}\bigl\{ f_i'(x) \mid i\in R(x) \bigr\}. \end{aligned}$$

Напомним, что точка $x_* \in \mathbb{R}^n$ называется *стационарной точкой* функции максимума $\varphi(x)$, если выполнено одно из двух эквивалентных условий (см. [1, с. 77–79]):

$$\min_{\|g\|=1} \max_{i\in R(x_*)} \bigl\langle f_i'(x_*), g \bigr\rangle \geqslant 0;$$
$$\mathbb{O} \in C(x_*).$$

Понятие стационарности можно связать с идеей линеаризации [2, с. 258–260]. Для этого введём при фиксированном x вспомогательную задачу

$$\max_{i\in I}\Bigl\{ f_i(x) + \bigl\langle f_i'(x), p \bigr\rangle \Bigr\} + \tfrac{1}{2}\|p\|^2 \to \min_{p\in\mathbb{R}^n}. \tag{1}$$

В Приложении будет доказано, что задача (1) имеет решение и это решение единственно. Обозначим его $p(x)$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы точка x_* была стационарной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $p(x_*) = \mathbb{O}$.*

Доказательство. Достаточность. Запишем задачу, эквивалентную (1):

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\|p\|^2 + \beta \to \min, \\ -\langle f_i'(x), p\rangle + \beta \geqslant f_i(x), \quad i \in I. \end{gathered} \tag{2}$$

В силу эквивалентности эта задача, как и задача (1), имеет единственное решение $\big(p(x), \beta(x)\big)$, причём необходимо

$$\beta(x) = \max_{i\in I}\Big\{ f_i(x) + \big\langle f_i'(x), p(x)\big\rangle\Big\}. \tag{3}$$

У экстремальной задачи (2) целевая функция выпуклая и ограничения линейные. Воспользуемся критерием оптимальности (см., например, [3, с. 91]): для того чтобы план (p, β) задачи (2) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа α_i, $i \in I$, такие, что

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i\in I} \alpha_i \begin{pmatrix} -f_i'(x) \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \alpha_i\Big(f_i(x) + \big\langle f_i'(x), p\big\rangle - \beta\Big) = 0,\ i \in I; \\ \alpha_i \geqslant 0,\ i \in I. \end{gathered}$$

Перепишем эти условия в виде

$$\begin{gathered} \sum_{i\in I} \alpha_i f_i'(x) = -p; \\ \sum_{i\in I} \alpha_i = 1; \quad \alpha_i \geqslant 0,\ i \in I; \\ \alpha_i\Big(f_i(x) + \big\langle f_i'(x), p\big\rangle - \beta\Big) = 0,\ i \in I. \end{gathered} \tag{4}$$

Условия (4) называются *условиями Куна-Таккера* (применительно к задаче (2)).

Выделим последнее соотношение

$$\alpha_i\Big(f_i(x) + \big\langle f_i'(x), p\big\rangle - \beta\Big) = 0,\ i \in I. \tag{5}$$

Оно называется *условием дополнительности.* Сложим равенства (5). Приняв во внимание свойства коэффициентов α_i, получим

$$\sum_{i\in I} \alpha_i f_i(x) = \|p\|^2 + \beta. \tag{6}$$

Предположим теперь, что $p(x_*) = \mathbb{O}$. Тогда, согласно (3), $\beta(x_*) = \varphi(x_*)$. Условия Куна-Таккера (4) примут вид

$$\sum_{i\in I} \alpha_i f_i'(x_*) = \mathbb{O};$$
$$\sum_{i\in I} \alpha_i = 1; \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i \in I;$$
$$\alpha_i\big(f_i(x_*) - \varphi(x_*)\big) = 0, \quad i \in I.$$

Из условия дополнительности следует, что $\alpha_i = 0$ при $i \notin R(x_*)$. Таким образом, если в точке x_* выполняется равенство $p(x_*) = \mathbb{O}$, то найдутся числа α_i, $i \in R(x_*)$, такие, что

$$\begin{gathered}\sum_{i\in R(x_*)} \alpha_i f_i'(x_*) = \mathbb{O};\\ \sum_{i\in R(x_*)} \alpha_i = 1; \quad \alpha_i \geqslant 0,\ i \in R(x_*).\end{gathered} \tag{7}$$

