ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ*

М. Н. Истомина
istomina@syktsu.ru

В. В. Максименко
xupypr@xupypr.com

А. Б. Певный
pevnyi@syktsu.ru

1 апреля 2009 г.

Для каждого (n, m)-фрейма Парсеваля в $\mathbb{R}^n$, где $1 < n < m - 1$, определяются дополнительные фреймы Парсеваля в пространстве размерности $n' = m - n$. Путём перенормировки дополнительные фреймы можно определить для любого жёсткого фрейма.

1°. В пространстве $\mathbb{R}^n$ будем использовать обычное скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Пусть m, n — натуральные числа, $1 < n < m - 1$. Напомним, что фреймом Парсеваля называется жёсткий фрейм с константой $A = 1$, т. е. система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется фреймом Парсеваля, если

$$\sum_{k=1}^{m} \big[\langle x, x_k \rangle\big]^2 = \big\|x\big\|^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Через Φ обозначим матрицу со столбцами $x_1, \ldots, x_m$. Хорошо известно (см. [1]), что условие (1) равносильно условию

$$\Phi\,\Phi^T = I_n\,, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. В силу (2)

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}\,,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Здесь, в отличие от (1), угловые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Дополним систему $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ строками $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m$ так, чтобы все m строк $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m\}$ образовали ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Такое дополнение, конечно, возможно. Через Φ_0 обозначим матрицу со строками $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Она является ортогональной:

$$\Phi_0 \, \Phi_0^T = I_m \, . \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_0^T \, \Phi_0 = I_m \, .$$

Это означает, что столбцы $X_1, \ldots, X_m$ матрицы Φ_0 также образуют ортонормированную систему. Столбец X_k можно записать в виде

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \qquad k \in 1:m, \tag{4}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — исходные векторы-столбцы, а $y_k \in \mathbb{R}^{m-n}$ — дополнительные вектор-столбцы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$, при этом выполнены соотношения*

$$\big\|x_k\big\|^2 + \big\|y_k\big\|^2 = 1, \tag{5}$$

$$\langle x_k, x_s \rangle + \langle y_k, y_s \rangle = 0 \quad \text{\textit{при} } k \neq s. \tag{6}$$

Доказательство. Через Ψ обозначим матрицу со столбцами $y_1, \ldots, y_m$. Она состоит из добавленных строк $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m$, удовлетворяющих соотношению

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik} \, , \qquad i, k \in n+1 : m,$$

что соответствует равенству $\Psi \, \Psi^T = I_{m-n}$. Значит, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$. Соотношения (5) и (6) вытекают из ортонормированности векторов (4).

Предложение доказано. □

Построенный фрейм $\{y_1, \ldots, y_m\}$ называется *дополнительным фреймом Парсеваля.* Он обладает характерным свойством

$$\langle y_k, y_s \rangle = -\langle x_k, x_s \rangle \quad \text{при } k \neq s.$$

2°. Конструкции из п. 1° можно придать другую форму. Введём матрицу размера $n \times m$

$$P = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right].$$

Умножение P на вектор $X = (x_1, \dots, x_m)^T$ приводит к отбрасыванию последних $m - n$ компонент вектора X:

$$PX = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис $\{X_1, \dots, X_m\}$ в $\mathbb{R}^m$ такой, что*

$$PX_k = x_k\,, \qquad k \in 1:m. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Если $\{x_k\}_{k=1}^m$ — фрейм Парсеваля, то существует ортонормированная система в $\mathbb{R}^m$ вида (4), а тогда $PX_k = x_k$, $k \in 1:m$.
Достаточность. Пусть существует ортонормированный базис $\{X_k\}_{k=1}^m$ и выполнено (7). Рассмотрим матрицу Φ_0 со столбцами $X_1, \dots, X_m$. Это ортогональная матрица. Её строки $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ также образуют ортонормированную систему:

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}\,, \qquad i, k \in 1:m. \tag{8}$$

Из векторов $x_k = PX_k$, $k \in 1:m$, составим матрицу Φ размера $n \times m$. Её строками являются $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. В силу (8) выполнено равенство $\Phi\Phi^T = I_n$, значит, $\{x_k\}_{k=1}^m$ — фрейм Парсеваля.

Предложение доказано. □

Формула (7) даёт единообразный способ получения фреймов Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^n$. На этот способ обращали внимание многие авторы (см., например, [2, 3]).

