ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ КАК ПОВЕРХНОСТЬ КУНСА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

28 августа 2007 г.

1°. Мы будем использовать следующие обозначения из [1].

L_1, L_2, L_3, L_4 — линейные операторы, определённые для непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1).$$

Предположим, что H_1, H_2, H_3, H_4 — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{array}{llll} H_1(0) = 1, & H_1'(0) = 0, & H_1'(1) = 0, & H_1(1) = 0; \\ H_2(0) = 0, & H_2'(0) = 1, & H_2'(1) = 0, & H_2(1) = 0; \\ H_3(0) = 0, & H_3'(0) = 0, & H_3'(1) = 1, & H_3(1) = 0; \\ H_4(0) = 0, & H_4'(0) = 0, & H_4'(1) = 0, & H_4(1) = 1. \end{array} \tag{1}$$

Из этих соотношений следует, что

$$L_i(aH_j) = a\delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:4, \quad a \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

В [1] доказано, что если вектор-функции f_i, g_i : $[0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\ i \in 1:4$, удовлетворяют условиям

$$L_j(f_i) = L_i(g_j), \qquad i,j \in 1:4, \tag{3}$$

то поверхность, задаваемая вектор-функцией

$$c(u,v) = \sum_{i=1}^{4} H_i(u)\, f_i(v) + \sum_{j=1}^{4} H_j(v)\, g_j(u) - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} H_i(u)\, H_j(v)\, L_i(g_j), \tag{4}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

будет удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} L_i\bigl(c(\cdot,v)\bigr) &= f_i(v), \qquad v\in[0,1], \quad i\in 1:4\,;\\ L_j\bigl(c(u,\cdot)\bigr) &= g_j(u), \qquad u\in[0,1], \quad j\in 1:4\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Эта поверхность называется *параметрической поверхностью Кунса.*

2°. Рассмотрим задачу построения поверхности вращения как параметрической поверхности Кунса.

Пусть $x, z\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда вектор-функция

$$p(u) = \bigl(x(u),\, 0,\, z(u)\bigr), \qquad u\in[0,1],$$

задаёт кривую в $\mathbb{R}^3$, лежащую в плоскости OXZ. Зафиксируем число $\alpha\in(0,\pi)$ и рассмотрим поверхность, определяемую вектор-функцией

$$r(u,v) = \bigl(x(u)\cos\alpha v,\, x(u)\sin\alpha v,\, z(u)\bigr), \qquad u,v\in[0,1]. \tag{6}$$

При фиксированных u и v точка $r(u,v)$ получается из точки $p(u)$ вращением на угол αv вокруг оси OZ. Поэтому поверхность, задаваемая вектор-функцией $r(u,v)$, получается из кривой $p(u)$ вращением вокруг оси OZ на угол в пределах от 0 до α.

Подберём теперь граничные функции f_i и g_j и смешивающие функции H_i таким образом, чтобы поверхность Кунса $c(u,v)$ совпала с поверхностью вращения $r(u,v)$. Граничные функции f_i и g_j получаются естественным образом из функции $r(u,v)$:

$$\begin{aligned}
f_1(v) &= r(0,v) &&= \bigl(x(0)\cos\alpha v,\, x(0)\sin\alpha v,\, z(0)\bigr),\\
f_2(v) &= r'_u(0,v) &&= \bigl(x'(0)\cos\alpha v,\, x'(0)\sin\alpha v,\, z'(0)\bigr),\\
f_3(v) &= r'_u(1,v) &&= \bigl(x'(1)\cos\alpha v,\, x'(1)\sin\alpha v,\, z'(1)\bigr),\\
f_4(v) &= r(1,v) &&= \bigl(x(1)\cos\alpha v,\, x(1)\sin\alpha v,\, z(1)\bigr),\\
g_1(u) &= r(u,0) &&= \bigl(x(u),\, 0,\, z(u)\bigr),\\
g_2(u) &= r'_v(u,0) &&= \bigl(0,\, \alpha x(u),\, 0\bigr),\\
g_3(u) &= r'_v(u,1) &&= \bigl(-\alpha x(u)\sin\alpha,\, \alpha x(u)\cos\alpha,\, 0\bigr),\\
g_4(u) &= r(u,1) &&= \bigl(x(u)\cos\alpha,\, x(u)\sin\alpha,\, z(u)\bigr).
\end{aligned} \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что для функций (7) условия (3) выполнены. Осталось подобрать такие функции H_i, чтобы поверхность Кунса, получаемая по формуле (4) для граничных функций (7), совпала с поверхностью вращения (6).