Это значит, что $\mathbb{O} \in C(x_*)$, то есть x_* — стационарная точка.
Необходимость. Пусть x_* — стационарная точка функции $\varphi(x)$. Тогда выполняются соотношения (7). Доопределим α_i, положив $\alpha_i = 0$ при $i \in I \setminus R(x_*)$. В этом случае при $x = x_*$ и $p = \mathbb{O}$, $\beta = \varphi(x_*)$ будут выполнятся условия Куна-Таккера (4). Выполнение условий Куна-Таккера гарантирует, что пара $p = \mathbb{O}$, $\beta = \varphi(x_*)$ является решением задачи (2) при $x = x_*$. На основании эквивалентности задач (1) и (2) заключаем, что $p(x_*) = \mathbb{O}$. Теорема доказана. $\square$

2°. Точка x_* называется *чебышёвской точкой* функции $\varphi(x)$, если $\big|R(x_*)\big| = n + 1$, векторы $f_i'(x_*)$, $i \in R(x_*)$, аффинно независимы и существуют положительные числа α_i, $i \in R(x_*)$, такие, что

$$\begin{gathered}\sum_{i\in R(x_*)} \alpha_i f_i'(x_*) = \mathbb{O},\\ \sum_{i\in R(x_*)} \alpha_i = 1.\end{gathered} \tag{8}$$

Аффинная независимость гарантирует единственность коэффициентов α_i. Кроме того, из (8), условия $\big|R(x_*)\big| = n + 1$ и положительности α_i следует, что любые n векторов из системы $\big\{f_i'(x_*)\big\}_{i\in R(x_*)}$ линейно независимы.

Свойства чебышёвских точек изучались в работе [4].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть x_* — чебышёвская точка. Тогда величина*

$$\eta_* = \min_{\|g\|=1} \max_{i\in R(x_*)} \big\langle f_i'(x_*), g\big\rangle$$

положительна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введём функцию

$$\eta(g) = \max_{i \in R(x_*)} \big\langle f_i'(x_*), g \big\rangle.$$

Очевидно, что эта функция непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Покажем, что она положительна на единичной сфере $S^{n-1} = \big\{ g \in \mathbb{R}^n \mid \|g\| = 1 \big\}$. Отсюда и из теоремы Вейерштрасса о существовании точки минимума у непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции будет следовать заключение теоремы 2.

Зафиксируем $g \in S^{n-1}$. Согласно (8) имеем

$$0 = \sum_{i \in R(x_*)} \alpha_i \big\langle f_i'(x_*), g \big\rangle \leqslant \eta(g).$$

Допустив, что $\eta(g) = 0$, получим

$$\sum_{i \in R(x_*)} \alpha_i \big\langle f_i'(x_*), g \big\rangle = 0. \tag{9}$$

Вместе с тем, условие $\eta(g) = 0$ гарантирует, что все скалярные произведения $\big\langle f_i'(x_*), g \big\rangle$, $i \in R(x_*)$, неположительны. Коэффициенты α_i положительны, поэтому равенство (9) возможно лишь тогда, когда

$$\big\langle f_i'(x_*), g \big\rangle = 0 \quad \forall i \in R(x_*). \tag{10}$$

Рассмотрим (10) как систему линейных однородных уравнений относительно g. Она имеет только нулевое решение $g = \mathbb{O}$, поскольку, как отмечалось, любые n векторов из системы $\big\{ f_i'(x_*) \big\}_{i \in R(x_*)}$ линейно независимы. Но это противоречит условию $\|g\| = 1$.

Таким образом, $\eta(g) > 0$ при всех $g \in S^{n-1}$. Теорема доказана. □

Приведём два следствия. Обозначим

$$B_r(x_*) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_*\| \leqslant r \big\}, \quad r > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *По любому $\eta \in (0,\ \eta_*)$ найдётся $r > 0$, такое, что*

$$\min_{\|g\|=1} \max_{i \in R(x_*)} \big\langle f_i'(x_i), g \big\rangle \geqslant \eta \tag{11}$$

при всех $x_i \in B_r(x_*)$.

Константу $r > 0$ выберем из условия

$$\big\| f_i'(x_i) - f_i'(x_*) \big\| \leqslant \eta_* - \eta, \quad x_i \in B_r(x_*),\ i \in R(x_*).$$

В этом случае

$$\min_{\|g\|=1} \max_{i\in R(x_*)} \left\langle f_i'(x_*), g \right\rangle - \min_{\|g\|=1} \max_{i\in R(x_*)} \left\langle f_i'(x_i), g \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\|g\|=1} \max_{i\in R(x_*)} \left| \left\langle f_i'(x_*) - f_i'(x_i), g \right\rangle \right| \leqslant \eta_* - \eta.$$

Вспоминая определение η_*, приходим к (11).

