ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ КЛЕНШОУ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЁХ- И ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ МАТРИЦАМИ*

А. Н. Сабаев

25 сентября 2007 г.

1°. Пусть $n \geqslant 3$. Квадратную матрицу A_n над полем $\mathbb{C}$ вида

$$A_n = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q_1 \\ q_2 & p_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & p_3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1} & p_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_n & p_n \end{pmatrix}$$

будем называть трёхдиагональной циклической матрицей.

Рассмотрим систему линейных уравнений n-го порядка с трёхдиагональной циклической матрицей

$$A_n\, X_n = F_n\,, \tag{1}$$

где

$$X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \qquad F_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Введём вспомогательные переменные x_0 и x_{n+1} связанные с переменными системы (1) равенствами

$$x_0 = x_n\,, \qquad x_{n+1} = x_1\,. \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Объединим систему (1) с уравнениями (2). Получим равносильную систему

$$\begin{cases} q_k\, x_{k-1} + p_k\, x_k + x_{k+1} = f_k\,, & k \in 1:n\,, \\ \qquad x_n = x_0\,, \qquad x_{n+1} = x_1\,. \end{cases} \tag{3}$$

2°. Покажем, как схема Кленшоу позволяет свести решение системы (3) к решению системы уравнений второго порядка.

Систему (3) можно представить в виде

$$\begin{cases} q_k\, x_{k-1} + p_k\, x_k + x_{k+1} = f_k\,, & k \in 1:n\,, \\ \qquad x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\, x_k\,, \qquad x_1 = \sum\limits_{k=1}^{n+1} b_k\, x_k\,, \end{cases} \tag{4}$$

где $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$; $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, $b_{n+1} = 1$.

Определим последовательности $u = \{u_k\}_{k=0}^{n+1}$ и $v = \{v_k\}_{k=0}^{n+2}$ формулами

$$a_k = q_{k+1}\, u_{k+1} + p_k\, u_k + u_{k-1}\,, \quad k = n, n-1, \ldots, 1\,; \quad u_{n+1} = u_n = 0\,; \tag{5}$$

$$b_k = q_{k+1}\, v_{k+1} + p_k\, v_k + v_{k-1}\,, \quad k = n+1, n, \ldots, 1\,; \quad v_{n+2} = v_{n+1} = 0\,. \tag{6}$$

Здесь для единообразия формул введены коэффициенты q_{n+2}, q_{n+1}, p_{n+1}, которые могут иметь любые значения из $\mathbb{C}$.

Такие последовательности существуют:

$$u_n = 0\,,\ \ u_{n-1} = 1\,; \quad u_{k-1} = -p_k\, u_k - q_{k+1}\, u_{k+1}\,, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1\,; \tag{7}$$

$$v_n = 1\,,\ \ v_{n-1} = -p_n\,; \quad v_{k-1} = -p_k\, v_k - q_{k+1}\, v_{k+1}\,, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1\,. \tag{8}$$

С учётом введённых последовательностей u и v преобразуем суммы в правых частях последних двух уравнений системы (4)

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{k=1}^{n} (q_{k+1}\, u_{k+1} + p_k\, u_k + u_{k-1})\, x_k = \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} u_k\, q_k\, x_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} u_k\, p_k\, x_k + \sum_{k=0}^{n-1} u_k\, x_{k+1} = \\ &= u_0\, x_1 - u_1\, q_1\, x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k\, (q_k\, x_{k-1} + p_k\, x_k + x_{k+1})\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{k=1}^{n+1} (q_{k+1}\, v_{k+1} + p_k\, v_k + v_{k-1})\, x_k = \\ &= \sum_{k=2}^{n+2} v_k\, q_k\, x_{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} v_k\, p_k\, x_k + \sum_{k=0}^{n} v_k\, x_{k+1} = \\ &= v_0\, x_1 - v_1\, q_1\, x_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k\, (q_k\, x_{k-1} + p_k\, x_k + x_{k+1})\,. \end{aligned}$$

