ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ КРЕСТЕНСОНА*

М. С. Беспалов

bespalov@vlsu.ru

31 марта 2012 г.

В данном докладе конструкция для дискретных функций Уолша, приведённая в докладах В. Н. Малозёмова [1] и М. С. Беспалова [2], переносится из двоичного гармонического анализа в p-ичный. Базовые сведения приведены также в книге [3] и в статье [4], а новые результаты в статье [5].

1°. Двоичный гармонический анализ подразделяют на непрерывный, в рамках которого исследуются *функции Уолша* в нумерациях Пэли, Уолша и Качмажа (см. книгу [6]), и дискретный, где работают с *дискретными функциями Уолша* в нумерациях Пэли, Уолша и Адамара. Для дискретных функций Уолша наиболее востребована нумерация Адамара, приведённая в докладе [1].

Аналогом системы Уолша-Пэли в p-ичном гармоническом анализе служит система Крестенсона-Леви. А p-ичным аналогом дискретных функций Уолша-Пэли и Уолша-Адамара соответственно служат дискретные функции Крестенсона-Леви и Крестенсона-Кронекера соответственно. В книге [3] другая терминология, там дискретные и "непрерывные" (относительно непрерывного аргумента) функции Крестенсона называются ВКФ (Виленкина-Крестенсона функциями) в нумерациях Пэли и Адамара соответственно.

2°. Каждая функция Уолша (за исключением $w_0(x) \equiv 1$) определяется как произведение функций Радемахера. А для функций Радемахера есть (см. книгу [6]) три разных определения, приводящие к построению разных теорий.

Определение $r_k(x) = \operatorname{sign} \sin 2^{k+1}\pi x$ позволяет оставаться в классе регулярных функций, что важно в теории рядов Фурье.

Для прикладников удобнее определять функции Радемахера на полуинтервале $[0, 1)$ через начальную функцию $r_0(x) = 1$ при $x \in [0, 1/2)$, $r_0(x) = -1$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доклад подготовлен при поддержке РФФИ, проект 11-01-97512 р-центр-а, и в рамках проекта ДПННиТ № 1.1348.2011.

при $x \in [1/2, 1)$. Функцию $r_0(x)$ продолжают с периодом 1 на полуось $[0, \infty)$ и задают остальные функции методом двоичного сжатия $r_k(x) = r_0(2^k x)$.

Если все двоично-рациональные точки полуинтервала $[0, 1)$ рассматривать как двойные, то от второго определения переходим к определению функций Радемахера (а следовательно и Уолша) на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$, что соответствует определению функций Уолша на двоичной группе Кантора.

3°. Наиболее приспособленным к p-ичному обобщению, которое первым проделал Леви [7], выглядит второй вариант определения функций Радемахера. Полагаем $\omega = \omega_p = \exp(\frac{2\pi i}{p})$ и определяем *обобщённую начальную функцию Радемахера*:

$$r_0(x) = \omega^k \ , \quad \text{если } x \in \Delta_1^k = \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right), \ k \in 0 : p-1. \tag{1}$$

Функцию $r_0(x)$ продолжаем с периодом 1 на полуось $[0, \infty)$ и задаем остальные *обобщённые функции Радемахера* методом p-ичного сжатия $r_j(x) = r_{j-1}(px)$. Для обобщённых функций Радемахера применяется прежнее обозначение, так как при $p = 2$ определение (1) совпадает с определением функций Радемахера.

В статье [8] через p-ичное n-значное разложение числа $k \in 0 : p^n - 1$,

$$k = \sum_{j=1}^{n} k_j p^{j-1}, \quad \text{где } 0 \leqslant k_j \leqslant p-1, \tag{2}$$

вводятся *функции Крестенсона-Леви*

$$\psi_k(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(r_{j-1}(x)\right)^{k_j} . \tag{3}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [6]). *Система функций* $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *составляет полную ортонормированную на* $[0, 1)$ *систему функций.*

4°. При заданных p, n через разложение (2) чисел $k, m \in 0 : p^n - 1$ вычисляются значения *дискретных функций Крестенсона* двух основных нумераций

$$\varphi_m(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega^{k_j m_j}, \quad \tau_m(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega^{k_j m_{n-j+1}}, \qquad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}. \tag{4}$$

Фиксированное целое $p > 2$ определяет основание системы, а фиксированное натуральное n задаёт число аргументов p^n дискретной функции. Число n назовём *уровнем* дискретной функции и будем отмечать в фигурных скобках: если для отдельных значений дискретной функции, то после аргумента $\varphi_m(k)\{n\}$, $\tau_m(k)\{n\}$; а для всей функции в виде $\varphi_m\{n\}$, $\tau_m\{n\}$.