СЛЕДСТВИЕ 2. *При любых x, z из $B_r(x_*)$ выполняется неравенство*

$$\max_{i\in R(x_*)} f_i(x) \geqslant \min_{i\in R(x_*)} f_i(z) + \eta\|x-z\|. \tag{12}$$

При $z = x$ неравенство (12) очевидно. Предположим, что $z \neq x$. Имеем

$$f_i(x) - f_i(z) \leqslant f_i(x) - \min_{i\in R(x_*)} f_i(z) \leqslant \max_{i\in R(x_*)} f_i(x) - \min_{i\in R(x_*)} f_i(z),$$

поэтому

$$\max_{i\in R(x_*)} f_i(x) - \min_{i\in R(x_*)} f_i(z) \geqslant \max_{i\in R(x_*)} \left\{ f_i(x) - f_i(z) \right\} =$$
$$= \max_{i\in R(x_*)} \left\{ \left\langle f_i'(z + \theta_i(x-z)), x - z \right\rangle \right\}, \quad \theta_i \in (0,\ 1).$$

По условию точки x, z принадлежат $B_r(x_*)$. Ясно, что точки

$$x_i = z + \theta_i(x-z) = \theta_i x + (1-\theta_i)z$$

при $\theta_i \in (0,\ 1)$ также принадлежат $B_r(x_*)$. Остаётся сослаться на неравенство (11).

Положив в (12) $z = x_*$, получим, в частности,

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_*) + \eta\|x - x_*\| \quad \forall x \in B_r(x_*). \tag{13}$$

Значит, чебышёвская точка является точкой сильного локального минимума функции $\varphi(x)$.

3°. По определению чебышёвская точка относится к числу стационарных точек функции $\varphi(x)$.

ТЕОРЕМА 3. *Чебышёвская точка x_* является изолированной стационарной точкой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда найдётся последовательность стационарных точек $\{x_k\}$, сходящаяся к x_*, причём все x_k отличны от x_*. По определению стационарных точек $\mathbb{O} \in C(x_k)$, то есть

$$\begin{gathered}\sum_{i \in R(x_k)} \alpha_i^{(k)} f_i'(x_k) = \mathbb{O}; \\ \sum_{i \in R(x_k)} \alpha_i^{(k)} = 1; \quad \alpha_i^{(k)} \geqslant 0,\ i \in R(x_k).\end{gathered} \tag{14}$$

Ясно, что $R(x_k) \subset R(x_*)$ при больших k. Выделим подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, такую, что все индексные множества $R(x_{k_j})$ одинаковы, $R(x_{k_j}) = I_0$. Можно считать, что последовательности коэффициентов $\{\alpha_i^{(k_j)}\}$ сходятся, $\alpha_i^{(k_j)} \to \alpha_i^*$, $i \in I_0$.

По условию $I_0 \subset R(x_*)$. Возможны два случая.

1) $I_0 \neq R(x_*)$. На основании (14) в пределе при $k_j \to \infty$ получаем

$$\begin{gathered}\sum_{i \in I_0} \alpha_i^* f_i'(x_*) = \mathbb{O}; \\ \sum_{i \in I_0} \alpha_i^* = 1; \quad \alpha_i^* \geqslant 0,\ i \in I_0.\end{gathered}$$

Но это противоречит тому факту, что у чебышёвской точки x_* любое собственное подмножество множества $\left\{f_i'(x_*)\right\}_{i \in R(x_*)}$ состоит из линейно независимых векторов.