Теперь систему (4) можно представить в виде

$$\begin{cases} q_k\,x_{k-1} + p_k\,x_k + x_{k+1} = f_k\,, \qquad k \in 1:n\,, \\ (1 + u_1\,q_1)\,x_0 - u_0\,x_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k\,(q_k\,x_{k-1} + p_k\,x_k + x_{k+1})\,, \\ v_1\,q_1\,x_0 + (1 - v_0)\,x_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k\,(q_k\,x_{k-1} + p_k\,x_k + x_{k+1})\,. \end{cases} \tag{9}$$

Ясно, что система (9) равносильна системе (4).
Отсюда получается равносильная система

$$\begin{cases} q_k\,x_{k-1} + p_k\,x_k + x_{k+1} = f_k\,, \qquad k \in 1:n\,, \\ (1 + u_1\,q_1)\,x_0 - u_0\,x_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k\,f_k\,, \\ v_1\,q_1\,x_0 + (1 - v_0)\,x_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k\,f_k\,. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что последние два уравнения системы (10) составляют замкнутую подсистему относительно x_0 и x_1

$$\begin{cases} (1 + u_1\,q_1)\,x_0 - u_0\,x_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k\,f_k\,, \\ v_1\,q_1\,x_0 + (1 - v_0)\,x_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k\,f_k\,. \end{cases} \tag{11}$$

Неизвестные $x_2, \ldots, x_{n+1}$ однозначно вычисляются для каждой пары x_0, x_1 найденной из (11). Для этого нужно воспользоваться первыми n уравнениями системы (10) представленными в виде рекуррентного соотношения

$$x_k = f_{k-1} - p_{k-1}\,x_{k-1} - q_{k-1}\,x_{k-2}\,, \qquad k \in 2:n+1\,. \tag{12}$$

Равносильность проделанных преобразований позволяет утверждать, что возможность решения системы (1), а также единственность решения системы (1) определяются свойствами системы (11). Здесь могут представиться три случая.

1) Система (11) несовместна. Следовательно исходная система (1) тоже несовместна.

2) Система (11) имеет единственное решение. В этом случае исходная система (1) тоже имеет единственное решение.

3) Система (11) имеет бесконечное множество решений. В этом случае исходная система (1) тоже имеет бесконечное множество решений.

Замечание 1. При проведении вычислений по формуле (12) можно ограничиться индексным множеством $k \in 2 : n-1$, так как значения неизвестных x_n и x_{n+1} дают последние два уравнения системы (3). Более того, значение x_{n+1} для нахождения решения исходной системы не требуется.

Замечание 2. Для системы (11) имеет место матричное представление

$$\left[I_2 + \begin{pmatrix} u_1 & u_0 \\ v_1 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k\, f_k \quad \sum_{k=1}^{n} v_k\, f_k \right)^T ,$$

где I_2 – единичная матрица 2–го порядка.

ПРИМЕР. Решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Вычислим последовательноти u и v, пользуясь формулами (7), (8):

$$\begin{aligned}
&u_5 = 0\,, \qquad u_4 = 1\,, \\
&u_3 = -p_4\, u_4 - q_5\, u_5 = -3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -3\,, \\
&u_2 = -p_3\, u_3 - q_4\, u_4 = -2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 = 8\,, \\
&u_1 = -p_2\, u_2 - q_3\, u_3 = -3 \cdot 8 - 0 \cdot (-3) = -24\,, \\
&u_0 = -p_1\, u_1 - q_2\, u_2 = -2 \cdot (-24) - (-2) \cdot 8 = 64\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&v_5 = 1\,, \qquad v_4 = -p_5 = -1\,, \\
&v_3 = -p_4\, v_4 - q_5\, v_5 = -3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 2\,, \\
&v_2 = -p_3\, v_3 - q_4\, v_4 = -2 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1) = -6\,, \\
&v_1 = -p_2\, v_2 - q_3\, v_3 = -3 \cdot (-6) - 0 \cdot 2 = 18\,, \\
&v_0 = -p_1\, v_1 - q_2\, v_2 = -2 \cdot 18 - (-2) \cdot (-6) = -48\,.
\end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты и правые части системы (11)

$$\begin{aligned}
1 + u_1\, q_1 &= 1 + (-24) \cdot 2 = -47\,, & -u_0 &= -64\,, \\
v_1\, q_1 &= 18 \cdot 2 = 36\,, & 1 - v_0 &= 1 - (-48) = 49\,,
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{4} u_k\, f_k = -24\cdot 3 + 8\cdot(-1) - 3\cdot 1 + 1\cdot 2 = -81\,,$$
$$\sum_{k=1}^{5} v_k\, f_k = 18\cdot 3 - 6\cdot(-1) + 2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 2 = 62\,.$$