Первое знакомство с понятием функции обычно начинают с упоминания трёх способов задания функции: аналитического, графического и табличного. Более простым выглядит табличный способ задания дискретной функции, который при фиксированном порядке аргументов превращается в представление дискретной функции в виде вектора (например, векторы $\varphi_m\{n\}$, $\tau_m\{n\}$).

5°. С дискретными функциями будем работать как с векторами. Для дискретных функций Крестенсона u, v (фиксированного уровня) применяются операции сложения $u+v$ и покоординатного умножения $u \bullet v$, которая для векторов называется *умножением по Адамару.* Заметим, что (применяемое в книге [3]) отождествление функций Крестенсона и дискретных функций Крестенсона вызвано именно необходимостью применения для последних операции умножения (по Адамару).

Другой основной операцией над дискретными функциями Крестенсона, позволяющей от функций уровня m и n переходить к новому уровню $m+n$, служит операция *кронекерова произведения* (определение см. в докладе [2]) матриц (в нашем случае векторов) $u\{m\} \otimes v\{n\}$.

6°. Основным примером векторной формы записи дискретной функции Крестенсона служит следующая запись *дискретной экспоненциальной функции* (в [3] обозначена ДЭФ), где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$:

$$r = (1\ ,\ \omega\ ,\ \omega^2\ , \dots\ \omega^{p-1}). \tag{5}$$

В обозначениях (4) эта функция равна $\varphi_1\{1\} = \tau_1\{1\}$. Степени (по Адамару) этой функции есть следующие ДЭФ:

$$r^{\bullet 2} = r \bullet r = (1\ ,\ \omega^2\ ,\ \omega^4\ , \dots\ \omega^{2p-2}) = \varphi_2\{1\} = \tau_2\{1\},$$

и далее при $j < p$ имеем $r^{\bullet j} = \varphi_j\{1\} = \tau_j\{1\}$.

Заметим, что строки матрицы *дискретного преобразования Фурье* (ДПФ) $F_p = (\omega^{kj})_{k,j=0}^{p-1}$ состоят из всех степеней ДЭФ в естественном порядке

$$r^{\bullet 0}\ , r,\ r^{\bullet 2}, \dots,\ r^{\bullet (p-1)}.$$

7°. Разложению (2) соответствует *простой p-ичный* (n-значный) *код* числа $k \in 0 : p^n - 1$ (обозначение $\tilde{k}$ применяем при фиксированном n)

$$\tilde{k} = k_{\{n\}} = (k_n\ k_{n-1} \dots k_1).$$

Если опустить скобки, то это запись числа в p-ичной системе счисления.

Для того же числа укажем $(n+1)$-значный простой код

$$k_{\{n+1\}} = (0\ k_n\ k_{n-1} \dots k_1).$$

По простому коду $\tilde{k}$ получаем *обратный код* (он же *реверс* кода, см. [1])

$$\operatorname{rev}\tilde{k} = (k_1\ k_2\ \ldots k_n),$$

с помощью которого вводится (см. [1]) *перестановка реверс* на множестве чисел $Z(p,n) = \{0,1,2,\ldots,p^n-1\}$:

$$\operatorname{rev}_n(k) = \operatorname{rev}(k) = \sum_{j=1}^{n} k_{n-j+1}p^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} k_{n-j}p^j. \tag{6}$$

ЛЕММА 1. *Если $m < p^n$, то $\operatorname{rev}_{n+1}(m) = p\cdot\operatorname{rev}_n(m)$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rev} m_{\{n+1\}} = (m_1\ m_2\ \ldots m_n\ 0)$, то согласно (6) $\operatorname{rev}_{n+1}(m) = 0 + \sum_{j=1}^{n} m_{n+1-j}p^j = p\sum_{j=1}^{n} m_{n-j+1}p^{j-1}$. □

8°. При фиксированном n через скалярное произведение кодов длины n над кольцом $\mathbb{Z}_p$ введём скалярное произведение элементов множества $Z(p,n)$:

$$(m,k) = (m,k)_n = (\tilde{m},\tilde{k}) = \sum_{j=1}^{n} m_j k_j\ (mod\, p).$$

Основную операцию *сложения по модулю* p в кольце $\mathbb{Z}_p$ обозначим $\dot{+}$. Легко проверяется следующая

ЛЕММА 2. *Введённая операция скалярного произведения удовлетворяет основным свойствам скалярного произведения: симметрия, $(m,k) = (k,m)$, и линейность, $(m,\alpha k \dot{+} \beta l) = \alpha(m,k) \dot{+} \beta(m,l)$.*