2) $I_0 = R(x_*)$, то есть $R(x_{k_j}) = R(x_*)$. Согласно (13) при больших k_j имеем

$$\varphi(x_{k_j}) \geqslant \varphi(x_*) + \eta \|x_{k_j} - x_*\|. \tag{15}$$

Вместе с тем,

$$\min_{i \in R(x_*)} f_i(x_{k_j}) = \min_{i \in R(x_{k_j})} f_i(x_{k_j}) = \varphi(x_{k_j}).$$

Воспользуемся неравенством (12) при $x = x_*$, $z = x_{k_j}$. Получим

$$\varphi(x_*) \geqslant \varphi(x_{k_j}) + \eta \|x_* - x_{k_j}\|.$$

Но это противоречит (15). Теорема доказана. $\square$

4°. Исследуем решение $p(x)$ задачи (1) в окрестности чебышёвской точки. Зафиксируем параметр $\gamma \in (0,\,1)$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть x_* — чебышёвская точка функции $\varphi(x)$. Тогда при x, близких к x_*, справедливы следующие утверждения:*

1) решение $p(x)$ задачи (1) *определяется из системы линейных уравнений $(n+1)$-го порядка*

$$\bigl\langle f_i'(x), p\bigr\rangle - \beta = -f_i(x),\ \ i \in R(x_*); \tag{16}$$

2) выполняется неравенство

$$\varphi\bigl(x + p(x)\bigr) \leqslant \varphi(x) - \gamma\bigl\|p(x)\bigr\|^2. \tag{17}$$

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно α_i:

$$\begin{gathered} \sum_{i\in R(x_*)} \alpha_i f_i'(x) = -p, \\ \sum_{i\in R(x_*)} \alpha_i = 1. \end{gathered} \tag{18}$$

При $x = x_*$ определитель этой системы отличен от нуля, а при $x = x_*$, $p = \mathbb{O}$ система имеет положительное решение. В следствии 1 из теоремы 2 мы выбрали два положительных параметра η и r. В силу непрерывной зависимости решения системы (18) от параметров найдутся $r_1 \in (0,\ r]$ и $\delta > 0$, такие, что при $x \in B_{r_1}(x_*)$ и $\|p\| \leqslant \delta$ система (18) также будет иметь положительное решение. Можно считать δ столь малым, что при $\|p\| \leqslant \delta$ равномерно по $x \in B_{r_1}(x_*)$ выполняется неравенство

$$\max_{i\in I}\bigl\| f_i'(x+p) - f_i'(x)\bigr\| \leqslant (1-\gamma)\eta. \tag{19}$$

Обратимся к системе (16). При $x = x_*$ определитель этой системы отличен от нуля в силу аффинной независимости векторов $\bigl\{f_i'(x_*)\bigr\}_{i\in R(x_*)}$. Решением системы является пара $p = \mathbb{O}$, $\beta = \varphi(x_*)$. По непрерывности найдётся $r_2 \in (0,\,r_1]$, такое, что при $x \in B_{r_2}(x_*)$ система (16) также будет иметь решение $\bigl(\widetilde{p}(x), \widetilde{\beta}(x)\bigr)$, при этом можно считать, что $\bigl\|\widetilde{p}(x)\bigr\| \leqslant \delta$ и

$$f_i(x) + \bigl\langle f_i'(x), \widetilde{p}(x)\bigr\rangle < \widetilde{\beta}(x) \quad \text{при} \quad i \notin R(x_*).$$

Выполнения последнего неравенства можно добиться за счёт того, что $f_i(x_*) < \varphi(x_*)$ при $i \notin R(x_*)$.

При указанных x и $p = \widetilde{p}(x)$ система (18) имеет положительное решение α_i, $i \in R(x_*)$. Дополнив его нулями, $\alpha_i = 0$, $i \in I \setminus R(x_*)$, получим план $\bigl(\widetilde{p}(x), \widetilde{\beta}(x)\bigr)$ задачи (2), на котором выполняются условия оптимальности (4), включая условие дополнительности. Значит, $\widetilde{p}(x)$ — решение задачи (1). В силу единственности $\widetilde{p}(x) = p(x)$. Утверждение 1) установлено.

Переходим к доказательству утверждения 2). По теореме 3 чебышёвская точка x_* является изолированной стационарной точкой, поэтому можно считать, что при $x \in B_{r_2}(x_*)$, $x \neq x_*$ вектор $p(x)$ отличен от нулевого. При $x = x_*$ неравенство (17) тривиально. В дальнейшем считаем, что $x \neq x_*$.

