ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

21 января 2009 г.

Пусть U — унитарная матрица порядка n и $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ — единичный вектор. В работе [1] получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы система векторов

$$\big\{\varphi_0, U\varphi_0, U^2\varphi_0, \ldots, U^{m-1}\varphi_0\big\} \tag{1}$$

при $m \geqslant n$ была жёстким фреймом. В этом докладе мы продолжим изучение систем вида (1), используя некоторые идеи из [2].

Нормированный жёсткий фрейм $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ в $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ назовём *циклическим с константой* $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, если выполняется соотношение

$$\langle \varphi_{k+1}, \varphi_{s+1} \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\,, \qquad k, s \in 0 : m-1\,, \tag{2}$$

где $\varphi_m = c\,\varphi_0$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система векторов* $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ *из* $\mathbb{C}^n$ *при* $m \geqslant n$ *была циклическим с константой* $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, *нормированным жёстким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась унитарная матрица* U *порядка* n, *такая, что*

$$\varphi_k = U^k \varphi_0\,, \qquad k \in 1 : m-1\,,$$

причём все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* U *суть попарно различные корни степени* m *из* c, *а соответствующие ортонормированные собственные векторы* $p_1, \ldots, p_n$ *удовлетворяют условию*

$$\big|\langle \varphi_0, p_j \rangle\big| = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad j \in 1 : n\,. \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доказательство. Необходимость. Обозначим $\psi_k = \varphi_{k+1}$, $k \in 0 : m-1$, где $\varphi_m = c\,\varphi_0$. Согласно (2)

$$\langle \psi_k, \psi_s \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle \,, \qquad k, s \in 0 : m-1 \,.$$

По теореме об унитарной эквивалентности двух систем векторов [3] найдётся унитарная матрица U порядка n, такая, что

$$\psi_k = U\varphi_k \,, \qquad k \in 0 : m-1 \,.$$

Это значит, что

$$\varphi_{k+1} = U\varphi_k \,, \quad k \in 0 : m-2 \,; \qquad c\,\varphi_0 = U\varphi_{m-1} \,.$$

Имеем

$$\varphi_k = U^k\varphi_0 \,, \quad k \in 1 : m-1 \,; \qquad U^m\varphi_0 = c\,\varphi_0 \,.$$

Далее

$$U^m\varphi_k = U^m(U^k\varphi_0) = U^k(U^m\varphi_0) = c\,\varphi_k \,, \quad k \in 0 : m-1 \,,$$

так что

$$(U^m - c\,I_n)\,\varphi_k = 0 \,, \qquad k \in 0 : m-1 \,.$$

Здесь I_n — единичная матрица порядка n. Принимая во внимание, что линейная оболочка векторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ совпадает с $\mathbb{C}^n$, заключаем, что

$$U^m = c\,I_n \,. \tag{4}$$

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ собственные числа матрицы U и через $p_1, \ldots, p_n$ — соответствующие ортонормированные собственные векторы. Запишем спектральное разложение матрицы U:

$$U = P\Lambda P^*.$$

Здесь P — матрица со столбцами $p_1, \ldots, p_n$ и Λ — диагональная матрица, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Матрица P — унитарная, поэтому

$$U^m = P\Lambda^m P^*.$$

Согласно (4), $\Lambda^m = c\,I_n$. Это означает, что все собственные числа матрицы U являются корнями степени m из c.

Перепишем равенство $\varphi_k = U^k\varphi_0$ в виде $\varphi_k = P\Lambda^k P^*\varphi_0$. Обозначим $g_k = P^*\varphi_k$. Тогда $g_k = \Lambda^k g_0$, $k \in 0 : m-1$. В покоординатной записи последнее равенство выглядит так:

$$g_k(j) = \lambda_j^k\, g_0(j) \,, \qquad j \in 1 : n \,, \quad k \in 0 : m-1 \,. \tag{5}$$

Отметим, что
$$\langle\varphi_k, p_j\rangle = \langle P^*\varphi_k, P^*p_j\rangle = g_k(j)\,. \tag{6}$$
Учитывая определение нормированного жёсткого фрейма и формулы (5), (6), при всех $j \in 1:n$ получаем
$$1 = \|p_j\|^2 = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\big|\langle p_j, \varphi_k\rangle\big|^2 = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\big|g_k(j)\big|^2 =$$
$$= \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\big|\lambda_j^k\, g_0(j)\big|^2 = n\,\big|g_0(j)\big|^2.$$
Отсюда следует (3), поскольку $g_0(j) = \langle\varphi_0, p_j\rangle$.