Система (11) принимает вид

$$\begin{cases} -47\,x_0 - 64\,x_1 = -81\,, \\ \;\;36\,x_0 + 49\,x_1 = 62\,. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение $x_0 = -1$, $x_1 = 2$. Из (2) следует, что $x_5 = -1$.

Остальные неизвестные вычисляем по формуле (12)

$$x_2 = f_1 - q_1\,x_0 - p_1\,x_1 = 3 - 2\cdot(-1) - 2\cdot 2 = 1\,,$$
$$x_3 = f_2 - q_2\,x_1 - p_2\,x_2 = -1 - (-2)\cdot 2 - 3\cdot 1 = 0\,,$$
$$x_4 = f_3 - q_3\,x_2 - p_3\,x_3 = 1 - 0\cdot 1 - 2\cdot 0 = 1\,.$$

Ответ: $X_5 = (2, 1, 0, 1, -1)^T$.

Изложенный выше метод в случае единственности решения (случай 2) может быть реализован следующей программой

```
u1 := 0;    u := 1;
v1 := 1;    v := −p_n;
s1 := 0;   s2 := f_n;
for k := n−1 downto 1 do begin
    s1 := s1 + u ∗ f_k;
    s2 := s2 + v ∗ f_k;
    u2 := u1;   u1 := u;
    v2 := v1;   v1 := v;
     u := −u1 ∗ p_k − u2 ∗ q_{k+1};
     v := −v1 ∗ p_k − v2 ∗ q_{k+1}
end;
a11 := 1 + u1 ∗ q_1; a12 := −u;
a21 := v1 ∗ q_1;       a22 := 1 − v;
det  := a11 ∗ a22 − a12 ∗ a21;
x[0]  := (s1 ∗ a22 − s2 ∗ a12) / det;
x[1]  := (a11 ∗ s2 − s1 ∗ a21) / det;
for k := 1 to n−2 do
    x[k+1] := f_k − p_k ∗ x[k] − q_k ∗ x[k−1];
x[n] := x[0];
```

После завершения работы программы массив x[1: n] будет содержать решение системы (1).

3°. Рассмотрим систему линейных уравнений (1) при $n \geqslant 5$ с матрицей A_n вида

$$A_n = \begin{pmatrix} p_1 & g_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & q_1 \\ q_2 & p_2 & g_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_2 \\ h_3 & q_3 & p_3 & g_3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-2} & g_{n-2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1} & p_{n-1} & g_{n-1} \\ g_n & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_n & q_n & p_n \end{pmatrix},$$

которую будем называть пятидиагональной циклической матрицей.

Введём вспомогательные переменные x_{-1}, x_0, x_{n+1}, x_{n+2} связанные с переменными системы (1) равенствами

$$x_j = x_{j+n}\,, \qquad j \in -1 : 2\,. \tag{13}$$

Объединим систему (1) с уравнениями (13). Получим равносильную систему

$$\begin{cases} h_k\, x_{k-2} + q_k\, x_{k-1} + p_k\, x_k + g_k\, x_{k+1} + x_{k+2} = f_k\,, \qquad k \in 1 : n\,, \\ \hfill x_j = x_{j+n}\,, \quad j \in -1 : 2\,. \end{cases} \tag{14}$$

Покажем, как схема Кленшоу позволяет свести решение системы (14) к решению системы уравнений четвёртого порядка.

Представим последние четыре уравнения системы (14) в виде

$$x_j = \sum_{k=2}^{n+j} a_k^j\, x_k, \qquad j \in -1 : 2\,, \tag{15}$$

где $a_2^j = a_3^j = \dots = a_{n+j-1}^j = 0, \quad a_{n+j}^j = 1$.