3°. Обратимся к построению дополнительных фреймов для равноугольных жёстких фреймов.

Напомним [1], что система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *равноугольным жёстким фреймом*, если

1) $\quad \big\|\varphi_k\big\| = 1, \quad k \in 1:m;$

2) $\quad \big|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\big| = c \quad$ при $k \neq s$;

3) $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_k \rangle\big]^2 = A\big\|x\big\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$

где c и A — некоторые константы. Показывается [1], что константы определяются однозначно:

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}\,, \qquad A = \frac{m}{n}\,.$$

Равноугольные жёсткие фреймы существуют не для всех пар (n, m). Полезным является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $1 < n < m - 1$. Если для данной пары (n, m) существует равноугольный жёсткий фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, то существует равноугольный жёсткий фрейм $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ для пары (n', m), где $n' = m - n$; при этом*

$$\operatorname{sign}\langle\psi_k, \psi_s\rangle = -\operatorname{sign}\langle\varphi_k, \varphi_s\rangle \quad \textit{при } k \neq s.$$

Доказательство. Векторы

$$x_k = \sqrt{\frac{n}{m}}\,\varphi_k\,, \qquad k \in 1 : m,$$

образуют фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^n$. По построению п. 1° существует дополнительный фрейм Парсеваля $\{y_k\}$ в $\mathbb{R}^{n'}$, при этом выполнены равенства (5) и (6).

Из этих равенств получаем

$$\|y_k\|^2 = 1 - \|x_k\|^2 = 1 - \frac{n}{m} = \frac{m-n}{m}\,,$$

$$\langle y_k, y_s\rangle = -\langle x_k, x_s\rangle = -\frac{n}{m}\,\langle\varphi_k, \varphi_s\rangle = -\frac{n}{m}\,c \quad \text{при } k \neq s.$$

Введём теперь векторы

$$\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\,y_k\,, \qquad k \in 1 : m.$$

Они обладают свойствами:

1) $\|\psi_k\| = 1$, $k \in 1 : m$;

2) $|\langle\psi_k, \psi_s\rangle| = \frac{m}{m-n}\,|\langle y_k, y_s\rangle| = \frac{n}{m-n}\,c$ при $k \neq s$;

3) $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{R}^{n'}$ с константой

$$\frac{m}{m-n} = \frac{m}{n'}\,.$$

Значит, $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^{n'}$, где $n' = m - n$.

Предложение доказано. $\square$

4°. Пусть $1 < n < m-1$ и $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$. Введём матрицу Φ размера $n \times m$ со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Тогда условие жёсткого фрейма, как и выше, можно записать в виде

$$\Phi \Phi^T = \frac{m}{n} I_n \,. \tag{9}$$

Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Тогда (9) равносильно условию

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \frac{m}{n} \delta_{ik} \,, \qquad i, k \in 1 : n.$$

Процесс построения дополнительного фрейма можно конкретизировать следующим образом:

1. Введём нормированные векторы-строки

$$s_i = \sqrt{\frac{n}{m}} \gamma_i \,, \qquad i \in 1 : n.$$

2. Дополним систему $\{s_1, \dots, s_n\}$ строками $s_{n+1}, \dots, s_m$ до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^m$. Из строк $s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im})$, $i \in 1 : m$, составим матрицу S.

3. Столбцы матрицы S представим в виде

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad y_k \in \mathbb{R}^{m-n}; \qquad k \in 1 : m.$$

Нормированные векторы $\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\, y_k$, $k \in 1 : m$, образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

5°. Введём симметричную матрицу размера $m \times m$

$$Q[i,k] = \begin{cases} 0, & i = k, \\ \operatorname{sign}\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle, & i \neq k, \end{cases}$$

которая является *конференц–матрицей* (см. [4]).

ТЕОРЕМА. *Столбцы $s_1^T, \dots, s_n^T$ являются собственными векторами матрицы Q, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = \frac{m-n}{nc}$. Столбцы $s_{n+1}^T, \dots, s_m^T$ являются собственными векторами матрицы Q, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = -\frac{1}{c}$.*

Доказательство. Введём матрицу Грама $G = \Phi^T \Phi$, состоящую из скалярных произведений $\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle$, $i, k \in 1 : m$, и найдём её собственные числа.