3°. Будем искать $H_i(t)$ в виде

$$A_i + B_i \sin \alpha t + C_i \cos \alpha t + D_i \sin^2 \alpha t,$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i и D_i — вещественные числа. Эти коэффициенты будем подбирать таким образом, чтобы выполнялись условия (1).

Для примера найдём H_1. Так как

$$1 = H_1(0) = A_1 + C_1,$$
$$0 = H_1'(0) = \alpha B_1,$$

то $B_1 = 0$, $A_1 = 1 - C_1$. Далее,

$$0 = H_1'(1) = -\alpha\, C_1 \sin \alpha + 2\alpha D_1 \sin \alpha \cos \alpha,$$

поэтому $C_1 = 2D_1 \cos \alpha$. Следовательно,

$$0 = H_1(1) = A_1 + C_1 \cos \alpha + D_1 \sin^2 \alpha = 1 - 2D_1 \cos \alpha + 2D_1 \cos^2 \alpha +$$
$$+ D_1 \sin^2 \alpha = 1 + D_1\,(2\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos \alpha) = 1 + D_1\,(1 - \cos \alpha)^2.$$

Для коэффициентов D_1, C_1 и A_1 получаем представления

$$D_1 = -\frac{1}{(1-\cos \alpha)^2}, \quad C_1 = -\frac{2\cos \alpha}{(1-\cos \alpha)^2}, \quad A_1 = 1 + \frac{2\cos \alpha}{(1-\cos \alpha)^2},$$

так что

$$H_1(t) = A_1 + C_1 \cos \alpha t + D_1 \sin^2 \alpha t =$$
$$= \frac{1 + \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha\, \cos \alpha t - \sin^2 \alpha t}{(1-\cos \alpha)^2} = \frac{(\cos \alpha - \cos \alpha t)^2}{(1-\cos \alpha)^2}\,.$$

Аналогичным образом можно подобрать H_2, H_3 и H_4. Придём к формулам

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= \frac{(\cos \alpha - \cos \alpha t)^2}{(1-\cos \alpha)^2}\,,\\
H_2(t) &= \frac{\sin \alpha t - \sin \alpha}{\alpha} + \frac{(\cos \alpha - \cos \alpha t)\,(\cos^2 \alpha - \cos \alpha t)}{\alpha \sin \alpha\,(1-\cos \alpha)}\,,\\
H_3(t) &= \frac{(1-\cos \alpha t)\,(\cos \alpha - \cos \alpha t)}{\alpha \sin \alpha\,(1-\cos \alpha)}\,,\\
H_4(t) &= 1 - \frac{(\cos \alpha - \cos \alpha t)^2}{(1-\cos \alpha)^2}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что $H_1(t) + H_4(t) \equiv 1$.

Далее мы покажем явно, что для функций H_2, H_3 и H_4 выполняются условия (1). Кроме того, будет установлено, что поверхность Кунса, получаемая по граничным функциям (7) с использованием смешивающих функций (8), действительно совпадает с поверхностью вращения $r(u, v)$.

ЛЕММА 1. *Выполнены тождества*

$$H_1(t) - \alpha H_3(t)\sin\alpha + H_4(t)\cos\alpha = \cos\alpha t, \qquad \forall t\in[0,1]; \tag{9}$$

$$\alpha H_2(t) + \alpha H_3(t)\cos\alpha + H_4(t)\sin\alpha = \sin\alpha t, \qquad \forall t\in[0,1]. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$H_1(t) - \alpha H_3(t)\sin\alpha + H_4(t)\cos\alpha = H_1(t)\,(1-\cos\alpha) - \alpha H_3(t)\sin\alpha + \cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{1-\cos\alpha}\left[(\cos\alpha-\cos\alpha t)^2 - (1-\cos\alpha t)\,(\cos\alpha-\cos\alpha t)\right] + \cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{1-\cos\alpha}\left[(\cos\alpha-\cos\alpha t)\,(\cos\alpha-1)\right] + \cos\alpha = \cos\alpha t.$$