При фиксированном p и заданном уровне n определение (4) дискретных функций Крестенсона перепишем в виде (для $m,k \in Z(p,n)$)

$$\varphi_m(k) = \omega^{(m,k)}, \quad \tau_m(k) = \omega^{(\operatorname{rev}(m),k)}. \tag{7}$$

9°. Рассмотрим поведение функций φ_m при изменениии уровня. Тривиально доказывается следующая

ЛЕММА 3. *Если $0 \leqslant m,k < p^n$, то $(m,k)_n = (m,k)_{n+1} = (m,k)_{n+2} = \ldots$, $(m,k+jp^n)_{n+1} = (m,k)_n$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $0 \leqslant m,k < p^n$, то*

$$\varphi_m(k)\{n\} = \varphi_m(k)\{n+1\} = \varphi_m(k)\{n+2\} = \ldots,$$

$$\varphi_m\{n+1\} = \varphi_0\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

В пояснении нуждается только вторая формула. При сквозной нумерации чисел множества $Z(p, n+1)$ индексами $k + jp^n$ при каждом $j \in 0 : p-1$ пробегаем все p^n значений множества $Z(p, n)$, после чего переходим к $j+1$. Согласно (7) и лемме 3

$$\varphi_m(k + jp^n)\{n+1\} = \omega^{(m, k+jp^n)_{n+1}} = \omega^{(m,k)_n} = \varphi_m(k)\{n\}.$$

Получаем блочный вид вектора $\varphi_m\{n+1\}$, что перепишем с помощью символа кронекерова произведения

$$\varphi_m\{n+1\} = (\varphi_m \ \varphi_m \ \ldots \varphi_m \ ) = \varphi_0\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если* $0 \leqslant m < p^n$, $0 \leqslant j < p$, *то*

$$\varphi_{m+jp^n}\{n+1\} = \varphi_j\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

Доказательство. Если $0 \leqslant m, k < p^n$, $0 \leqslant j, l < p$, то в обозначениях $M = m + jp^n$, $K = k + lp^n$ имеем

$$(M, K)_{n+1} = jl \dotplus (m,k)_n, \quad \varphi_M(K)\{n+1\} = \omega^{jl}\varphi_m(k)\{n\}.$$

Так же как в следствии получаем

$$\varphi_M\{n+1\} = (\varphi_m \ \ \omega^j\varphi_m \ \ldots \omega^{(p-1)j}\varphi_m \ ) = \varphi_j\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}. \qquad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовём матрицей дискретного преобразования Крестенсона-Кронекера (уровня n) кронекерову степень матрицы дискретного преобразования Фурье, то есть матрицу $F_p^{(n)} = F_p \otimes F_p^{(n-1)}$.

ЛЕММА 4. *Строка с номером* $m + jp^{n-1}$, *где* $0 \leqslant m < p^{n-1}$, $0 \leqslant j < p$, *матрицы* $A \otimes B$ *имеет вид* $A_j \otimes B_m$, *выраженный через строки исходных матриц с указанными индексами.*

Из этой леммы, которая легко проверяется, и предложения 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Строки матрицы* $F_p^{(n)}$ *есть естественно упорядоченный полный набор дискретных функций Крестенсона* $\varphi_m\{n\}$.

10°. Согласно следствию 2 и определению 1 функции (4), упорядоченные как $\varphi_m\{n\}$, назовём *дискретными функциями Крестенсона-Кроненкера.*

Функции (4), упорядоченные как $\tau_m\{n\}$, назовём *дискретными функциями Крестенсона-Леви*, в соответствии со следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Нумерация (4) дискретных функций τ_m совпадает с нумерацией (3) функций Крестенсона-Леви ψ_m непрерывного аргумента:*

$$\psi_m(x) = \tau_m(k) \quad \text{при } x \in \Delta_n^k = \left[\frac{k}{p^n}, \frac{k+1}{p^n}\right). \tag{8}$$

Причём построенная по такому правилу ψ_m не зависит от выбора уровня n (такого, что $m < p^n$) дискретной функции Крестенсона τ_m.

Доказательство. Во-первых, $\tau_0(k) = 1$ для всех k независимо от уровня. Поэтому и по формуле (8) получаем $\psi_0(x) \equiv 1$.