Согласно (16)

$$f_i(x) - \beta(x) = \bigl\langle f_i'(x), -p(x)\bigr\rangle,\ i \in R(x_*).$$

Отсюда и из (11) следует, что при $x \in B_{r_2}(x_*)$

$$\varphi(x) - \beta(x) \geqslant \max_{i \in R(x_*)} \bigl\langle f_i'(x), -p(x)\bigr\rangle \geqslant \eta\bigl\|p(x)\bigr\|.$$

В силу (3) и (19) при тех же $x \in B_{r_2}(x_*)$ имеем

$$\begin{aligned}\Bigl|\varphi\bigl(x + p(x)\bigr) - \beta(x)\Bigr| \leqslant \max_{i \in I}\Bigl| f_i\bigl(x + p(x)\bigr) - f_i(x) - \bigl\langle f_i'(x), p(x)\bigr\rangle\Bigr| = \\ = \max_{i \in I}\Bigl|\bigl\langle f_i'(x + \theta_i p(x)) - f_i'(x), p(x)\bigr\rangle\Bigr| \leqslant \\ \leqslant (1-\gamma)\eta\bigl\|p(x)\bigr\| \leqslant (1-\gamma)\bigl[\varphi(x) - \beta(x)\bigr].\end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi\bigl(x + p(x)\bigr) \geqslant \varphi(x) - \beta(x) - \Bigl|\varphi\bigl(x + p(x)\bigr) - \beta(x)\Bigr| \geqslant \\ \geqslant \gamma\bigl[\varphi(x) - \beta(x)\bigr].\end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что согласно (6)

$$\bigl\|p(x)\bigr\|^2 + \beta(x) = \sum_{i \in I}\alpha_i f_i(x) \leqslant \varphi(x),$$

так что

$$\varphi(x) - \beta(x) \geqslant \bigl\|p(x)\bigr\|^2.$$

Подставив это в (20), придём к требуемому неравенству (17).

Теорема доказана. □

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что у экстремальной задачи

$$F(p) := \max_{i\in I}\bigl\{a_i + \langle g_i, p\rangle\bigr\} + \tfrac{1}{2}\|p\|^2 \to \min_{p\in\mathbb{R}^n} \tag{21}$$

решение существует и единственно.

Обозначим

$$a = \max_{i\in I} |a_i|, \quad b = \max_{i\in I} \|g_i\|.$$

Ясно, что $b \geqslant 0$. Если $b = 0$, то единственным решением задачи (21) будет $p = \mathbb{O}$. В дальнейшем считаем, что $b > 0$.

Возьмём произвольную точку $p_0 \in \mathbb{R}^n$ и введём множество

$$\mathcal{L} = \bigl\{p \in \mathbb{R}^n \mid F(p) \leqslant F(p_0)\bigr\}.$$

Это множество замкнутое. Проверим его ограниченность.

Зафиксируем $p \in \mathcal{L}$. Имеем

$$F(p) \geqslant \tfrac{1}{2}\|p\|^2 - \max_{i\in I}\bigl|a_i + \langle g_i, p\rangle\bigr| \geqslant \tfrac{1}{2}\|p\|^2 - a - b\|p\|,$$

поэтому

$$\tfrac{1}{2}\|p\|^2 - b\|p\| - a \leqslant F(p_0).$$

Положим $c = a + F(p_0)$. Тогда

$$\tfrac{1}{2}\|p\|^2 - b\|p\| \leqslant c.$$

Если $c \leqslant 0$, то

$$\tfrac{1}{2}\|p\|^2 - b\|p\| \leqslant 0,$$

отсюда следует, что $\|p\| \leqslant 2b$.

При $c > 0$ найдём единственный положительный корень уравнения $\frac{1}{2}t^2 - bt = c$. Обозначим его t_0. Очевидно, что $\|p\| \leqslant t_0$.

В обоих случаях выполняется неравенство

$$\|p\| \leqslant \max\{2b,\ t_0\} \quad \forall p \in \mathcal{L},$$

которое гарантирует ограниченность множества $\mathcal{L}$.

Из ограниченности и замкнутости множества $\mathcal{L}$ следует существование точки минимума p_* функции $F(p)$ на $\mathcal{L}$. Та же точка p_* будет точкой минимума $F(p)$ на $\mathbb{R}^n$.

Вывод о единственности точки минимума делаем на основании строгой выпуклости функции $F(p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972. 368 с.

2. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. *Численные методы в экстремальных задачах.* М.: Наука, 1975. 320 с.

3. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

4. Даугавет В. А., Малозёмов В. Н. *Квадратичная скорость сходимости одного метода линеаризации для решения дискретных минимаксных задач* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 4. С. 835–843.