Соотношение (9) установлено. Разберёмся с (10):

$$\alpha H_2(t) + \alpha H_3(t)\cos\alpha = \sin\alpha t - \sin\alpha +$$

$$+ \frac{\cos\alpha-\cos\alpha t}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}\left[\cos^2\alpha - \cos\alpha t + \cos\alpha\,(1-\cos\alpha t)\right] =$$

$$= \sin\alpha t - \sin\alpha + \frac{\cos\alpha-\cos\alpha t}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}\left[(1+\cos\alpha)\,(\cos\alpha-\cos\alpha t)\right] =$$

$$= \sin\alpha t - \sin\alpha + \frac{(\cos\alpha-\cos\alpha t)^2}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)^2}\,(1-\cos^2\alpha) =$$

$$= \sin\alpha t - \sin\alpha + \sin\alpha\,\frac{(\cos\alpha-\cos\alpha t)^2}{(1-\cos\alpha)^2} =$$

$$= \sin\alpha t - H_4(t)\sin\alpha,$$

что равносильно требуемому. □

ЛЕММА 2. *Для функций* (8) *выполнены условия* (1).

Доказательство. Ясно, что $H_1(0)=1$, $H_1(1)=0$. Далее,

$$H_1'(t) = \frac{2\alpha\sin\alpha t\,(\cos\alpha-\cos\alpha t)}{(1-\cos\alpha)^2},$$

поэтому $H_1'(0)=H_1'(1)=0$. Так как $H_4(t)=1-H_1(t)$, то условия на H_4 также выполнены. Осталось проверить условия на H_2 и H_3.

Подставляя в тождества (9) и (10) значения $t=0$ и $t=1$, получаем, что $H_3(0)=H_3(1)=H_2(0)=H_2(1)=0$.

Теперь продифференцируем (9) и (10) по t:

$$H_1'(t) - \alpha H_3'(t)\sin\alpha + H_4'(t)\cos\alpha = -\alpha\sin\alpha t,$$
$$\alpha H_2'(t) + \alpha H_3'(t)\cos\alpha + H_4'(t)\sin\alpha = \alpha\cos\alpha t.$$

Подставив в эти тождества значения $t = 0$ и $t = 1$, придём к равенствам $H_3'(0) = 0$, $H_3'(1) = 1$, $H_2'(0) = 1$, $H_2'(1) = 0$. Лемма доказана. $\square$

Из леммы 2 следует, что функции (8) могут быть использованы для построения параметрической поверхности Кунса.

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$q(t) = A + B\sin\alpha t + C\cos\alpha t + D\sin^2\alpha t, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}^3, \tag{11}$$

и $L_i(q) = 0$ *для* $i \in 1:4$. *Тогда* $q \equiv 0$.

Доказательство. Отметим, что

$$q'(t) = \alpha B\cos\alpha t - \alpha C\sin\alpha t + 2\alpha D\cos\alpha t\sin\alpha t.$$

По условию имеем

$$\begin{aligned}
q(0) &= A + C = 0,\\
q'(0) &= \alpha B = 0,\\
q'(1) &= \alpha B\cos\alpha - \alpha C\sin\alpha + 2\alpha D\cos\alpha\sin\alpha = 0,\\
q(1) &= A + B\sin\alpha + C\cos\alpha + D\sin^2\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Из второго равенства видно, что $B = 0$. Из первого и третьего равенств следует, что $A = -C$, $C = 2D\cos\alpha$. Четвёртое равенство преобразуем к виду

$$0 = (-2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,D =$$
$$= (1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)\,D = (1-\cos\alpha)^2\,D.$$

Так как $\alpha \in (0, \pi)$, то $D = 0$. Получаем $D = C = A = B = 0$, так что $q \equiv 0$. $\square$

ТЕОРЕМА. *Поверхность Кунса, построенная по граничным функций* (7) *с использованием смешивающих функций* (8), *совпадает с поверхностью вращения* (6).

Доказательство. Подставим во вторую сумму из правой части формулы (4) значения из (7) и воспользуемся тождествами (9) и (10). Получим

$$\sum\nolimits_{j=1}^{4} H_j(v)\, g_j(u) = \Big(x(u)\,\big(H_1(v) - \alpha H_3(v)\sin\alpha + H_4(v)\cos\alpha\big),$$

$$x(u)\,\big(\alpha H_2(v) + \alpha H_3(v)\cos\alpha + H_4(v)\sin\alpha\big),\ \ z(u)\,\big(H_1(v) + H_4(v)\big)\Big) =$$

$$= \big(x(u)\cos\alpha v,\ x(u)\sin\alpha v,\ z(u)\big) = r(u,v).$$

Преобразуем две оставшиеся суммы в правой части формулы (4). Согласно (3):

$$\sum_{i=1}^{4} H_i(u)\, f_i(v) - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} H_i(u)\, H_j(v)\, L_i(g_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} H_i(u)\, \Big[f_i(v) - \sum_{j=1}^{4} L_j(f_i)\, H_j(v)\Big].$$