Для произвольного натурального m возьмём (и зафиксируем) любое n такое, что $m < p^n$. Произвольное $x \in [0, 1)$ разложим в виде $x = \epsilon + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j}$, где $0 \leqslant \epsilon < \frac{1}{p^n}$. По формуле (1) имеем $r_1(x) = r_0(px) = \omega^{x_2}$, так как $px \in \Delta_1^{x_2}$; аналогично $r_{j-1}(x) = \omega^{x_j}$. Используя разложение (2), рассмотрим

$$\psi_m(x) = \prod_{j=1}^{n} (r_{j-1}(x))^{m_j} = \prod_{j=1}^{n} \omega^{x_j m_j} = \omega^{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}.$$

Если $x \in \Delta_n^k$, то $x = \frac{k}{p^n} + \epsilon$, где $0 \leqslant \epsilon < \frac{1}{p^n}$. Так как простой код числа $k = \sum_{j=1}^{n} k_j p^{j-1}$ равен $\tilde{k} = (k_n\ k_{n-1} \dots k_1)$, то $x = \epsilon + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{n-j+1}}{p^j}$. Поэтому $x_j = k_{n-j+1}$, rev $\tilde{k} = (x_n\ x_{n-1} \dots x_1)$ и при $x \in \Delta_n^k$

$$\psi_m(x) = \omega^{(\mathrm{rev}(k), m)} = \tau_m(k)\{n\}. \qquad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если $m < p^n$, то $\tau_m\{n+1\} = \tau_m\{n\} \otimes \tau_0\{1\}$.*

Доказательство. Так как $\Delta_n^k = \cup_{s=0}^{p-1} \Delta_{n+1}^{s+kp}$, то при сквозной нумерации индексами $s+kp$ от 0 до $p^{n+1}-1$ значения функции $\psi_m(x)$ на интервалах Δ_{n+1}^{s+kp} при фиксации k повторяются p раз равными $\tau_m(k)\{n\}$. Этот факт и записан с помощью символа кронекерова произведения и вектора $\tau_0 = (1\ 1\ 1 \dots 1)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $m < p^n$, то $\tau_{m+jp^n}\{n+1\} = \tau_m\{n\} \otimes \tau_j\{1\}$.*

Доказательство. При $x \in \Delta_{n+1}^{s+kp}$ как и выше имеем

$$\begin{aligned} \tau_{m+jp^n}(s+kp)\{n+1\} = \psi_{m+jp^n}(x) = \psi_m(x) \cdot (r_n(x))^j = \tau_m(k)\{n\} \cdot \omega^{sj} = \\ = \tau_m(k) \cdot \tau_j(s)\{1\}. \end{aligned} \qquad \square$$

11°. Формулы (4) или (7) служат определением дискретных функций Крестенсона в двух основных нумерациях. Предложим определение этих функций в виде векторов (то есть табличное задание дискретной функции) не привязанное к нумерации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Дискретной функцией Крестенсона уровня n* назовём кронекерово произведение в количестве n сомножителей векторов вида $r^{\bullet j}$, то есть степеней по Адамару дискретной экспоненциальной функции (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При фиксированных p и n (основании и уровня) дискретная функция Крестенсона Ψ однозначно задаётся своими n значениями на множестве аргументов $A = \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$. Основное множество аргументов A допускает замену на другое множество аргументов A'. Если число p простое, то вместо каждого аргумента p^j можно при формировании A' брать любое число из множества $\{p^j, p^j + 1, \ldots, p^{j+1} - 1\}$.*

Доказательство. По определению 2 произвольная дискретная функция Крестенсона уровня n имеет вид

$$\Psi = r^{\bullet j_{n-1}} \otimes r^{\bullet j_{n-2}} \otimes \ldots r^{\bullet j_1} \otimes r^{\bullet j_0}. \tag{9}$$

Так как начальное значение любой дискретной функции Крестенсона (нулевая координата) равно 1, то подвектор вектора Ψ, состоящий из его первых p координат, есть вектор $r^{\bullet j_0}$, координата с номером 1 которого равна ω^{j_0}. То есть $\Psi(1) = \omega^{j_0}$. В случае множества A' из простоты p вытекает, что все координаты вектора $r^{\bullet j_0}$ различны, и j_0 восстанавливается по номеру координаты.

Аналогично устанавливается, что подвектор вектора Ψ, состоящий из его первых p^2 координат, есть вектор $r^{\bullet j_1} \otimes r^{\bullet j_0}$, координата с номером p которого равна ω^{j_1}. То есть $\Psi(p) = \omega^{j_1}$. Зная j_0 и номер следующей координаты во множестве A', однозначно вычисляется j_1.