Определим последовательности $u^j = \{u_k^j\}_{k=0}^{n+j+2}$ при $j \in -1 : 2$ рекуррентной формулой

$$a_k^j = h_{k+2}\, u_{k+2}^j + q_{k+1}\, u_{k+1}^j + p_k\, u_k^j + g_{k-1}\, u_{k-1}^j + u_{k-2}^j\,, \quad k \in n+j : 2\,, \tag{16}$$

с начальными условиями

$$u_{n+j+2}^j = u_{n+j+1}^j = u_{n+j}^j = u_{n+j-1}^j = 0\,. \tag{17}$$

В (16) для единообразия формул введены коэффициенты $\{h_k\}_{k=n+1}^{n+4}$, $\{q_k\}_{k=n+1}^{n+3}$, p_{n+1}, p_{n+2}, g_{n+1} которые могут иметь любые значения из $\mathbb{C}$.

Такие последовательности существуют

$$u^j_{n+j+1} = u^j_{n+j} = u^j_{n+j-1} = 0\,, \quad u^j_{n+j-2} = 1\,; \tag{18}$$

$$u^j_{k-2} = -g_{k-1}\, u^j_{k-1} - p_k\, u^j_k - q_{k+1}\, u^j_{k+1} - h_{k+2}\, u^j_{k+2}\,, \quad k = n+j-1 : 2\,. \tag{19}$$

Формулы (18) и (19) преобразуем к виду более удобному для вычислений

$$\begin{cases} u^{-1}_n = 0\,, & u^{-1}_{n-1} = 0\,, & u^{-1}_{n-2} = 0\,, & u^{-1}_{n-3} = 1\,; \\ u^0_n = 0\,, & u^0_{n-1} = 0, & u^0_{n-2} = 1, & u^0_{n-3} = -g_{n-2}; \\ u^1_n = 0\,, & u^1_{n-1} = 1, & u^1_{n-2} = -g_{n-1}, & u^1_{n-3} = g_{n-2}\, g_{n-1} - p_{n-1}\,; \\ u^2_n = 1\,, & u^2_{n-1} = -g_n, & u^2_{n-2} = g_{n-1} g_n - p_n\,; & u^2_{n-3} = g_{n-2}\,(p_n - g_n\, g_{n-1}) + \\ & & & \qquad + g_n\, p_{n-1} - q_n\,; \end{cases} \tag{20}$$

$$u^j_k = -g_{k+1}\, u^j_{k+1} - p_{k+2}\, u^j_{k+2} - q_{k+3}\, u^j_{k+3} - h_{k+4}\, u^j_{k+4}\,, \quad k = n-4 : 0. \tag{21}$$

Преобразуем формулы (15), используя (16):

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{k=2}^{n+j} (h_{k+2}\, u^j_{k+2} + q_{k+1}\, u^j_{k+1} + p_k\, u^j_k + g_{k-1}\, u^j_{k-1} + u^j_{k-2})\, x_k = \\ &= \sum_{k=4}^{n+j+2} u^j_k\, h_k\, x_{k-2} + \sum_{k=3}^{n+j+1} u^j_k\, q_k\, x_{k-1} + \sum_{k=2}^{n+j} u^j_k\, p_k x_k + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+j-1} u^j_k\, g_k\, x_{k+1} + \sum_{k=0}^{n+j-2} u^j_k\, x_{k+2}\,, \qquad j \in -1:2\,. \end{aligned}$$