Обозначим

$$q_i(v) = f_i(v) - \sum_{j=1}^{4} L_j(f_i)\, H_j(v), \qquad i \in 1:4.$$

Используя линейность L_k и равенство (2), получаем

$$L_k(q_i) = L_k(f_i) - \sum_{j=1}^{4} L_k\big(L_j(f_i)\, H_j\big) = L_k(f_i) - \sum_{j=1}^{4} L_j(f_i)\, \delta_{kj} = 0.$$

Кроме того, из формул для $f_i(v)$ и $H_j(v)$ видно, что $q_i(v)$ является многочленом степени два от $\cos\alpha v$ и $\sin\alpha v$. А так как $\cos^2\alpha v$ можно заменить на $1-\sin^2\alpha v$, то $q_i(v)$ имеет вид (11). Таким образом, все условия леммы 3 выполнены. Значит, $q_i(v) \equiv 0$.

Итак,

$$\sum_{i=1}^{4} H_i(u)\, f_i(v) + \sum_{j=1}^{4} H_j(v)\, g_j(u) - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} H_i(u)\, H_j(v)\, L_i(g_j) =$$

$$= r(u,v) + \sum_{i=1}^{4} H_i(u)\, q_i(v) = r(u,v).$$

Теорема доказана. □

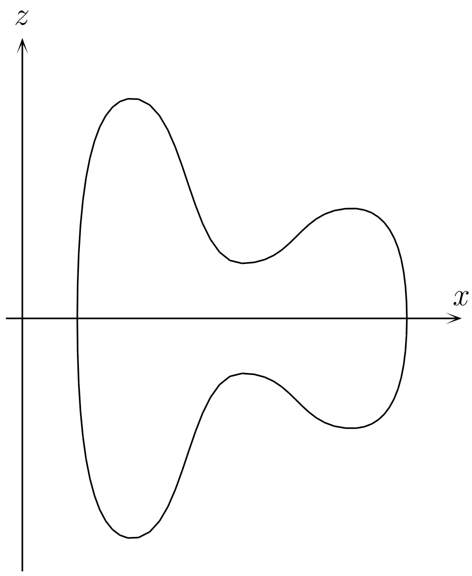

Рис. 1. Кривая

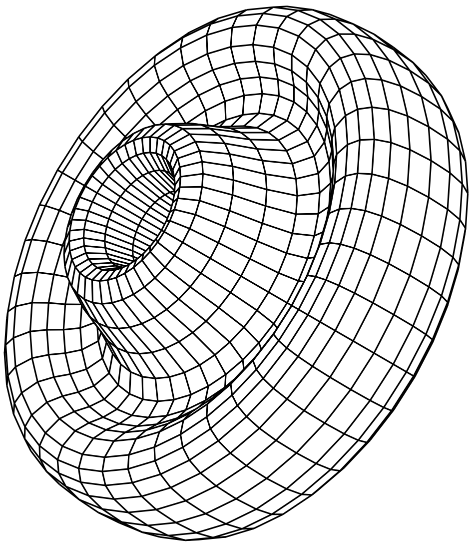

Рис. 2. Поверхность вращения

4°. В случае $\alpha = \pi/2$ функции (8) имеют вид:

$$H_1(t) = \cos^2\frac{\pi t}{2}, \qquad H_2(t) = \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{2} - \sin^2\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$H_3(t) = -\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{2} - \cos^2\frac{\pi t}{2}\right), \qquad H_4(t) = \sin^2\frac{\pi t}{2}.$$

Возьмём кривую, лежащую в плоскости OXZ (см. рис. 1), и построим поверхность путём вращения этой кривой вокруг оси OZ на угол $\pi/2$. Такая поверхность может быть реализована как поверхность Кунса. Если построенную поверхность отразить относительно плоскости OYZ, а потом обе эти поверхности отразить относительно плоскости OXZ, то получится полная поверхность вращения (см. рис. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Бикубические поверхности Кунса.* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 23 января 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0123`)