Этот процесс продолжается аналогично. В основном случае $\Psi(p^2) = \omega^{j_2}$. И так далее, $\Psi(p^k) = \omega^{j_k}$. В случае множества A' этот процесс несколько усложняется. □

12°. Комплексно-сопряжённой к дискретной экспоненциальной функции также будет ДЭФ: $\overline{r^{\bullet j}} = r^{\bullet (p-j)}$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 5. *Комплексно-сопряжённая к дискретной функции Крестенсона будет тоже дискретной функцией Крестенсона.*

При цифровой обработке сигналов с помощью ортогональных преобразований используется следующая схема, которую запишем в матричном виде.

По исходному сигналу x (в виде столбца длины N) спектральные характеристики y вычисляются применением *оператора анализа* по формуле

$$y = F^* \cdot x.$$

Восстанавливается сигнал с помощью *оператора синтеза* по формуле

$$x = \frac{1}{N}\, F \cdot y.$$

В качестве F берут матрицу дискретного преобразования Фурье порядка N, или дискретного преобразования Крестенсона (в нумерации Кронекера или Леви) порядка N, или какого-либо другого ортогонального преобразования.

Введем понятие дискретного преобразования Крестенсона произвольной нумерации. При этом потребуем, чтобы оба оператора анализа и синтеза выполнялись относительно дискретных функций Крестенсона. Соответствующую матрицу преобразования назовём *К-матрицей.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём К-матрицей уровня n такую матрицу, что: все её строчки есть различные дискретные функции Крестенсона уровня n; а также все её столбцы есть различные дискретные функции Крестенсона уровня n.

ТЕОРЕМА 1. *Если p простое, то между множествами невырожденных над полем $\mathbb{Z}_p$ матриц $B = (b_{lj})$ порядка n и К-матриц $V = (v_{rs})$ уровня n существует взаимно-однозначно соответствует по правилу $v_{p^l p^j} = \omega^{b_{lj}}$, где $l, j \in 0 : n-1$. Остальные элементы матрицы V восстанавливаются однозначно.*

Доказательство. Для матриц V, B той же буквой с нижним индексом будем обозначать строку матрицы с указанным номером.

По произвольному ненулевому вектору $B_0 = (b_{00}\ b_{01} \ldots b_{0n-1})$ (в качестве начальной строки B) соответствием $v_{1p^j} = \omega^{b_{0j}}$, где $j \in 0 : n-1$, однозначно определяем координаты строки V_1 с номерами, взятыми из выборки $\alpha = \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$. По предложению 4 восстанавливаем всю строку V_1.

Тогда следующие $(p-2)$ строки матрицы V получаются возведением в степень (по Адамару) этой строки: $V_l = V_1^{\bullet l}$, где $2 \leqslant l < p$.

Опишем индуктивный переход. Предположим, что построены первые p^{k-1} строк матрицы V по первым $(k-1)$ строкам матрицы B.

Строка V_{p^k} строится по предложению 4 через свои координаты с номерами из выборки α, которые в свою очередь вычислены через строку B_k по правилу $v_{p^k p^j} = \omega^{b_{kj}}$.

Линейная независимость строк B_0, B_1, B_2,..., B_k гарантирует то, что среди ранее построенных строк V_0, V_1, ..., $V_{p^{k-1}-1}$ не встречается строка $V_{p^{k-1}}$.

Строка с номером $sp^k + l$, где $l < p^k$, строится по правилу линейной перестановки

$$V_{sp^k+l} = V_{p^k}^{\bullet s} \bullet V_l.$$

Также из линейной независимости выводится, что и эта произвольная строка не могла встретиться среди ранее построенных строк.

Рассмотренный процесс построения обратим. Для произвольной K-матрицы с помощью выборки α выделяется её подматрица, по которой легко восстанавливается матрица B.

В заключении проверяется, что каждый столбец таким образом построенной матрицы есть дискретная функция Крестенсона. □

В этом доказательстве приведена общая схема, но отдельные детали не подробно обоснованы. В [5] предложено другое доказательство этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312)

2. Беспалов М. С. *Спектральное разложение операторов дискретного преобразования Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 8 октября 2011 г. (http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1008)

3. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975.

4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Обобщённые вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина-Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.

5. Беспалов М. С. *Дискретное преобразование Крестенсона* // Проблемы передачи инф. 2010. Т. 46. Вып. 4. С. 91–115.

6. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* М.: Наука, 1987.

7. Levy P. *Sur une generalisation des fonctions orthogonales de M. Rademacher* // Comment. math. helv. 1944. V. 16. P. 146–152.

8. Chrestenson H. E. *A class of generalized Walsh functions* // Pacific. J. Math. 1955. V. 5. Ch. 1. P. 17–32.