Осталось проверить, что собственные числа матрицы U попарно различны. Обозначим через Φ и G матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ соответственно. По определению нормированного жёсткого фрейма $\Phi\Phi^* = \frac{m}{n}\, I_n$. Вместе с тем, $G = P^*\,\Phi$, поэтому
$$GG^* = P^*\big(\Phi\Phi^*\big)P = \tfrac{m}{n}\, I_n\,.$$
В частности, $(GG^*)[i,j] = 0$ при $i \neq j$. Согласно (5) имеем
$$0 = \big(GG^*\big)[i,j] = \sum_{k=0}^{m-1} g_k(i)\,\overline{g_k(j)} = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\sum_{k=0}^{m-1}\big(\lambda_i\,\overline{\lambda}_j\big)^k. \tag{7}$$
При $\lambda_i = \lambda_j$ такое равенство невозможно, поскольку $|\lambda_j| = 1$ и $\big|g_0(j)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при всех $j \in 1:n$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Разложим вектор φ_0 по ортонормированному базису $p_1, \ldots, p_n$. Запишем
$$\varphi_0 = \sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_0, p_j\rangle\, p_j\,.$$
Согласно (3)
$$\|\varphi_0\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\big|\langle\varphi_0, p_j\rangle\big|^2 = 1\,.$$
По условию $\varphi_k = U^k\varphi_0$, $k \in 1:m-1$, так что система векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ является нормированной. Проверим, что она образует жёсткий фрейм.

Введём векторы $g_k = P^*\varphi_k$, $k \in 0:m-1$. Обозначим, как и раньше, через Φ и G матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ соответственно. Имеем $\Phi\Phi^* = P\,GG^*P^*$. Покажем, что $GG^* = \frac{m}{n}\, I_n$. Отсюда будет следовать, что $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ — жёсткий фрейм.

Воспользуемся формулами (5) и (7). Запишем

$$\bigl(GG^*\bigr)[i,j] = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\,\sum_{k=0}^{m-1}\bigl(\lambda_i\,\overline{\lambda}_j\bigr)^k.$$

В частности,

$$\bigl(GG^*\bigr)[j,j] = m\,\bigl|g_0(j)\bigr|^2 = m\,\bigl|\langle\varphi_0, p_j\rangle\bigr|^2 = \tfrac{m}{n}\,, \quad j\in 1:n\,.$$

Далее, по условию $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, поэтому $\lambda_i\,\overline{\lambda}_j = \lambda_i\,\lambda_j^{-1} \neq 1$ и

$$\bigl(GG^*\bigr)[i,j] = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\,\frac{1-(\lambda_i\,\overline{\lambda}_j)^m}{1-\lambda_i\,\overline{\lambda}_j} = g_0(i)\,\overline{g_0(j)}\,\frac{1-|c|^2}{1-\lambda_i\,\overline{\lambda}_j} = 0\,.$$

Установлено, что $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ — нормированный жёсткий фрейм. Его цикличность проверяется просто. Положим $\varphi_m = U^m\varphi_0$. В этом случае $\varphi_m = P\Lambda^m P^*\varphi_0 = c\,\varphi_0$. Для векторов $\varphi_k = U^k\varphi_0$, $k\in 0:m$, соотношение (2) очевидно.

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьёва Н. А. *О жёстких фреймах специального вида* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2009–01. 8 с. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2009/index.html#01`)

2. Casazza P. G., Kovačević J. *Uniform tight frames with erasures* // Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. No. 2-4. P. 387–430.

3. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Об унитарных матрицах и сингулярных разложениях* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 января 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0130`).