Для $k \in 1:n$ вычислим $Gs_k^T = \Phi^T \Phi\, s_k^T$. Строки матрицы Φ ранее были обозначены $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Имеем

$$\langle \gamma_i, s_k \rangle = 0, \quad i \neq k; \qquad \langle \gamma_k, s_k \rangle = \sqrt{\frac{n}{m}}\, \langle \gamma_k, \gamma_k \rangle = \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \frac{m}{n}\,.$$

Отсюда

$$Gs_k^T = \Phi^T (\Phi\, s_k^T) = \frac{m}{n} \sqrt{\frac{n}{m}}\, \gamma_k^T = \frac{m}{n}\, s_k^T, \qquad k \in 1:n.$$

Кроме того, $Gs_k^T = \mathbb{O}$ при $k \in n+1:m$. Значит, собственными числами G являются числа $\frac{m}{n}$ и 0.

Ввиду равноугольности фрейма $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ справедливо равенство $Q = \frac{1}{c}\,(G - I_m)$. Отсюда получаем, что

$$Q\, s_k^T = \frac{1}{c} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) s_k^T = \frac{m-n}{nc}\, s_k^T, \qquad k \in 1:n;$$

$$Q\, s_k^T = -\frac{1}{c}\, s_k^T, \qquad k \in n+1:m.$$

Теорема доказана. □

6°. Один из возможных способов построения дополнительного равноугольного фрейма $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ основан на приведённой теореме. Найдём ортонормированные собственные векторы $s_{n+1}^T, \ldots, s_m^T$ матрицы Q, соответствующие собственному числу $-\frac{1}{c}$. Из строк $s_{n+1}, \ldots, s_m$ составим матрицу

$$Y = \begin{bmatrix} s_{n+1,1} & \ldots & s_{n+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m1} & \ldots & s_{mm} \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы обозначим $y_1, \ldots, y_m$. Тогда векторы

$$\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\, y_k\,, \qquad k \in 1:m,$$

образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

ПРИМЕР. Пусть $n = 3$, $m = 6$. Известным примером равноугольной системы в $\mathbb{R}^3$ является набор из 6 векторов:

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha, 1, 0), \qquad & g_4 &= (\alpha, -1, 0), \\ g_2 &= (0, \alpha, 1), \qquad & g_5 &= (0, \alpha, -1), \\ g_3 &= (1, 0, \alpha), \qquad & g_6 &= (-1, 0, \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. Нормированные векторы $\varphi_k = g_k/\sqrt{1+\alpha^2}$, $k \in 1:6$, образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^3$, причём

$$\bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr| = \tfrac{1}{\sqrt{5}} =: c \quad \text{при } k \neq s.$$

Построим дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

В данном случае матрица Q имеет вид:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

У этой симметричной матрицы можно найти собственные векторы, соответсвующие собственному числу $\lambda_2 = -1/c = -\sqrt{5}$. Запишем эти векторы в строчку:

$$\gamma_4 = (-1, 0, 0, \alpha, \alpha, 1),$$

$$\gamma_5 = (0, 0, -1, \alpha, 1, \alpha),$$

$$\gamma_6 = (0, -1, 0, 1, \alpha, \alpha).$$

После ортогонализации и нормировки этих векторов получим векторы s_4, s_5, s_6, которые запишем в виде строк матрицы Y размера 3×6.

Столбцы этой матрицы, как и выше, обозначим $y_1, \ldots, y_6$. Векторы $\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}\, y_k = \sqrt{2}\, y_k$, $k \in 1:6$, образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм. Матрица $\Psi = \bigl[\psi_1, \ldots, \psi_6\bigr]$ имеет вид

$$\Psi = \sqrt{2}\, Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{2}}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & \frac{2}{5+\sqrt{5}} & -\frac{2}{5+\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

При этом

$$\bigl|\langle \psi_k, \psi_s \rangle\bigr| = \tfrac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \langle \psi_k, \psi_s \rangle = -\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle \quad \text{при } k \neq s.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа. 2009. Вып. 39. С. 3–25.

2. Han D., Larson D. R. *Frames, bases and group representation* // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 147. N 697. P. 1–94.

3. Casazza P. G., Redmond D., Tremain J. C. *Real equiangular frames* // (`http://www.math.missouri.edu/~pete`).

4. Conway J. H., Sloane N. J. A. *Sphere packing, Lattices and Groups. 3rd edition.* Springer–Verlag, 1999.