Выбор начальных условий (17) обеспечивает обнуление части слагаемых

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{k=1}^{n+j-2} u^j_k\, h_k\, x_{k-2} - \sum_{k=1}^{3} u^j_k\, h_k\, x_{k-2} + \sum_{k=1}^{n+j-2} u^j_k\, q_k\, x_{k-1} - \sum_{k=1}^{2} u^j_k\, q_k\, x_{k-1} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+j-2} u^j_k\, p_k\, x_k - u^j_1\, p_1\, x_1 + \sum_{k=1}^{n+j-2} u^j_k\, g_k\, x_{k+1} + \sum_{k=1}^{n+j-2} u^j_k\, x_{k+2} + u^j_0\, x_2 = \\ &= -u^j_2\, h_2\, x_0 - u^j_3\, h_3\, x_1 - u^j_4\, h_4\, x_2 - u^j_2\, q_2\, x_1 - u^j_3\, q_3\, x_2 - u^j_2\, p_2\, x_2 + u^j_0\, x_2 + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+j-2} u^j_k\, (h_k\, x_{k-2} + q_k\, x_{k-1} + p_k\, x_k + g_k\, x_{k+1} + x_{k+2})\,, \qquad j \in -1:2\,. \end{aligned}$$

После простых преобразований система (14) приобретает вид

$$
\begin{cases}
h_k\, x_{k-2} + q_k\, x_{k-1} + p_k\, x_k + g_k\, x_{k+1} + x_{k+2} = f_k\,, & k \in 1:n\,, \\
\quad x_j + u_1^j\, h_1\, x_{-1} + (u_2^j\, h_2 + u_1^j\, q_1)\, x_0 + & \\
\quad + (h_3\, u_3^j + q_2\, u_2^j + u_1^j\, p_1)\, x_1 - u_0^j\, x_2 = \sum\limits_{k=1}^{n+j-2} u_k^j\, f_k\,, & j \in -1:2\,.
\end{cases} \tag{22}
$$

Ясно, что система (22) равносильна системе (14).

Заметим, что последние четыре уравнения системы (22) составляют замкнутую подсистему относительно x_{-1}, x_0, x_1, x_2

$$
\begin{gathered}
x_j + u_1^j\, h_1 x_{-1} + (u_2^j\, h_2 + u_1^j\, q_1)\, x_0 + \\
+ (h_3\, u_3^j + q_2\, u_2^j + u_1^j\, p_1)\, x_1 - u_0^j\, x_2 = \sum_{k=1}^{n+j-2} u_k^j\, f_k, \qquad j \in -1:2\,.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Неизвестные $x_3, \ldots, x_n$ однозначно вычисляются для каждого набора x_{-1}, x_0, x_1, x_2 найденного из (23). Для этого нужно воспользоваться первыми $n-4$ уравнениями системы (22) и двумя последними уравнениями системы (14) при $j = -1, 0$:

$$
\begin{gathered}
x_k = f_{k-2} - h_{k-2}\, x_{k-4} - q_{k-2}\, x_{k-3} - p_{k-2}\, x_{k-2} - g_{k-2}\, x_{k-1}\,, \quad k \in 3:n-2\,; \\
x_{n-1} = x_{-1}\,, \qquad x_n = x_0\,.
\end{gathered}
$$

Равносильность проделанных преобразований позволяет утверждать, что возможность решения системы (1), а также единственность решения системы (1), определяются свойствами системы (23). При решении системы (23) могут представиться три случая.

1) Система (23) несовместна. Следовательно исходная система (1) тоже несовместна.

2) Система (23) имеет единственное решение. В этом случае исходная система (1) тоже имеет единственное решение.

3) Система (23) имеет бесконечное множество решений. В этом случае исходная система (1) тоже имеет бесконечное множество решений.

З а м е ч а н и е 3. В матричном виде система (23) может быть переписана так

$$\left[I_4 + \begin{pmatrix} u_1^{-1} & u_2^{-1} & u_3^{-1} & u_0^{-1} \\ u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 & u_0^0 \\ u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_0^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & q_1 & p_1 & 0 \\ 0 & h_2 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-3} u_k^{-1} f_k \quad \sum_{k=1}^{n-2} u_k^0 f_k \quad \sum_{k=1}^{n-1} u_k^1 f_k \quad \sum_{k=1}^{n} u_k^2 f_k \right)^T,$$

где I_4 – единичная матрица 4–го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Программирование и математика* // Вестник молодых учёных. 2005. № 3. С. 3–14.

(Семинар «DHA & CAGD». Избранные докдады. 17 мая 2005 г. `http://dha.spb.ru/reps05.shtml#0517`)